

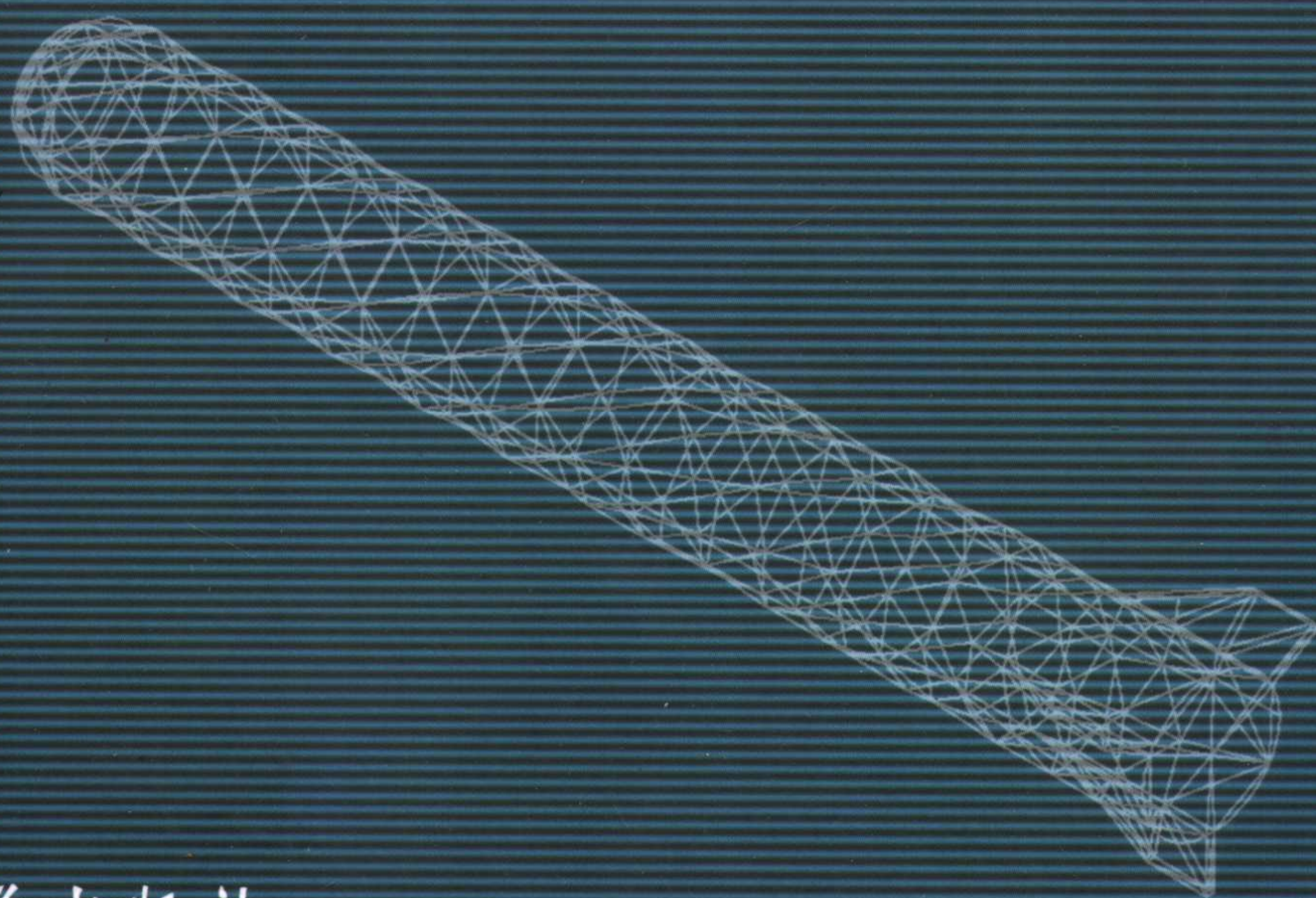
兵器科学与技术



国防科工委『十五』规划教材

# 火箭外弹道学

● 徐明友 著



哈尔滨工业大学出版社

北京航空航天大学出版社 北京理工大学出版社

西北工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社





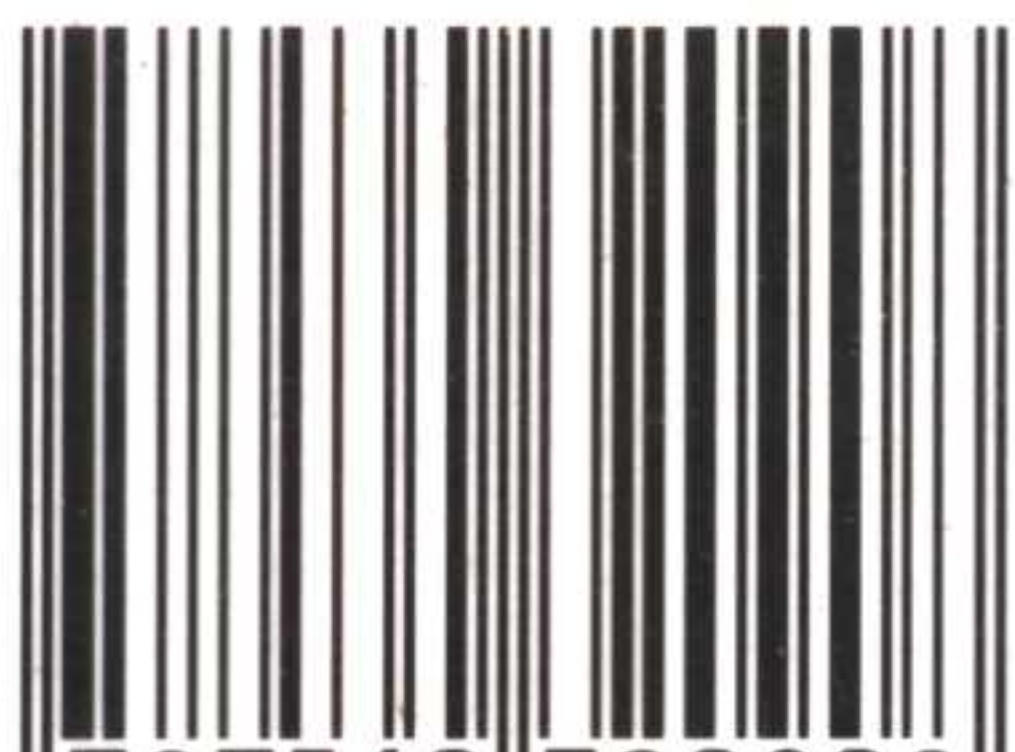
普通高等教育“十五”国家级规划教材

**国防科工委“十五”规划教材**  
**兵器科学与技术**



责任编辑：尹继荣  
书籍装帧：彩多设计

ISBN 7-5603-2090-2



9 787560 320908 >

ISBN 7-5603-2090-2  
TJ·2 定价：39.00 元





国防科工委“十五”规划教材·兵器科学与技术

# 火箭外弹道学

徐明友 著

哈尔滨工业大学出版社

北京航空航天大学出版社 北京理工大学出版社

西北工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社



## 内容简介

本书系统地论述了火箭的弹道计算、扰动运动、飞行稳定性、弹道优化理论、弹道修正和射表编制,并简要地阐明了有控飞行理论。

本书取材于国内外火箭外弹道学方面的最新成果,并加以综合深化而成。书中内容新颖,构成了独特而完整的理论体系;并具有突出的系统性、科学性、先进性和实用性。本著作可作为大专院校的教材,同时也可作为从事火箭武器和弹药研究、设计、生产及靶场试验的工程技术人员参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

火箭外弹道学/徐明友著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2004.11

ISBN 7-5603-2090-2

I.火… II.徐… III.火箭外弹道学  
IV.TJ013.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 102193 号

## 火箭外弹道学

徐明友 著

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451—86414749

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787×960 1/16 印张 30.25 字数 640 千字

版 次 2004 年 11 月第 1 版 2004 年 11 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5603-2090-2/TJ·2

印 数 1~2 000

定 价 39.00 元



# 国防科工委“十五”规划教材编委会

(按姓氏笔画排序)

主任:张华祝

副主任:王泽山 陈懋章 屠森林

编委:王 祁 王文生 王泽山 田 蔚 史仪凯  
乔少杰 仲顺安 张华祝 张近乐 张耀春  
杨志宏 肖锦清 苏秀华 辛玖林 陈光禔  
陈国平 陈懋章 庞思勤 武博祎 金鸿章  
贺安之 夏人伟 徐德民 聂 宏 贾宝山  
郭黎利 屠森林 崔锐捷 黄文良 葛小春





# 总 序

国防科技工业是国家战略性产业,是国防现代化的重要工业和技术基础,也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来,在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下,国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中,取得了举世瞩目的辉煌成就。研制、生产了大量武器装备,满足了我军由单一陆军,发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要,特别是在尖端技术方面,成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术,使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备,使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路,建立了专业门类基本齐全,科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系,奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础;掌握了大量新技术、新工艺,研制了许多新设备、新材料,以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术,大大提高了国家的科技水平和竞争力,使中国在世界高科技领域占有了一席之地。十一届三中全会以来,伴随着改革开放的伟大实践,国防科技工业适时地实行战略转移,大量军工技术转向民用,为发展国民经济做出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业,国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来,国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍,他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神,勇挑重担,敢于攻关,为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动,成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战,高等院校在培养国防科技人才,生产和传播国防科技新知识、新思想,攻克国防基础科研和高技术研究难题当中,具有不可替





代的作用。国防科工委高度重视,积极探索,锐意改革,大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具,但受种种客观因素的影响,现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平,不适应国防现代化的形势要求,对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况,建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系,国防科工委全额资助编写、出版 200 种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量,在广泛动员全国相关专业领域的专家学者竞投编著工作的基础上,以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的 100 多位专家、学者,对经各单位精选的近 550 种教材和专著进行了严格的评审,评选出近 200 种教材和学术专著;覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与工程、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者,他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等,具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中,国防特色专业重点教材和专著的出版,将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出,进入二十一世纪,我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标,对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展,提升国防实力,需要造就宏大的人才队伍,而教育是奠基的柱石。全面振





兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务,落实科教兴国和人才强国战略,推动国防科技工业走新型工业化道路,加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华,实现志向,提供了缤纷的舞台,希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识,树立正确的世界观、人生观、价值观,努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任,创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好,国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝





# 前 言

1976年,国防工业出版社为填补弹道专业图书的空白,特委托我撰写一本《火箭外弹道学》专著。原著定稿时,由于教学急需,1980年便以教材类书目出版,后由兵器工业出版社于1989年再版。20多年来的教学和科研实践表明,该书的理论体系是正确的,与国外同类著作相比,该书有独具特色的理论体系,完整地揭示了各类火箭的运动规律,以统一的数学力学方法处理和分析飞行动力学问题,而且尽可能地沟通了无控与有控火箭运动理论之间的关系。

作为著作品牌之一的《火箭外弹道学》被列入“十五”国家级规划教材和国防科工委规划教材,为提高教材质量,作者对书中的内容重新做了审核、修改和补充,以满足新形势的需要。作为高等学校专业基础教科书,首先考虑到的是如何引导初学者学习火箭外弹道学的基本知识,认识火箭运动规律及总体性能,掌握建立数学力学模型的方法和技巧,建立必要的物理概念。尽管有了快速计算机,解析分析还是非常重要的。足够精确的解析式不仅能直观地反映出各物理量之间的函数关系,便于分析影响运动规律的各种因素,从而打下坚实的专业知识基础,而且也是数值结果是否正确的判别依据。实践表明,坚实的基础理论和系统的专业知识是以深厚的理性认识为前提的,本书特别重视物理概念的阐述,旨在提高分析和解决问题的能力。

本书仍以较大篇幅求解火箭的运动规律,同时力求以简捷的方法推导出精确的弹道模型,为准确的数值计算奠定可靠的基础。与前两版相比,本书把重点放在建立精确而实用的运动模型方面。所建立的运动模型计及了地球表面曲率和重力加速度随高度的变化,使之不仅对近程弹,而且对远程弹亦能适用。给出了各类坐标系通用的转换模式,可以将任一坐标系内的几何量和力学量很方便地转换到所需要的坐标系中,书中具体给出了转换网络图及坐标转换矩阵的相关表达式。这种转换也可以





直接由计算机完成,而不必人工推导,避免出错。导弹运动模型中的气动力还考虑了风这一重要因素,并给出了对各坐标系的转移关系;火箭在有风存在条件下的气动力也更精确化。本书的另一重要贡献是沟通并统一了有控与无控弹道的动稳定性理论,建立了导弹新的传递函数,由此不仅可得出通用的动稳定性判据,也便于简明地对滚转导弹做系统性的稳定性分析。外弹道优化理论增加了具有广泛用途的制导律的推导,并给以应用实例。

现代战争要求实施远程精确打击,射程较远的火箭在飞行全过程中,已逐渐应用主动段姿态控制、弹道修正技术以及末段制导等措施,特别对远程火箭是很现实的问题。还有其他灵巧弹,均有不同形式的控制飞行过程。可见所谓“有控弹道”已不专属于导弹,其涉及面较为广泛。书中所述“有控弹”亦不是专指导弹。本书适当地论述有控弹道,不仅是必要的,而且国外有的优秀外弹道著作也是这样做的。作为一本外弹道理论著作,以统一的理论体系和系统的分析方法,阐述各运动过程的共同规律及其特性,为总体性能设计论证与试验分析奠定坚实的理论基础,这就是撰写本书的宗旨。

本书共 17 章,从内容安排上力求做到由浅入深、循序渐进。第一章至第六章为无控及有控过程的火箭质心运动规律,即质点弹道学,述及弹道的一些基本概念和计算分析方法。第七章至第十二章研究无控火箭的绕心运动,差不多占据了全书二分之一的篇幅,是本书的重点。在此将火箭作为六自由度力学对象,进行了全面的受力分析,尤其给出了气动力和力矩的精确表达式,建立了统一的运动模型,该模型精确度高,适用范围广,具有很大的实用价值。对各类弹箭的扰动运动做到了方程、变量、运动模式和公式形式四统一。既揭示了共性,又比较出各类弹的特点,做到了举一反三,加强了火箭扰动运动规律和散布理论的系统性。第十三章到第十五章研究运动稳定性,包括无控及有控弹道,给出了通用的稳定性判据并做了较全面分析。第十六章外弹道优化理论,为读者简略介绍寻求最佳运动状态的基本原理和弹道优化方法。第十七章阐述无控火箭弹





道修正量的内涵及射表编制的基本原则。鉴于本书是大学本科兵工专业的教材,对其内容的广度和深度必须加以适当控制。而且作为专业基础教科书,不可能也没有必要对武器系统各方面的弹道问题做全面深入的探讨,其侧重点应该是分析和处理问题的原理和方法。至于弹箭武器设计中所涉及到的一些专门问题,则是专业课的任务。对无控和有控弹道学中更深层次的理论及应用问题,则纳入研究生教材或其他专著。比如起始扰动的计算与分析,既是外弹道学的内容,又属于发射动力学的范畴;任一武器的发射动力学问题均处于学术研究的前沿,而且需要撰写大量的篇幅,对此,本书只能给予一些初步知识。

在撰写本书过程中,始终得到南京理工大学教务处和弹道研究所领导的有力支持和深切关怀;马殿荣将军(教授、博导)、李鸿志院士、朵英贤院士、宋丕极教授、康新中研究员、苗瑞生教授、郑民达研究员、杨绍卿总工、徐中信总工、马怀义总师等著名学者和我的同事们,各以不同方式给予了热情帮助,在此对他们表示衷心的感谢!

限于作者水平,难免有错,望读者不吝赐教。

徐明友

2003年8月于南京理工大学



# 目 录

绪 论	1
第一章 火箭质心运动方程	4
1.1 质心运动惯性参考系	4
1.2 火箭质心运动矢量方程的一般形式	4
1.3 推力及推力加速度	6
1.4 重力及重力加速度	8
1.5 标准大气和炮兵标准气象条件	10
1.6 空气阻力及阻力加速度	15
1.7 在基本假设下的火箭质心运动矢量方程	19
1.8 火箭质心运动的标量方程组	21
1.9 空气弹道特性	25
附录 火箭质心运动的一般方程	28
第二章 火箭弹道主动段的解析解	31
2.1 运动方程组	31
2.2 $K$ 点弹道诸元的计算公式	33
2.3 计算顺序	36
2.4 增程弹道增速段解法	40
第三章 火箭弹道被动段解法	42
3.1 前言	42
3.2 分段解法	42
3.3 虚速法	45
3.4 西亚切解法及其应用	51
第四章 椭圆理论	58
4.1 方程的组成和积分	58
4.2 弹道方程的讨论	61
4.3 任意点弹道诸元	62
4.4 射程与最大射程角	63
4.5 给定射程下所必需的最小初速的解	64





<b>第五章 自动瞄准弹道</b>	66
5.1 引言	66
5.2 自动瞄准导弹相对运动方程	68
5.3 追踪弹道	71
5.4 平行接近路线	75
5.5 比例导引法	77
<b>第六章 遥控弹道</b>	83
6.1 概述	83
6.2 反坦克导弹的三点法导引弹道	85
6.3 三点法导引弹道的法向加速度	88
6.4 导弹速度变化和目標机动时对三点法导引特性的影响	90
6.5 前置量法和半前置量法	91
<b>第七章 尾翼式火箭弹摆动理论</b>	95
7.1 前言	95
7.2 运动方程的建立	96
7.3 扰动方程组的变量变换	104
7.4 起始扰动所引起的攻角和偏角	106
7.5 再论有效滑轨(定向器)长度	114
7.6 计算散布的方法及散布与射程的关系	115
7.7 推力线偏心的影响	118
7.8 风的影响	122
7.9 火箭在被动段内的摆动运动	129
附录 几个次要因素对主动段的影响	131
<b>第八章 旋转火箭弹及轴对称飞行器一般运动方程组</b>	135
8.1 概述	135
8.2 火箭外弹道学中常用的坐标系及其相互关系	136
8.3 火箭运动方程组的一般形式	143
8.4 诸外力和外力矩	150
8.5 扰动运动方程组及其简化	163
8.6 含有其他次要力和力矩以及扰动因素的扰动运动方程组	168
<b>第九章 尾翼式旋转火箭弹的扰动运动</b>	172
9.1 前言	172
9.2 运动微分方程的变量变换	172
9.3 起始扰动所引起的攻角和偏角	174





9.4 推力线偏心的影响 .....	181
9.5 低速旋转范围内推力线偏心引起偏角的另一散布公式 .....	187
9.6 风的影响 .....	189
9.7 动不平衡的影响 .....	192
9.8 散布计算与分析小结 .....	195
9.9 野战尾翼式火箭弹低速旋转范围的判据 .....	196
<b>第十章 涡轮式火箭弹的扰动运动 .....</b>	<b>204</b>
10.1 概述 .....	204
10.2 起始扰动所引起的攻角和偏角 .....	205
10.3 推力偏心的影响 .....	212
10.4 风的影响 .....	215
10.5 动不平衡的影响 .....	220
10.6 散布小结 .....	222
<b>第十一章 发射过程——起始扰动计算 .....</b>	<b>224</b>
11.1 前言 .....	224
11.2 在半约束期内旋转火箭弹的扰动方程 .....	224
11.3 质量分布不均衡引起的起始扰动 .....	225
11.4 定向器振动所引起的起始扰动 .....	228
11.5 只考虑重力矩时运动方程的解 .....	229
11.6 弹炮间隙存在下的运动方程 .....	231
<b>第十二章 火箭增程弹的扰动运动 .....</b>	<b>234</b>
12.1 前言 .....	234
12.2 野战尾翼式增程弹的散布分析 .....	234
12.3 起始扰动引起偏角的极限值 .....	240
12.4 周期性扰动因素引起的散布 .....	246
12.5 合理点火条件的选择 .....	251
12.6 反坦克增程弹的立靶密集度 .....	259
<b>第十三章 无控火箭的运动稳定性 .....</b>	<b>263</b>
13.1 引言 .....	263
13.2 扰动运动方程的简化与变换 .....	264
13.3 动态稳定条件的推导 .....	265
13.4 稳定性区域 .....	269
13.5 几个主要参量对动态稳定性的影响 .....	271
13.6 共振效应 .....	274





13.7	无控火箭的追随稳定性 .....	276
13.8	尾翼式火箭弹的转速范围 .....	279
13.9	涡轮式火箭弹的转速范围——喷管倾斜角的确定 .....	280
<b>第十四章</b>	<b>有控弹一般运动方程组 .....</b>	<b>282</b>
14.1	概述 .....	282
14.2	导弹飞行力学中的惯用坐标系及其相互关系 .....	282
14.3	运动方程 .....	287
14.4	联系方程 .....	288
14.5	诸力和力矩 .....	290
14.6	控制方程 .....	294
14.7	导弹运动方程组 .....	294
14.8	机动性与过载 .....	297
<b>第十五章</b>	<b>有控弹飞行稳定性和操纵性 .....</b>	<b>299</b>
15.1	引言 .....	299
15.2	扰动运动方程组 .....	299
15.3	纵向运动的动态稳定性 .....	302
15.4	有控弹的操纵性 .....	307
15.5	有控滚转火箭的飞行稳定性 .....	311
15.6	有控弹道系统稳定性分析 .....	315
<b>第十六章</b>	<b>外弹道优化理论 .....</b>	<b>318</b>
16.1	概述 .....	318
16.2	变分法简介 .....	318
16.3	变分法的应用举例 .....	322
16.4	最小值原理简介 .....	326
16.5	最小值原理的应用举例 .....	329
16.6	线性系统最优制导律 .....	333
<b>第十七章</b>	<b>无控火箭弹道偏差量及射表编制 .....</b>	<b>337</b>
17.1	序言 .....	337
17.2	主动段的弹道偏差量 .....	338
17.3	被动段的修正系数 .....	344
17.4	偏流简介 .....	348
17.5	火箭射表编制的基本原则 .....	349
<b>主要符号汇编 .....</b>		<b>353</b>





附表	.....	363
附表 1	$\tau-y$ .....	363
附表 2	$\pi(y) = \frac{p(y)}{P_{0n}} = \exp\left(-\frac{1}{R_1} \int_0^y \frac{dy}{\tau}\right)$ .....	364
附表 3	$H(y) = \frac{\rho}{\rho_{0n}}$ .....	365
附表 4	饱和蒸汽压力 .....	366
附表 5	1943 年阻力定律 $C_{xon}(Ma)$ .....	366
附表 6	1943 年阻力定律 $F(v_\tau)$ .....	367
附表 7	$K_1(\mu) = (1-\mu)\ln(1-\mu) + \mu$ .....	371
附表 8	$K_2(\mu) = -\int_{0.01}^{\mu} \frac{d\mu}{\ln(1-\mu)}$ .....	371
附表 9	$L(v) = \int_0^v F(v)dv$ .....	372
附表 10	$R(v) = \frac{L(v)}{v}$ .....	372
附表 11	$\xi(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ .....	373
附表 12	$\phi(x) = 1-x-\ln 1-x $ .....	379
附表 13	$K_X = \sqrt{\frac{2}{f_1 f_6}}$ .....	381
附表 14	$B(u_0, u) \times 10^5 = 10^5 \int_{u_0}^u \frac{1}{2u} \sqrt{\frac{u_0}{u}} \exp[i(u-u_0)] du$ .....	384
附表 15	$R_L(u_0, u) \times 10^5 = 10^5 \int_{u_0}^u \frac{B_I(y, u)}{2y} dy$ .....	421
附表 16	$\phi_g^*(u_0, u) \times 10^3 = \frac{10^3}{2} \int_{u_0}^u \frac{1}{y} [1-B_R(y, u)] dy$ .....	443
附表 17	$S_C(c, v_0, \theta_0)$ .....	447
参考文献	.....	463



# 绪 论

火箭外弹道学属于外弹道学的一个组成部分。外弹道学是研究弹箭的运动规律和总体性能的科学。这里的“弹箭”泛指各类有控或无控火箭弹、枪弹和炮弹。有人曾把有控弹道称为“导弹飞行力学”。“火箭外弹道学”或“火箭飞行原理”是研究各类无控和有控火箭的运动规律的。在现代武器不断发展的条件下,有控和无控弹道是不可截然分开的。就无控火箭及炮弹而言,目前已着手采用简易制导,而对有控火箭(导弹)而言,也有一段弹道是无控飞行过程。因此本书在主要论述无控火箭运动的同时,对导弹飞行理论亦作简明阐述。

火箭的运动可区分为质心运动和围绕质心运动(简称绕心运动)两部分。前者主要解决弹道计算问题,后者主要解决飞行稳定性及射弹散布的计算与分析问题。所谓飞行稳定性,大致说来,就是弹箭受到外界干扰因素作用,引起了运动状态的变化;当干扰去掉之后,弹箭能够自身恢复到既定运动状态的能力。对无控火箭弹,保证飞行稳定性的基本条件,就是要求把弹轴与速度矢量之间的夹角(即攻角)数值,限制在额定范围之内,以使弹轴在全弹道上能大致与速度方向一致。对导弹来说,其稳定性乃要求在其飞行过程中,大致沿既定的规律运动;如果外界扰动使其运动状态发生改变,那么导弹将具有迅速消除这一偏差的能力。外弹道学的任务就是具体建立保证飞行稳定性的条件,并寻求飞行不稳定的原因所在。这不仅需要借助外弹道学理论分析,而且需要必要的外弹道试验手段。

现代无控火箭的主要问题是散布较大,保证其飞行稳定性,是力求减小散布的一个必要条件。无控火箭弹保持飞行稳定性的方法,不外乎装设尾翼,或是高速旋转。前者为尾翼式,后者为涡轮式。弹体的气动外形布局,对飞行稳定性的影响很大,因此空气动力学与外弹道学的关系是非常密切的。为了减少散布,还必须在稳定性基础上具体研究各类扰动因素对运动状态的影响规律,从而合理地选取各设计参数。本书将用较大的篇幅研究无控火箭弹的散布理论。

对火箭的弹道计算,必须确定一定的条件,比如气象条件、地理条件及弹道条件(依赖于火箭的参数)。目前弹道计算多是采用电子计算机进行,这样就可以得到准确的结果。然而,近似的解析计算便于分析各种因素间的相互关系,在做估算时比较方便,其重要性也是不可忽视的。就导弹弹道学而言,解析分析法是寻求最优控制弹道的主要手段之一。

综合上述,火箭外弹道学担负的主要任务为:

——根据已知的数据计算弹道,或根据给定的战术技术要求决定弹箭的弹道特性,寻求最佳弹道设计方案;





- 研究飞行稳定性;
- 计算散布,寻求减小散布的途径;
- 研究一些专门课题,如射表编制。

本书的第一章到第四章,对火箭弹道进行了具体计算,它涉及到各类无控火箭弹和增程弹,其中椭圆理论用于远程弹道。在弹道计算时,将火箭弹道区分为三个阶段:

滑轨段——指火箭后定心部脱离滑轨端点之前的运动过程,其中前定心部脱离滑轨端点之前的运动叫约束期,接着就是半约束期;

主动段——后定心部脱离滑轨端点到发动机停止工作之间的飞行过程;

被动段——主动段结束后的飞行过程。

在一定基本假设下,火箭质心运动的轨迹将是一条平面曲线,如图 0.1 所示。

在弹道计算中常用到下列术语和符号:

弹道——质心运动的轨迹;

射出点——后定心部脱离滑轨端点时的质心位置,以  $O$  表示(图 0.1 中未标出);

弹道起点——火箭启动前在滑轨上的质心位置,以  $o$  表示;

初速——射出点的质心速度,以  $v_0$  表示;

射击面——过滑轨轴线的铅直面,以  $xoy$  表示,  $ox$  轴与水平面平行,指向前方,  $oy$  轴铅直向上,  $o$  为弹道起点;

弹道起点水平面——通过弹道起点的水平面,以  $xoz$  表示,其中  $oz$  轴依右手定则确定;

地面坐标系——固连于地面的坐标系,以  $o-xyz$  表示,弹道起点  $o$  为坐标原点;

主动段终点——发动机停止工作时的质心位置,以  $K$  表示;

弹道顶点——弹道最高点,以  $S$  表示;

弹道落点——弹体自射出点飞出后质心轨迹再与弹道起点水平面的交点,以  $C$  表示;

升弧段——从  $o$  到  $S$  点的一段弹道;

降弧段——从  $S$  到  $C$  点的一段弹道;

弹道诸元——表示某一时刻火箭在空中的质心坐标及质心速度大小与方向的诸参量,时间以  $t$  表示,质心坐标以  $(x, y, z)$  表示,速度大小以  $v$  表示,速度矢量与水平面之间的夹角即弹道切线倾角以  $\theta$  表示,如表 0.1 所示。

第五、六章为自动瞄准弹和遥控弹弹道学,对几种主要导引关系作了运动学分析。这两章内容具有相对的独立性,它们基本上不依赖于其他章节的知识。第七章是尾翼式火箭弹摆动理论,这是研究绕心运动的入门,是以后研究其他类型火箭弹散布理论的基础。第八章为火箭运动建立了一般性微分方程组,以便适用于电子计算机计算。同时,其简化的扰动运动方程组,将

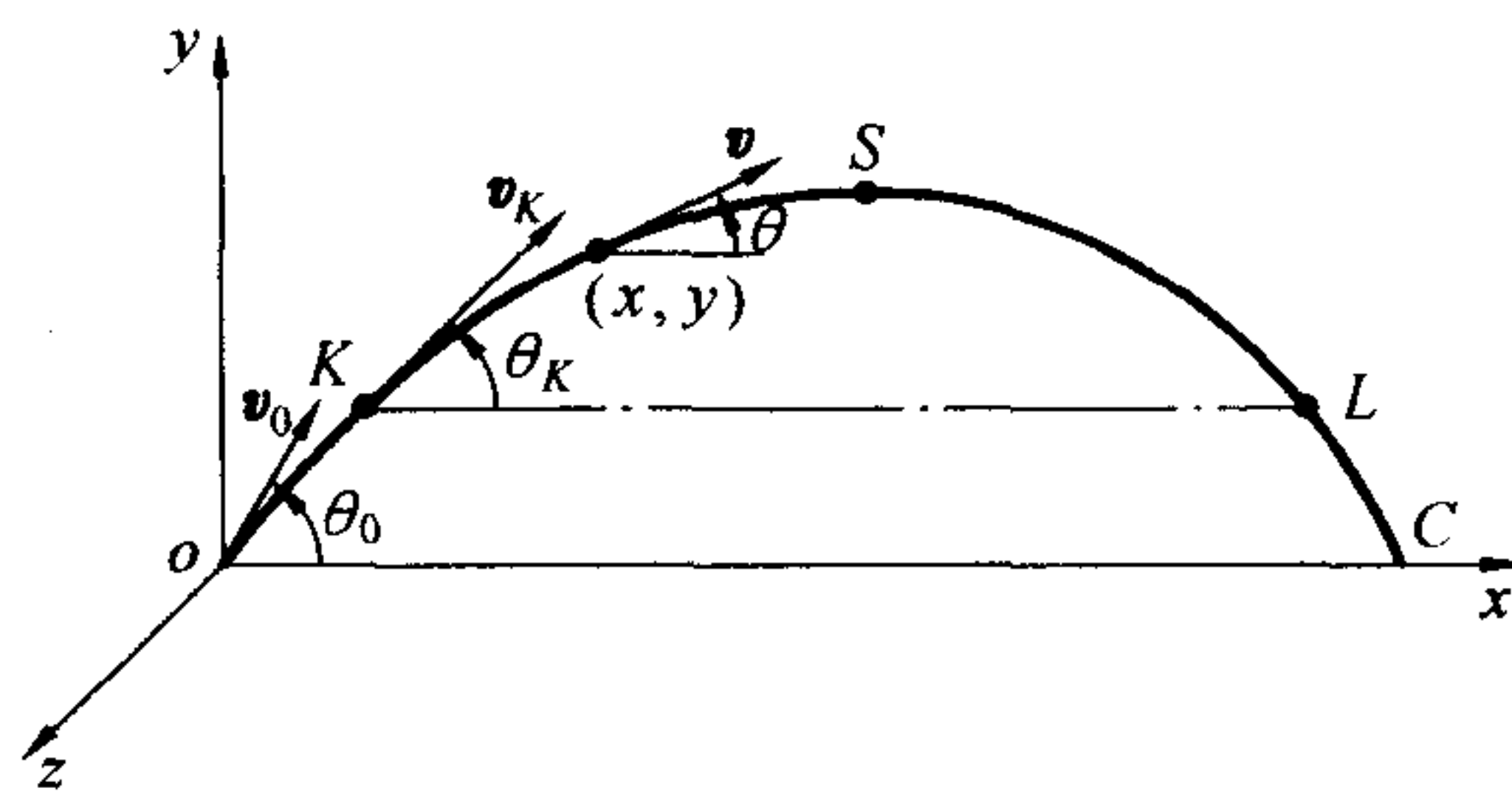


图 0.1 火箭弹道





适用于各类火箭绕心运动的解析分析。第九、十、十一、十二章研究了尾翼式旋转火箭弹、涡轮式火箭弹和火箭增程弹的绕心运动规律,并进行散布计算与散布分析。其中第十一章专门介绍了起始扰动的计算问题。第十三章讨论了无控火箭弹的运动稳定性并建立了保证运动稳定性的条件。第十四、十五章为有控弹建立了一般性的运动方程组,并研究了飞行稳定性和操纵性。第十六章介绍了现代最优化理论。这三章内容又具有相对独立性。第十七章介绍了无控火箭弹道修正量和射表编制原则。

本书一律采用国家法定计量单位制。

表 0.1 弹道上任意点与主要点的弹道诸元符号表

质心位置	任 意 点	射 出 点 $O$	主动段终点 $K$	顶 点 $S$	落 点 $C$
坐 标	$x, y, z$	$x_0, y_0, z_0$	$x_K, y_K, z_K$	$x_S, Y, z_S$	$X, y_C = 0, Z$
速 度	$v$	$v_0$	$v_K$	$v_S$	$v_C$
倾 角	$\theta$	$\theta_0$	$\theta_K$	$\theta_S = 0$	$\theta_C$
飞 行 时 间	$t$	$t_0$	$t_K$	$t_S$	$T$

注:  $X$ ——射程;  $Y$ ——弹道顶点高;  $T$ ——全飞行时间;  $v_C$ ——落速;  $\theta_C$ ——落角。



# 第一章 火箭质心运动方程

## 1.1 质心运动惯性参考系

火箭作为一个力学对象,它在空中的运动属于刚体的一般运动。其运动可分为质心运动与围绕质心运动两大部分。针对火箭运动的特点,围绕质心运动对质心运动的影响是次要的。也就是说,对火箭的旋转运动考虑与否,对其前进运动不会带来很明显的差别。因此,根据在力学中所述“质点”的含义,在研究火箭质心运动时,就当作质点的运动来进行研究。

运用牛顿运动定律时,所采用参考系是惯性系。天体研究证明,如果选择一个以太阳为原点的参考系,以指向任一恒星的直线为坐标轴,则所观察到的无数天文现象与牛顿运动定律相符,这个参考系就可作为惯性系。凡相对于惯性系作匀速直线运动的参考系也是惯性系。由于地球中心相对于太阳的加速度很小,因而常把它作为惯性系的原点,其三轴指向宇宙中的恒星,这个不随地球自转的坐标系,就作为研究弹箭运动及其他机械运动的惯性系。

## 1.2 火箭质心运动矢量方程的一般形式

在理论力学中,“常质点系”所遵循的动量定理为

$$\frac{dQ}{dt} = F \quad (1.1)$$

式中  $Q$ ——质点系的总动量矢量;

$F$ ——作用于质点系的全部外力矢量之和;

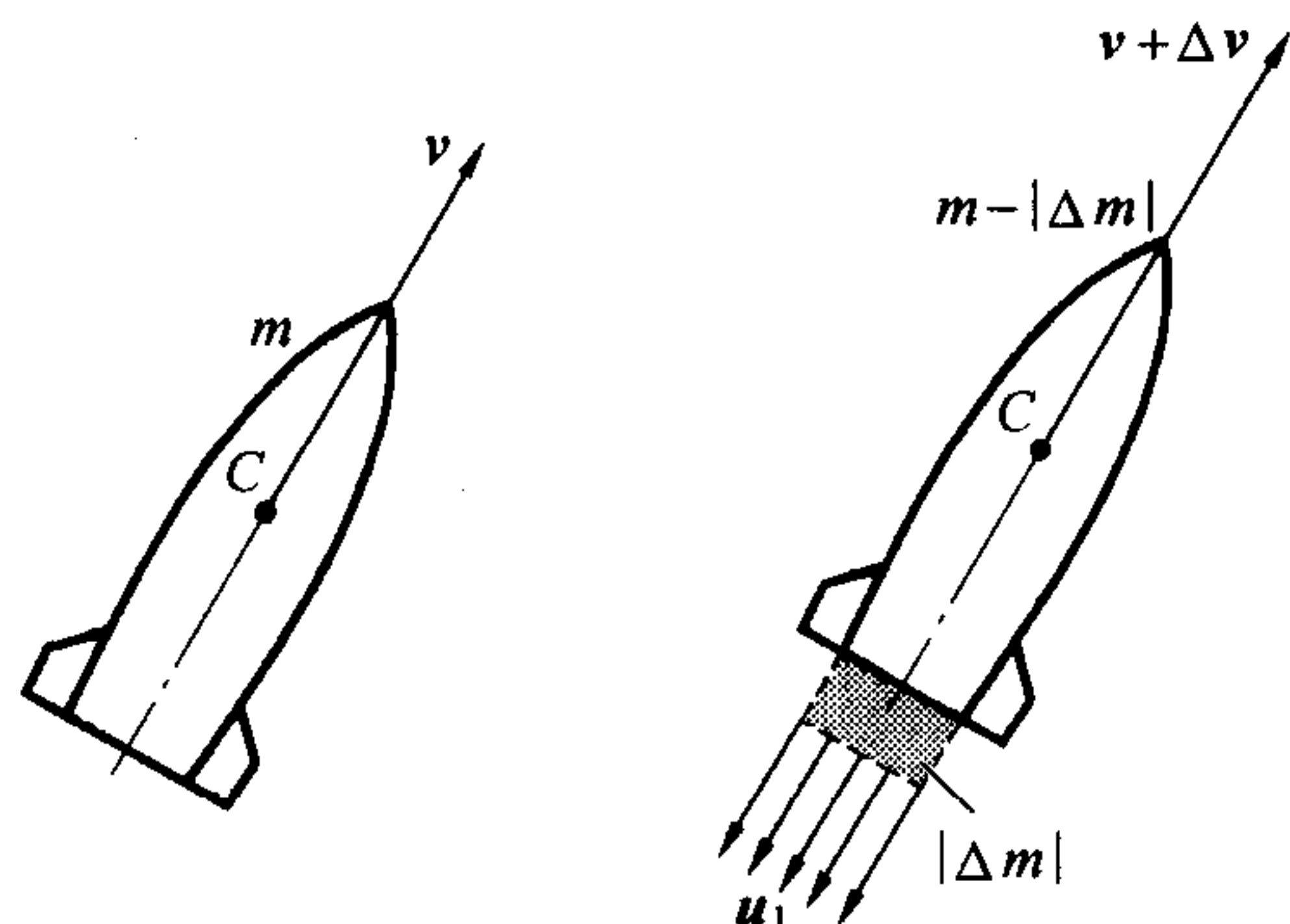
$t$ ——时间。

在火箭发动机的工作过程中,由于推进剂(火药)燃烧而产生的高温高压气体不断地向火箭体外喷射,因而火箭的质量随之不断减小。在这种条件下,对火箭的动量就不能直接应用式(1.1),但可选取一个定质点系。事实上,若以任意瞬时  $t$  的火箭体所包含的全部质点作为研究对象,则在此后很短的时间间隔  $\Delta t$  内,即使有一部分燃气质点喷出体外,这喷射出去的部分质点仍属于所研究的对象。这样,在  $\Delta t$  过程中,就能够运用式(1.1)了。

假设火箭体在瞬时  $t$  的质量为  $m$ ,火箭质心速度为  $v$ ,其质心用  $C$  表示,如图 1.1(a) 所示。

经过  $\Delta t$  后,即在  $(t + \Delta t)$  时,火箭已喷射出质量为  $|\Delta m|$  的燃气,其相对于火箭体的喷射速度为  $u_1$  (目前固体火箭发动机  $u_1$  的数值大于 2 000 m/s)。这样,在  $(t + \Delta t)$  时所研究的定质





(a)  $t$  瞬时火箭体 (b)  $(t + \Delta t)$  时质点系布局

图 1.1 发动机工作中的火箭

点系已分成了两部分,一部分是火箭体包含的质量为  $(m - |\Delta m|)$  的质点系,另一部分是质量为  $|\Delta m|$  的已喷出火箭体外的燃气。由于旋转对发动机工作的影响很小,故可不考虑火箭体的转动。经过  $\Delta t$  后,火箭质心速度改变了  $\Delta v$ ,因而  $(t + \Delta t)$  时的火箭质心速度为  $(v + \Delta v)$ 。在  $\Delta t$  内所喷出的火箭燃气的速度为  $(u_1 + v + \Delta v/2)$ <sup>①</sup>,那么  $(t + \Delta t)$  时的全部动量为

$$Q_{t+\Delta t} = (m - |\Delta m|)(v + \Delta v) + |\Delta m| (u_1 + v + \frac{\Delta v}{2})$$

而  $t$  时的动量为

$$Q_t = mv$$

于是得动量的增量为

$$Q_{t+\Delta t} - Q_t = m\Delta v + |\Delta m| u_1 - \frac{1}{2} |\Delta m| \Delta v$$

则

$$\frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_{t+\Delta t} - Q_t}{\Delta t} = m \frac{dv}{dt} + \left| \frac{dm}{dt} \right| u_1 \quad (1.2)$$

记

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad (1.3)$$

$$F_P' = -|\dot{m}| u_1 \quad (1.4)$$

再将式(1.2)代入式(1.1),使得火箭质心运动矢量方程式为

$$m \frac{dv}{dt} = F_P' + F \quad (1.5)$$

① 在  $t$  时喷出的气体质点速度为  $(u_1 + v)$ , 在  $(t + \Delta t)$  时喷出的气体质点速度为  $(u_1 + v + \Delta v)$ , 对  $|\Delta m|$  而言可取其平均值。





式中  $F_p'$  被称为喷气反作用力或动推力,它是由于燃气喷射而引起的对火箭的反作用力。由式(1.4)看出,  $F_p'$  之值取决于燃料的每秒质量流量  $|\dot{m}|$  及燃气相对于弹体的喷射速度  $u_1$ ;  $F_p'$  方向与喷射速度  $u_1$  相反。如果火箭弹具有多个喷管的结构布局,而且各喷管轴线也互不平行,那么火箭的总动推力则是各个喷管燃气喷射所产生诸动推力的合力。

由式(1.5)可看出,变质点系的火箭主动段质心运动方程在形式上与常质点系运动方程仅相差一个力  $F_p'$ ,故在建立变质点系质心运动方程时,只须把  $F_p'$  当做外力看待,就可直接引用牛顿第二定律了。

另外,在推导式(1.5)过程中忽略了某些次要因素。其一,由于发动机燃料的消耗,弹体内燃气相对火箭体不断移动着。由于这个移动速度的存在,加之弹体相对固定坐标系有旋转角速度,便产生一个柯里奥利力;其二,弹体内燃气的加速运动还产生惯性力。对大多数火箭而言,这些次要力的影响很小,可以略去。

### 1.3 推力及推力加速度

上节介绍了动推力,也就是喷气反作用力;除此之外,还有静推力。动推力和静推力合起来就是推力。在此,需要了解静推力是如何产生的。这有以下两方面的原因,如图 1.2 所示。在火箭发动机工作过程中,一方面由于在喷管出口端面处燃气压力为  $p_e$  (一般  $p_e$  有几个大气压力那么大),若以  $S_e$  表示喷管端面面积,那么对喷管端面垂直于弹轴的火箭而言,火箭将受到一个大小为  $p_e S_e$ ,方向沿弹轴向前的力的作用;另一方面,因大气不能进入喷管端面处,对火箭体外表面及喷管端面所包围的隔离体来说,大气压力  $p$  的合力已不为零,从而产生一个大小为  $p S_e$ ,且方向沿弹轴向后的力。显然,上述两个力比较起来,前者大于后者,故它们合成的结果,便是一个沿弹轴向前的力

$$S_e(p_e - p)$$

把这个静推力与式(1.4)所表示的动推力合起来,便得推力的表达式(标量形式)

$$F_p = |\dot{m}| u_1 + S_e(p_e - p) \quad (1.6)$$

或写成下式

$$F_p = |\dot{m}| u_{\text{eff}} \quad (1.7)$$

式中

$$u_{\text{eff}} = u_1 + \frac{S_e(p_e - p)}{|\dot{m}|} \quad (1.8)$$

$u_{\text{eff}}$  称为有效排气速度,可理解为若发动机的推力全部由动推力提供时,燃气在喷管出口端面所应具有的排气速度。不言而喻,  $u_{\text{eff}}$  的表达式将依赖于火箭喷管的结构。比如对涡轮式火

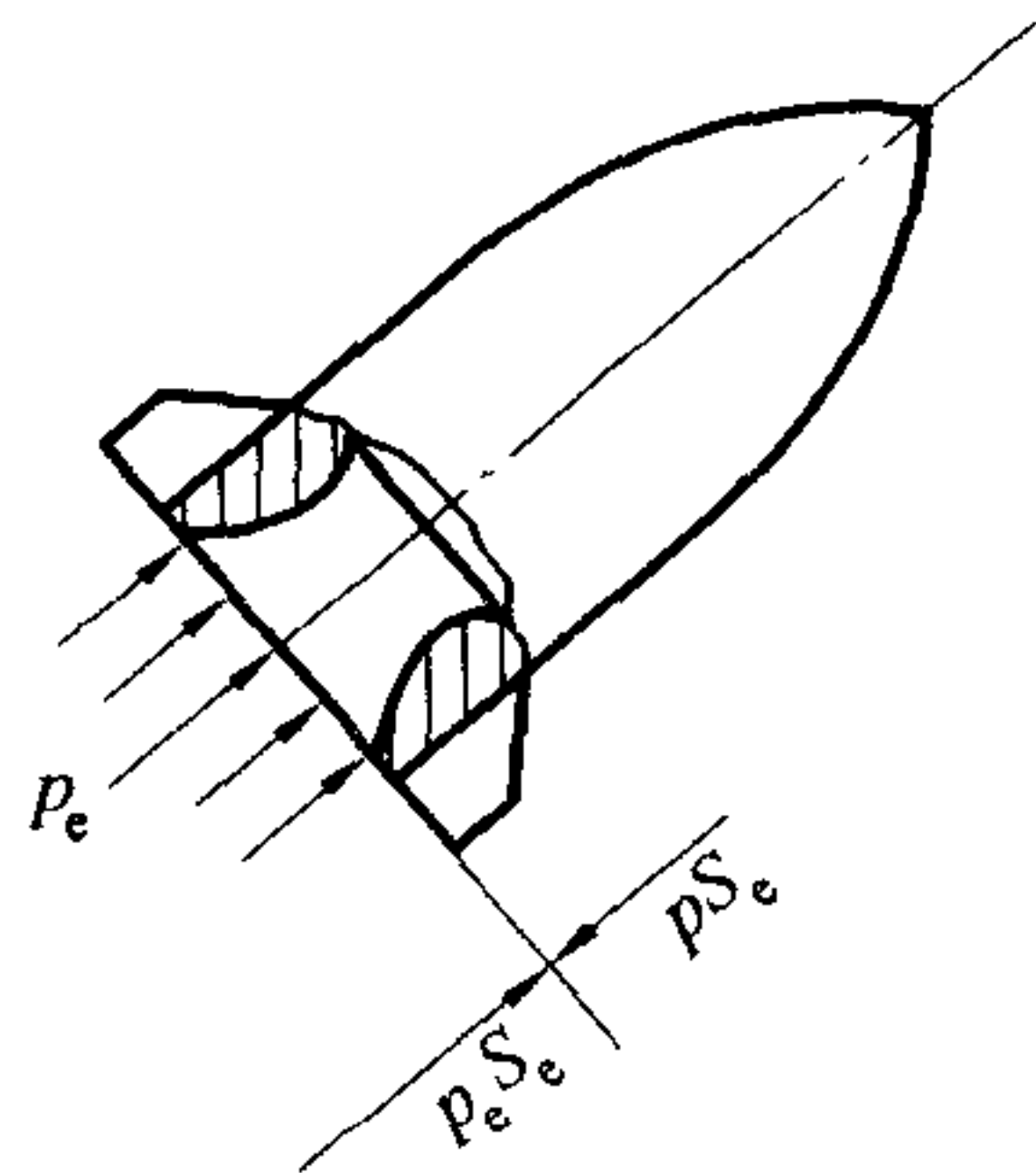


图 1.2 静推力的组成





箭弹,其  $u_{\text{eff}}$  表达式就与式(1.8)不同(这将在以后介绍,有兴趣的读者也可自行推导)。

因为  $u_1$  取决于推进剂性质及喷管形状,而与其他因素(比如燃烧室压力)无关;而  $p_e$  与  $|\dot{m}|$  的比值不随燃烧室内的压力变化,故在忽略次要量  $S_e p / |\dot{m}|$  的较小变化情况下,可把  $u_{\text{eff}}$  视为常量。

推力可以实验测定。将火箭置于推力试验台上,就能把发动机工作过程中的推力时间曲线  $F_P-t$  记录下来。由试验台上测出的推力,应换算成地面大气压力的标准值  $p_{\text{on}}$  下的推力  $F_{P_{\text{on}}}$ (这个  $p_{\text{on}}$  的具体数值将在炮兵标准气象条件中介绍)。于是

$$F_{P_{\text{on}}} = |\dot{m}| u_1 + S_e(p_e - p_{\text{on}}) \quad (1.9)$$

其典型的曲线如图 1.3 所示(图中  $t_P$  是发动机工作时间)。

根据推力曲线积分,得推力总冲量为

$$I_P = \int_0^{t_P} F_{P_{\text{on}}}(t) dt \quad (1.10)$$

将式(1.7)代入得

$$I_P = \int_0^{t_P} -\frac{dm}{dt} u_{\text{eff}} dt = u_{\text{eff}} \int_{m(0)}^{m(t_P)} -dm = u_{\text{eff}} [m(0) - m(t_P)]$$

式中的质量差,正是发动机的推进剂的质量  $m_P$ ,  $F_{P_{\text{on}}}(t)$  则

$$I_P = u_{\text{eff}} m_P \quad (1.11)$$

若用  $I_1$  表示比冲量,它是 1kg 推进剂所产生的冲量(Ns)与其所受重力(N)之比,则

$$I_P = I_1 m_P g \quad (1.12)$$

由式(1.11)和(1.12)便得

$$u_{\text{eff}} = I_1 g \quad (1.13)$$

因此,只要测出了比冲量  $I_1$ ,也就等于知道了有效排气速度。现今一般固体火药火箭的  $I_1$ ,其数量级为 200 s 以上,因而  $u_{\text{eff}}$  的数量大于 2 000 m/s;液体推进剂的  $I_1$  更大,可达 300 ~ 450 s。具体数值依不同火箭而异,不可混用。

为了表示推力对火箭质心运动影响的程度,引用推力加速度这一物理量。它是推力与火箭质量之比,以  $a_P$  表示,即

$$a_P = \frac{F_P}{m}$$

将式(1.7)代入则

$$a_P = \frac{|\dot{m}|}{m} u_{\text{eff}} \quad (1.14)$$

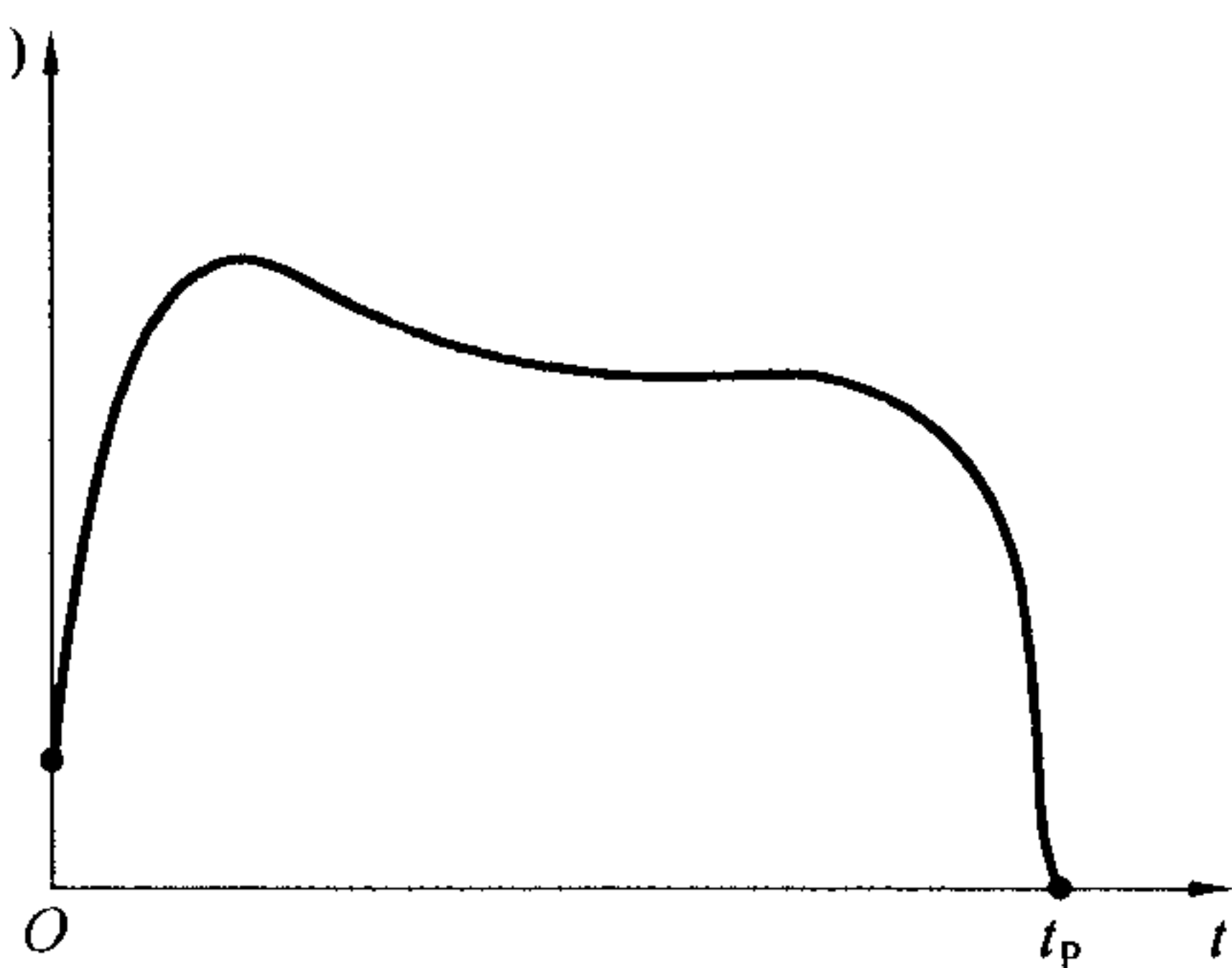


图 1.3 推力 - 时间曲线





式中  $\dot{m}$ ——弹质量变化率,可表示为  $|\dot{m}| = q(t)$ 。

式(1.14)一般用于近似计算。若在精确计算中考虑到不同飞行高度处的大气压力的不同,则应把  $u_{\text{eff}}$  中的  $p$  作为高度  $y$  的函数。

## 1.4 重力及重力加速度

在地球上的一切物体,均随地球一起不断地旋转。火箭也不例外,它除了受到地球引力作用外,还受到因地球旋转所引起的离心惯性力的作用。引力和离心惯性力的合力,就是重力,如图 1.4 所示。该图是北半球的一部分,图中  $G_1$  表示地球引力,  $F_E$  表示离心惯性力,于是重力  $G$  的矢量表达式为

$$G = G_1 + F_E \quad (1.15)$$

重力  $G$  的大小和方向与不同的地理位置有关。地球引力  $G_1$  是根据牛顿引力定律所确定的量,它与火箭到地心  $O_E$  的距离  $r$  的平方成反比;而离心惯性力则与火箭到地球极轴(南北两极的连线)的垂直距离有关。实际的地形是凸凹不平的,而且整个地球外形也不是一个规则的几何体。为了便于各种计算——如大地测量学、天文学和弹道学,就有必要采用比较规则的地球模型。现今常采用椭球模型和圆球模型。对两轴椭球体来说,其两轴长度分别为

长半轴(赤道平均半径) = 6 378 245 m

短半轴(极半径) = 6 356 863 m

若采用圆球模型,主要的地球常数是地球半径。它可以按照不同方式来确定。如按体积来讲,具有和椭球体同样体积的球体半径等于 6 371 110 m。此值通常作为地球的平均半径,以  $r_E$  表示。

重力的方向与悬垂线的方向一致,即在所研究点上,水平面的垂线与地球体表面的法线一致。表面的法线( $n$ )和地球赤道面之间的夹角称为地理纬度,以  $\Lambda$  表示。它与地心纬度  $\Lambda_1$  是有差别的,但差别不大,它们之间的关系近似式确定为

$$\Lambda_1 \approx \Lambda - 11'30'' \sin 2\Lambda \quad (1.16)$$

可见在北纬  $45^\circ$  时,  $(\Lambda - \Lambda_1)$  的最大值等于  $11'30''$  (显然,图 1.4 中的  $\Lambda$  是夸大了的)。

这样,只要知道了地理纬度(或地心纬度),重力及其相应的重力加速度  $g$  便被确定。由式(1.15),  $g$  与引力所对应的引力加速度  $g_1$  有如下关系

$$g = g_1 - \Omega_E \times (\Omega_E \times r) \quad (1.17)$$

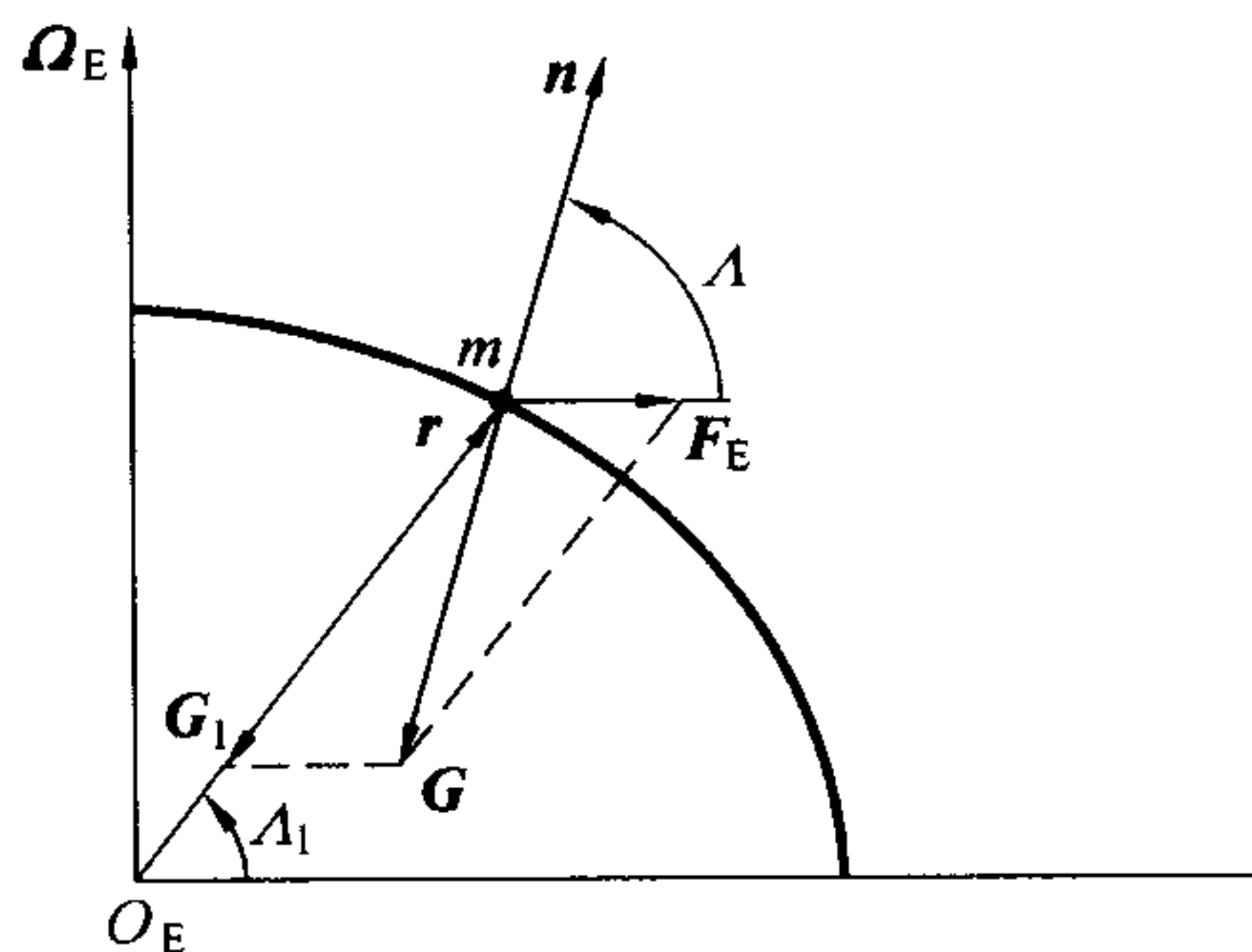


图 1.4 重力





式中  $\Omega_E$ ——地球自转角速度。

$r$ ——点的地心向径,即地心到火箭质心的矢量线。若火箭离地面高度为  $y$ ,取圆球模型时,向径长为

$$r = r_E + y \quad (1.18)$$

式(1.17)第二项之值要比  $g_1$  小得多,在地面上,其值为  $|\Omega_E \times (\Omega_E \times r_E)| = \Omega_E^2 r_E \cos \Delta_1$ 。地球自转一周的时间是 23 h 56 min 4 s,故旋转角速度为

$$\Omega_E = \frac{2\pi}{(23 \times 60 + 56) \times 60 + 4} \text{rad/s} = 7.292 \times 10^{-5} \text{rad/s}$$

则  $|\Omega_E \times (\Omega_E \times r_E)|_{\max} = \Omega_E^2 r_E = (7.292 \times 10^{-5})^2 \times 6\,371\,110 \text{ m/s}^2 = 0.033\,9 \text{ m/s}^2$ 。这个值只有重力加速度的 1/289,故可认为  $g$  的方向与  $g_1$  基本上一致,数值也相差很小(为清楚起见,图 1.4 中夸大了  $F_E$ )。

计及地心纬度  $\Delta_1$  对重力加速度的影响,可采用地球表面(海平面)上计算重力加速度的简单公式<sup>[9]</sup>

$$g_0 = g'_0(1 + k_\Delta \sin^2 \Delta_1) \quad (1.19)$$

式中  $g'_0$ ——赤道( $\Delta_1 = 0$ )上的重力加速度,  $g'_0 = 9.780\,34 \text{ m/s}^2$ ;

$k_\Delta$ ——克列罗系数,  $k_\Delta = 5.280\,01 \times 10^{-3}$ 。

由该式算得  $\Delta_1$  于  $45^\circ 32' 33''$  海平面的重力加速度  $g_0$  为  $9.806\,65 \text{ m/s}^2$ <sup>①</sup>。此值最初于 1901 年被国际度量衡委员会(ICWM)采纳,一直作为国际计量检定业务中的标准重力加速度值。

为了计算弹道高度为  $y$  处的重力加速度  $g$ ,可采用平方反比公式

$$g = g_0 \left( \frac{r_0}{r_0 + y_g + y} \right)^2 \quad (1.20)$$

式中,  $y_g$  是弹道起点的海拔高度;  $r_0$  不是平均地球半径,而是在特定纬度上考虑了该纬度的离心加速度影响所取的有效地球半径。用于计算北纬  $45^\circ 32' 33''$  的  $g(y)$  值所采用的  $r_0$  为  $6\,356.766 \text{ km}$ 。在参考文献[52]中的重力加速度随高度变化的函数表,就是由式(1.20)算出的,其高度达到  $1\,000 \text{ km}$ 。

在我国进行弹道计算中,重力加速度地面标准值常取为  $g_{\text{on}} = 9.80 \text{ m/s}^2$ 。按式(1.19)进行反算,可得相应的地球纬度大约  $38^\circ$ ,这对于我国地理位置来说还是比较适中的。为了解析计算重力加速度随高度的变化规律,可根据平方反比公式算得与  $9.80 \text{ m/s}^2$  相应的有效地球半径为

$$r_{\text{on}} = \sqrt{\frac{9.806\,65}{9.80}} r_0 = 6\,358.922 \text{ km}$$

可用  $r_{\text{on}}$  和  $g_{\text{on}}$  替代式(1.20)中的  $r_0$  和  $g_0$ ,即得与  $g_{\text{on}}$  相应的  $g(y)$ 。计算表明,若  $y = 32 \text{ km}$ ,取  $y_g = 0$  时,  $g$  仅减小地面值的 1%,因此对射程仅几十千米的近程弹道,可取  $g$  值为常量。

① 1901 年时认为该值对应的纬度是  $45^\circ$ ,但后来证实更精确的纬度应该是  $45^\circ 32' 33''$ ;按式(1.19)应是地心纬度。





## 1.5 标准大气和炮兵标准气象条件

地球周围的空气层称为大气。随着距地面高度的增加,空气越趋稀薄。在 5 km 高度范围内,含有将近全部空气质量的 50%;在 20 km 高度范围内,含有将近全部空气质量的 90%。在 30 km 高度上,空气已很稀薄,其密度只有地面值的 1.5%。因此,在弹道近似计算中,常将 30 km 以上的空间视为真空。

影响火箭运动的大气参量有气温、气压、密度、声速以及粘性系数等物理量,这些参量随着时间和空间在不断变化。为了进行弹道计算及其他需要,对气象条件要标准化,即对气温、气压等参量随高度的变化规律采取某种合适的确定函数。

接近地面的大气层,由于地球表面吸收了大量的太阳热能,同时又把热能向空中幅射,故使下层空气受热上升、膨胀,并逐渐冷却;上层较冷的空气下降、压缩而受热,使空气不断上下对流。靠近地表上下对流的空气层,叫做对流层。对流层高度与季节有关,夏季增高,冬季降低。不同纬度处的高度也不一样,在两极约为 8 km,赤道处约为 17 km,中纬度  $\Delta = 45^\circ$  附近约为 10~12 km。对流层包含了全部大气质量的 75% 和水蒸气的主要部分。天气现象是在对流层形成的,其特点是气温随高度的增加而下降较快。

对流层以上是平流层,中纬度的上层为 51 km,总厚度为 40 km。其中高度 20 km 到 47 km 的范围内温度是上升的。平流层以上是中层,层顶高度约为 80~90 km,中纬度平均高度为 86 km。该层温度随高度增加而下降,其状态与对流层有些类似。中层也称为散逸层。

在以上三层内,大气是若干种气体成分均匀的混合物,并假定气体处于流体静力学平衡状态,而且水平成层分布。气压微分  $dp$  和几何高度的微分  $dy$  的关系是

$$dp = -g\rho dy \quad (1.21)$$

式中  $\rho$ ——空气密度(单位是  $\text{kg}/\text{m}^3$ )。

式(1.21) 是大气铅直平衡方程,即厚度为  $dy$ 、底面积为一个单位的水平空气层所受到的重力与作用在空气层上、下面的压力差  $dp$  相平衡。

在中层以上是电离层。由于气体在太阳紫外线辐射作用下将要分解,并处于原子状态,空气成分将随高度变化,1 mol 空气的质量随高度增加而递减。由于各种气体的扩散和垂直输送,因而大气流体静力学平衡遭到破坏。电离层内的温度随  $y$  增加而上升,并趋于外层温度  $T_\infty$ 。 $T_\infty$  是在  $y \geq 120$  km、温度随指数上升时的渐近值;相应于太阳黑子活动的平均情况  $T_\infty = 1\,000$  K。

所谓标准大气,就是能够粗略地反映出周年、中纬度状况下假定的大气温度、气压和密度的垂直分布。它的典型用途是作为压力高度计校准、飞行器性能计算和气象制图的基准。经我国国家标准总局批准,在建立我国标准大气之前,可使用 1976 年美国标准大气。该标准在 32 km 以下和 1964 年国际民用航空组织(ICAO)标准大气相同;在 50 km 以下,和国际标准化组





织(ISO)的标准相同。在具体介绍该标准之前,先简介一下气温、气压及密度等主要大气参量之间的关系。

把干燥空气作为理想气体,在大气中任一点的压力  $p$ ,热力学温度  $T$  和总的密度  $\rho$ ,满足理想气体状态方程,其形式之一是

$$p = \frac{\rho RT}{M} \quad (1.22)$$

式中  $R$ ——摩尔气体常数,或称为普适气体恒量,  $R = 8.314\,351 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$ ;

$M$ ——摩尔质量,即  $1 \text{ kmol}$  气体的质量,数值等于相对分子质量,单位是  $\text{kg}/\text{kmol}$ 。在高度  $86 \text{ km}$  以下,大气是均匀混合物,扩散和光化学过程对  $M$  的影响可略而不计,  $M$  被视为常量,取其海平面值  $M_0$ ,等于  $28.964\,4 \text{ kg}/\text{kmol}$ ;

$T$ ——热力学温度,它与摄氏温度  $t$  的关系为

$$T = t + T_0, T_0 \stackrel{\text{def}}{=} 273.15 \text{ K} \quad (1.23)$$

将式(1.22)代入式(1.21)得

$$\frac{dp}{p} = - \frac{Mg}{RT} dy \quad (1.24)$$

可见,只要知道了温度  $T$  随高度的变化规律,那么气压  $p$  随高度的变化规律便也确定;再由式(1.22)进而确定密度随高度的变化规律。这样,问题的关键就是要首先确定标准温度分布。

根据大量探测和分析,在高度  $86 \text{ km}$  的范围内,大气分为七层,每层中的分子标度温度  $T_M$  和位势高度  $h$  之间构成线性函数关系,即<sup>[52]</sup>

$$T_M = T_{M,b} + L_{M,b}(h - h_b) \quad (1.25)$$

式中,  $T_M$  是  $T$  与比值  $M_0/M$  之积,即

$$T_M = T \frac{M_0}{M} \quad (1.26)$$

位势高度定义为

$$h = \frac{1}{g_0} \int_0^y g dy \quad (1.27)$$

它表示单位质量在实际重力场中,上升高度  $y$  所增加的势能,与通过区域的重力加速度全是  $g_0$ ,增加同样大小的势能所需上升的高度。将式(1.20)代入积分得

$$h = \frac{r_0 y}{r_0 + y} \quad (1.28)$$

可见  $h$  总小于  $y$ ,当  $y$  不太大时,二者相差甚微。式(1.25)脚注  $b$  的取值从 0 到 6,分子标度温度  $T_{M,b}$  及梯度  $L_{M,b}$  值列于表 1.1 中。

对于  $y$  从  $86 \text{ km}$  到  $1\,000 \text{ km}$  的整个高度范围内分为四层,其中:

(1)  $y = 86 \sim 91 \text{ km}$ ,是等温层,  $T = T_7 = 186.867\,3 \text{ K}$ ;





(2)  $y = 91 \sim 110 \text{ km}$ ,  $T(y)$  具有椭圆形式, 且

表 1.1 86 km 范围内温度-高度廓线图上各段的参考高度和梯度

脚 注	位势高度 $h_b/\text{km}$	分子标度温度梯度 $L_{M,b}/(\text{K} \cdot \text{km}^{-1})$	分子标度温度 $T_{M,b}/\text{K}$
0	0	-6.5	288.15
1	11	0.0	216.65
2	20	+1.0	216.65
3	32	+2.8	228.65
4	47	0.0	270.65
5	51	-2.8	270.65
6	71	-2.0	214.65
7	84.8520 <sup>①</sup>		

① 相应的  $y = 86 \text{ km}$

$$T = T_C + A_1 \left[ 1 - \left( \frac{y - y_8}{k_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

式中  $y_8 = 91 \text{ km}$ ,  $T_C = 263.1905 \text{ K}$ ,  $A_1 = -76.3232 \text{ K}$ ,  $k_1 = -19.9429 \text{ km}$ ;

(3)  $y = 110 \sim 120 \text{ km}$ ,  $T(y)$  是线性函数, 且

$$T = T_9 + L_{k,9}(y - y_9)$$

式中  $T_9 = 240 \text{ K}$ ,  $L_{k,9} = 12 \text{ K/km}$ ,  $y_9 = 110 \text{ km}$ ;

(4)  $y = 120 \sim 1000 \text{ km}$ ,  $T(y)$  具有指数形式

$$T = T_\infty - (T_\infty - T_{10}) \exp(-\lambda \xi)$$

式中  $T_{10} = 360 \text{ K}$ ,  $T_\infty = 1000 \text{ K}$ ,  $\lambda = \frac{L_{k,9}}{(T_\infty - T_{10})} = 0.01875$ ,  $\xi = \frac{(y - y_{10})(r_0 + y_{10})}{r_0 + y}$ ,  $y_{10} = 120 \text{ km}$ 。

图 1.5 给出了  $T$  随  $y$  从 0 到 1000 km 高度范围内的变化曲线。

为了积分得到气压  $p$ , 将式(1.27) 微分得知  $g_0 \cdot dh = g \cdot dy$ , 并与式(1.26) 一并代入式(1.24) 得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{R_1} \frac{dh}{T_M}$$

式中  $R_1 = \frac{R}{g_0 M_0} = \frac{8.31432 \times 10^3}{9.80665 \times 28.9644} (\text{m/K}) = 29.2713 \text{ m/K}$ , 称  $R_1$  为大气常数。

于是

$$p = p_b \exp \left( -\frac{1}{R_1} \int_{h_b}^h \frac{dh}{T_M} \right) \quad (1.29)$$

再利用式(1.22), 即可得到密度公式。声速  $c_s$  可用下式求出





$$c_s = \sqrt{\frac{\kappa R}{M_0} T_M} \quad (1.30)$$

式中,  $\kappa$  是空气的比定压热容与比定容热容之比, 叫做绝热指数或比热比, 取值为 1.400。

空气动力还与雷诺数  $Re$  有关,  $Re$  依赖于空气黏性系数  $\eta$ , 它是两层气体间单位面积上摩擦应力(切应力)与两层间的速度梯度之比, 又称为动力黏度或黏度。各种气体的黏度  $\eta$  可用 Sutherland 公式计算, 即

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}$$

式中  $T_s$ ——Sutherland 常数,  $T_0 = 273.15 \text{ K}$ ;

$\eta_0$ ——101.325 kPa(1 atm) 下,  $0^\circ\text{C}$  时气体的黏度。

对空气  $T_s = 110.4 \text{ K}$ ,  $\eta_0 = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ , 于是得空气的黏度公式为

$$\eta = \beta_a \frac{T^{\frac{3}{2}}}{T + T_s} \quad (1.31)$$

式中  $\beta_a = 1.458 \times 10^{-6} \text{ kg}/(\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{\frac{1}{2}})$

大气地面值(在海平面, 地理纬度为  $45^\circ 32' 33''$ ) 确定为: 气压  $p_0 = 101.325 \text{ kPa}(1\text{atm})$ ; 气温  $T_0 = 288.15 \text{ K}(t = 15^\circ\text{C})$ ; 密度  $\rho_0 = 1.2250 \text{ kg}/\text{m}^3$ ; 空气相对分子质量  $M_0 = 28.9644$ ; 声速  $c_{s0} = 340.294 \text{ m/s}$ 。

以上所述美国 1976 年标准大气没有具体计及空气的湿度; 实际上, 水蒸气对大气状态是有影响的。假定气压为  $p$  的潮湿空气中, 水蒸气的分压为  $p_v$ , 则干燥空气的分压为  $(p - p_v)$ , 由式(1.22) 分别求出它们的密度为

$$\rho_1 = M \frac{p - p_v}{RT}, \quad \rho_2 = M_v \frac{p_v}{RT}$$

式中  $M_v$ ——1 kmol 水蒸气的质量, 单位是  $\text{kg}/\text{kmol}$ , 数值等于水蒸气的相对分子质量 18.0153。

那么潮湿空气的密度为

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = M \frac{p}{RT} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{M_v}{M} \right) \frac{p_v}{p} \right]$$

而  $M_v/M = 18.0153/28.9644 \approx 5/8$ , 则

$$\rho = M \frac{p}{RT} \left( 1 - \frac{3}{8} \frac{p_v}{p} \right)$$

引进所谓虚拟温度(简称虚温)  $\tau$

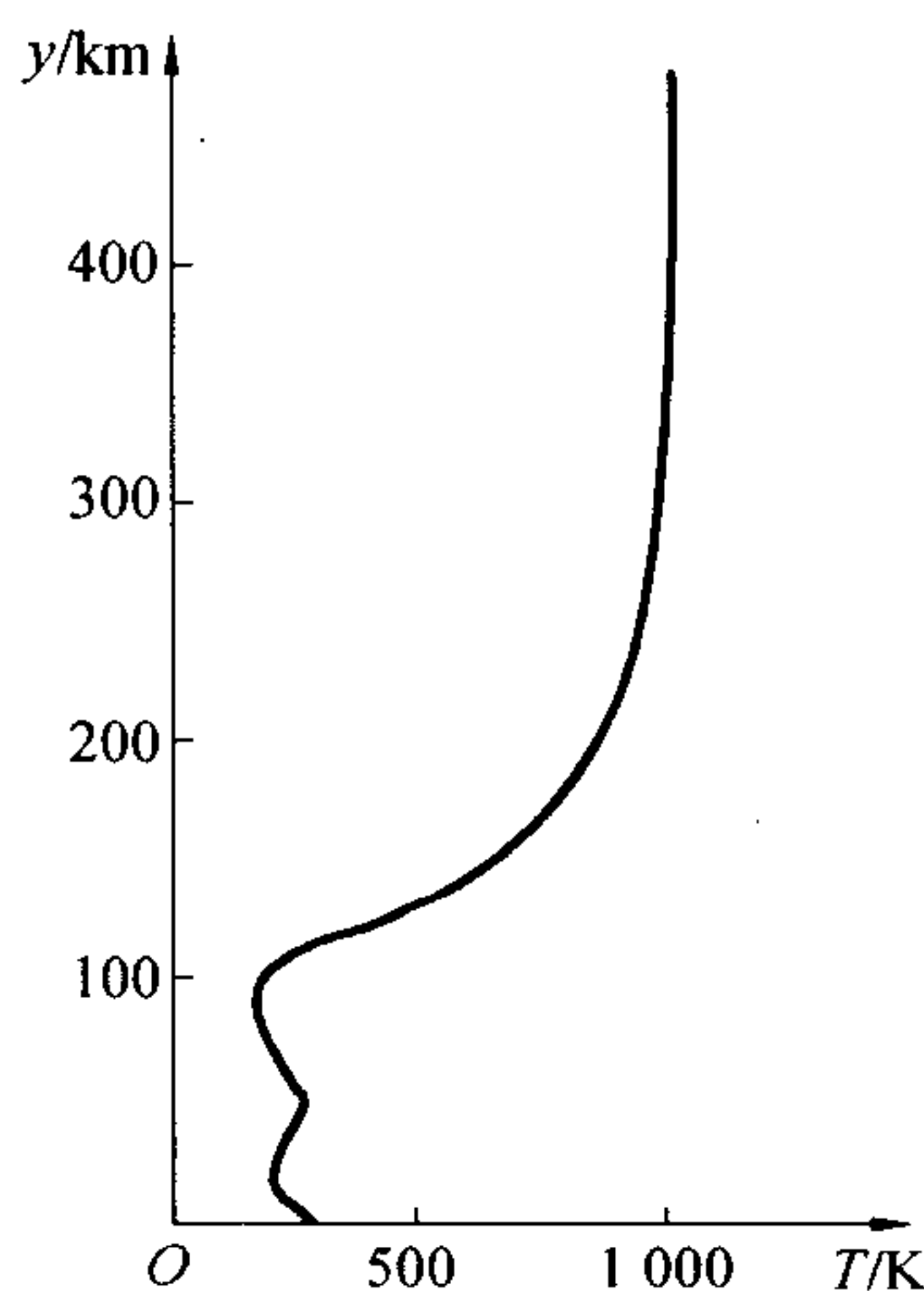


图 1.5  $T$ - $y$  曲线





$$\tau = \frac{T}{1 - \frac{3}{8} \frac{p_v}{p}} \quad (1.32)$$

以  $\tau$  代替实际湿空气的气温  $T$ , 那么湿空气的状态方程在形式上就与纯干空气的状态方程完全相同, 即

$$p = \frac{\rho R \tau}{M} \quad (1.33)$$

顺便指出, 虚温实际上是不存在的, 可以把它理解为在有水蒸气存在下对真实气温的修正值。以后在外弹道学中所指气温, 均系指虚温而言。

一般对几十千米射程的近程炮兵武器来说, 我国解放初期曾取如下标准气象条件, 地面标准值为:  $p_{on} = 99.9918 \text{ kPa} \approx 100 \text{ kPa}$ ;  $t_{on} = 15^\circ \text{C}$ ;  $p_{von} = 847 \text{ Pa}$  (相对湿度 50%)。据此代入式 (1.23)、(1.32)、(1.33) 算出  $\tau$  和  $\rho$  的地面标准值:  $\tau_{on} = 289.1^\circ \text{K}$ ;  $\rho_{on} = 1.20574 \text{ kg/m}^3$ 。至于气温随高度的分布, 采用解析函数形式标准化, 称为标准分布; 当地面值取标准值时, 按习惯称为标准定律, 如图 1.6 所示。

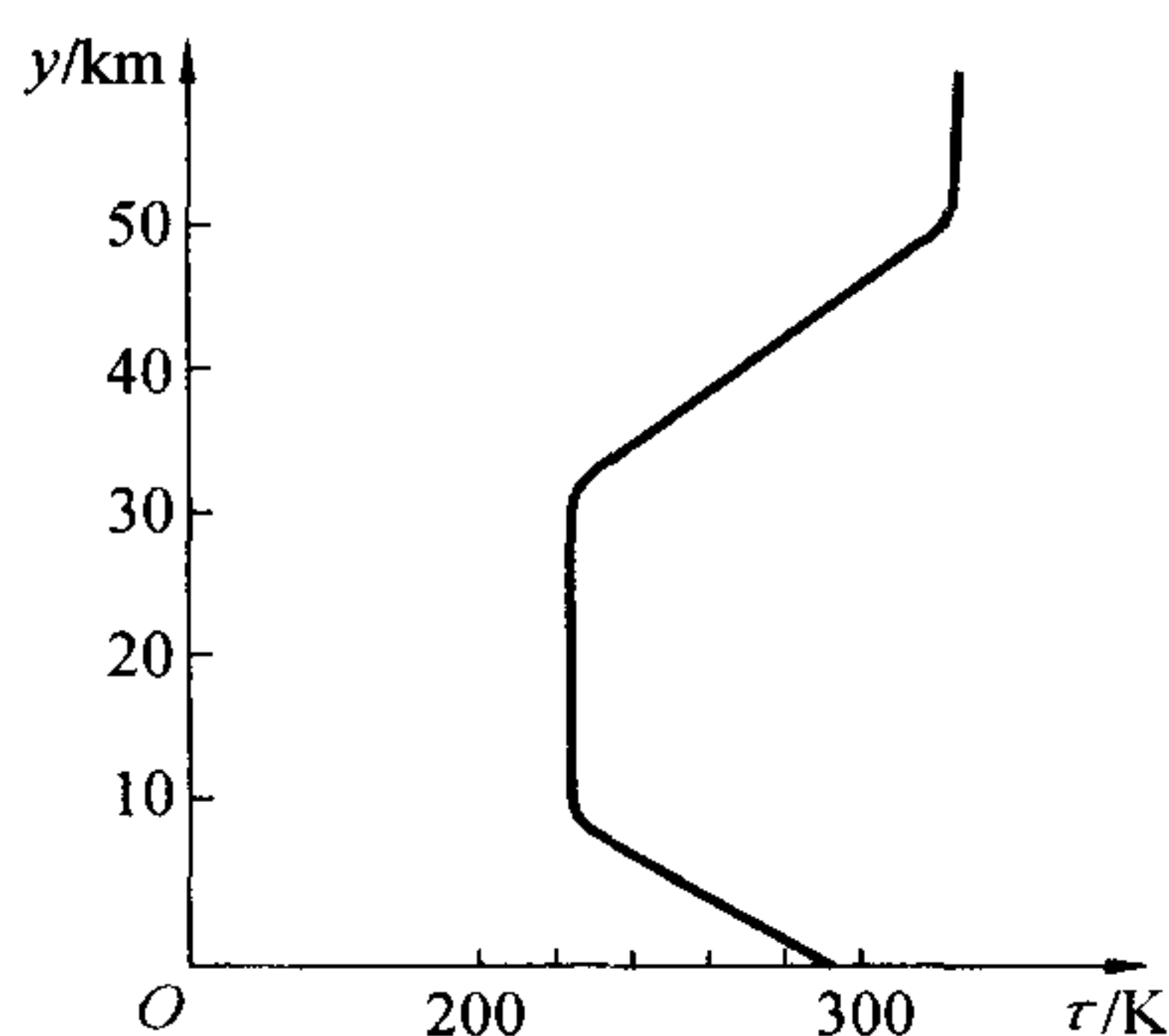


图 1.6 气温标准定律

$$y \leq 9300 \text{ m}, \tau = \tau_{on} - Gy;$$

$$y = 9300 \sim 12000 \text{ m}, \tau = A - B(y - 9300) + C(y - 9300)^2;$$

$$y = 12000 \sim 30000 \text{ m}, \tau = 221.5 \text{ K}$$

式中常数  $G = B = 6.328 \times 10^{-3} \text{ K/m}$ ,  $A = 230.0 \text{ K}$ ,  $C = 1.172 \times 10^{-6} \text{ K/m}^2$ 。

知道了  $p_{on}$ 、 $\tau_{on}$  和  $\tau$  随  $y$  变化的标准分布, 那么气压  $p$  随高度  $y$  变化的标准分布就相应确定, 通常用它们的相对值。参照式 (1.29) 得

$$\pi(y) = \frac{p}{p_{on}} = \exp\left(-\frac{1}{R_1} \int_0^y \frac{dy}{\tau}\right) \quad (1.34)$$

通常称  $\pi(y)$  为气压函数。值得注意的是, 式 (1.34) 中的  $R_1$  应与重力加速度  $9.80 \text{ m/s}^2$  匹配, 其值为

$$R_1 = \frac{R}{g_{on} M_o} = \frac{8.31432 \times 10^3}{9.80 \times 28.9644} (\text{m/K}) = 29.2911 \text{ m/K}$$

将式 (1.34) 代入式 (1.33) 得空气密度  $\rho$  的相对值

$$\frac{\rho}{\rho_{on}} = \frac{\tau_{on}}{\tau} \pi(y) \quad (1.35)$$

① 在国内以往的外弹道学书中取值  $288.9 \text{ K}$ , 这是因为  $T_{on}$  取了近似值  $288 \text{ K}$  之故。鉴于历史原因, 暂且仍保留  $\tau_{on} = 288.9 \text{ K}$ 。





此相对值是高度  $y$  的函数,记为

$$H(y) = \frac{\rho}{\rho_{0n}} \quad (1.36)$$

称  $H(y)$  为空气密度函数。 $\pi(y)$ 、 $H(y)$  随  $y$  的变化曲线示于图 1.7 中,在对弹道近似计算时, $H(y)$  往往采用下列经验公式

$$H(y) = \exp(-\beta' y) \quad (1.37)$$

式中,  $\beta' = 1.059 \times 10^{-4} \text{m}^{-1}$ 。当  $y$  在 10 km 以内时,可给出与  $H(y)$  的准确值较一致的结果。 $\tau(y)$ 、 $\pi(y)$ 、 $H(y)$  随高度  $y$  的变化值均已列成表格函数,见附表 1、2、3。

至于声速随高度的变化,由式(1.30)知

$$c_s = 20.046 8 \sqrt{\frac{\tau}{K}} \text{ m/s} \quad (1.38)$$

最后指出,在炮兵标准气象条件中,还有一条无风无雨的规定。此外,这些年来的气象观测表明,我国北纬  $35^\circ$  以下地区的对流层高度远大于 9 300 m,大致为 (15 ~ 16) km。对弹道高明显超过 9 300 m 的远程弹,采用以上炮兵标准气象条件,就会给弹道计算带来偏差,就有必要对该条件加以修改。

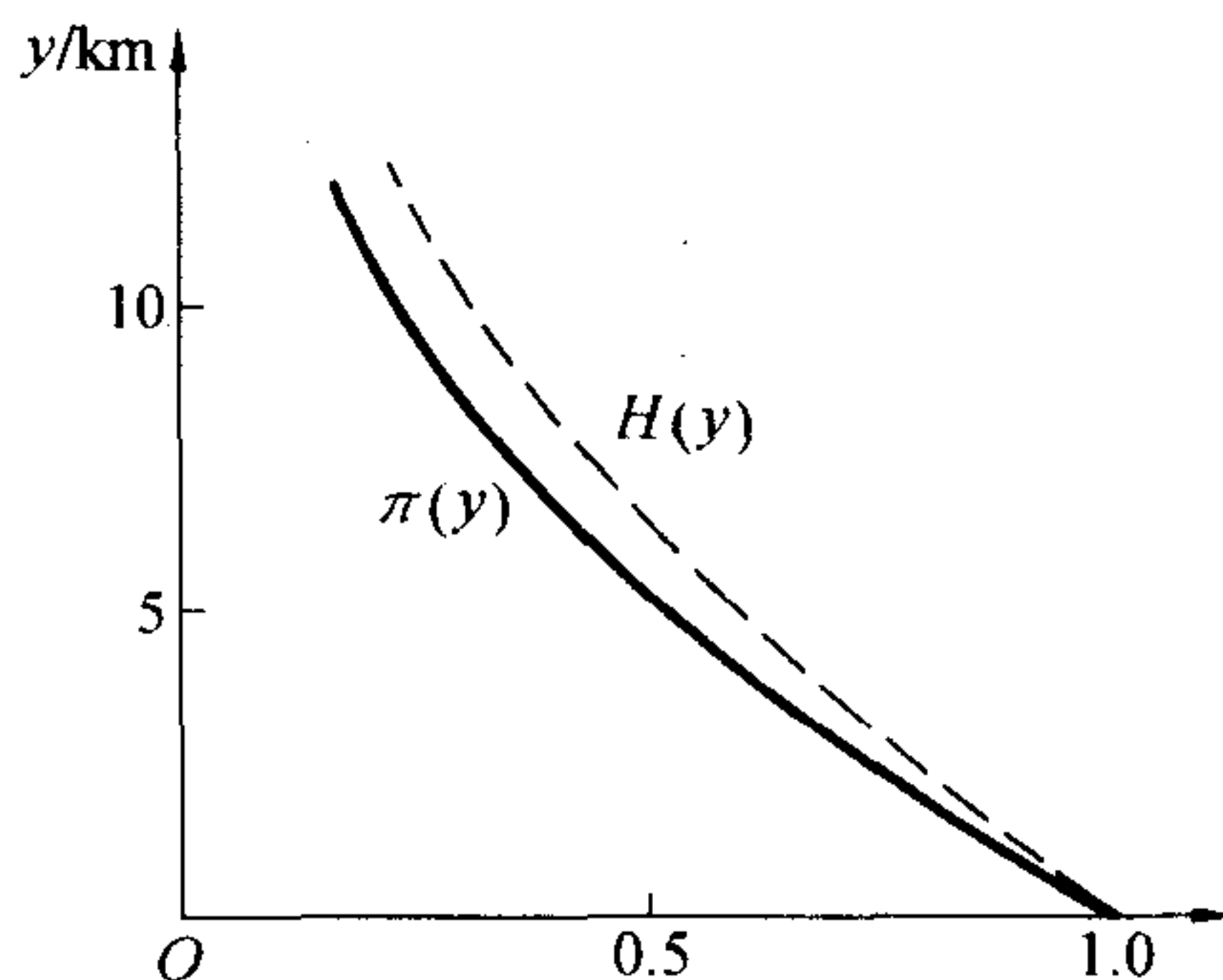


图 1.7  $\pi(y)$  和  $H(y)$  曲线

## 1.6 空气阻力及阻力加速度

### 1.6.1 空气阻力的一般表达式

现在研究火箭在飞行中所受到的空气阻力。在弹道计算中,通常假定弹轴与速度矢量线是重合的。空气动力学指出,火箭相对空气运动所产生的剩余压力之合力就是空气动力;在弹轴与速度  $v$  方向一致的情况下,就是空气阻力  $R_x$ 。 $R_x$  的一般表达式为

$$R_x = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_{x0} \left( \frac{v}{c_s} \right) \quad (1.39)$$

式中  $\rho$ ——空气密度;

$v$ ——火箭质心相对于空气的速度,  $\rho v^2/2$  被称为“速度头”或“动压”;

$S$ ——弹体最大横断面面积,  $S = \pi d^2/4$ ,  $d$  为弹径;

$\frac{v}{c_s}$ ——马赫数,以  $Ma$  记之,  $c_s$  是声速;

$C_{x0} \left( \frac{v}{c_s} \right)$ ——阻力系数,脚注“0”表示火箭几何纵轴与速度方向的夹角(即攻角)  $\delta$  为零。





由式(1.39)看出,阻力  $R_x$  除了与火箭相对于空气的相对速度  $v$  有关外,还取决于两方面因素,一是火箭自身的外形尺寸,另一是空气的性质。

### 1.6.2 阻力系数,弹形系数及阻力定律

目前对射程在几十千米以下的火箭弹,还广泛用到弹形系数这一概念。这里将说明这一概念的含义,以及与此有关的问题。

火箭及其他弹箭的外形对空气阻力有很大影响,但是表达式(1.39)却没有一个直接体现这种影响的物理量,这个影响是隐含在阻力系数  $C_{x0}$  中的。 $C_{x0}$  这个量,对某一种弹体而言,它主要随马赫数  $Ma(=v/c_s)$  变化。其变化规律及原因,可参阅有关空气动力学方面的著作。

为了查明弹形对阻力大小的影响,可取不同形状的弹体做实验,测出他们各自的  $C_{x0}-Ma$  曲线,由不同形状之弹体阻力系数曲线  $C_{x0}-Ma$  的差异,就可直接反映出弹形的影响。人们曾对无翼的旋转炮弹做了  $C_{x0}-Ma$  曲线的测定实验。图 1.8 中的两条不同弹形的  $C_{x0}-Ma$  曲线,其随  $Ma$  变化的规律大体上是相同的,但曲线高度不同。而且,只要两类弹形相差不太大,在同一马赫数处,其阻力系数比值,与另一马赫数下的比值是近似相等的,即

$$\frac{C_{x0I}(Ma_1)}{C_{x0II}(Ma_1)} \approx \frac{C_{x0I}(Ma_2)}{C_{x0II}(Ma_2)} \approx \dots \approx \text{const} \quad (1.40)$$

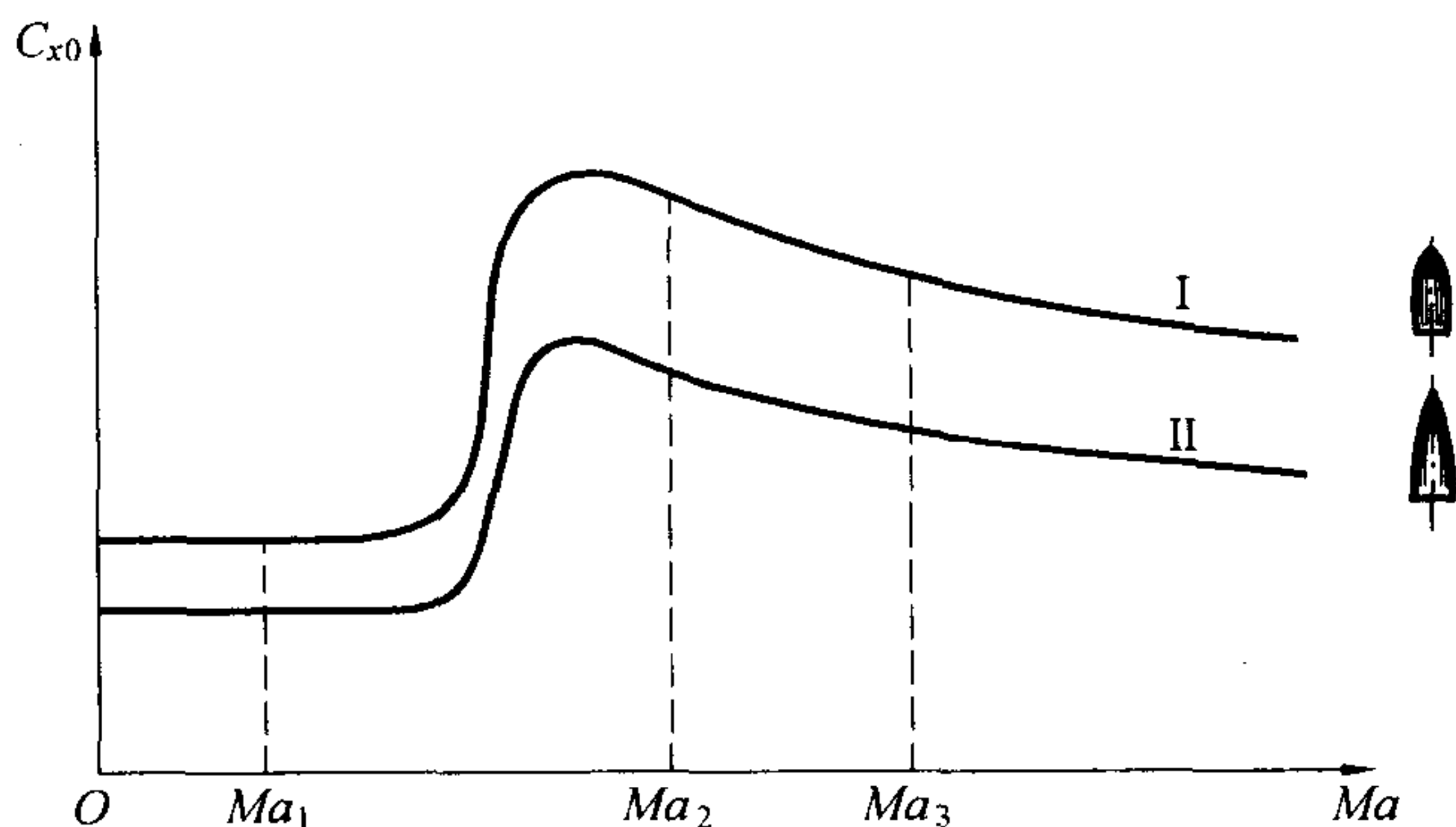


图 1.8  $C_{x0}-Ma$  曲线

根据不同形状弹体阻力系数的这一特性,就可以选取某一具有代表性的弹体(或是一组弹形相近的弹)作为标准弹,并仔细地测出其阻力系数曲线(如果是一组弹,则取平均值),以  $C_{xon}(Ma)$  记之,或简写成  $C_{xon}$ 。于是,对其他新设计的弹,只要与标准弹形相差不太大,其阻力系数  $C_{x0}$  与  $C_{xon}$  就存在下示关系

$$\frac{C_{x0}(Ma)}{C_{xon}(Ma)} = i(\text{const}) \quad (1.41)$$

比值  $i$  说明该弹体外形与标准弹的外形相差的程度,称之为弹形系数。因为对同一弹体来讲,





$C_{x0}$  是  $Ma$  的函数,而对不同外形的弹体来讲,在相同  $Ma$  下的  $C_{x0}$  为什么不相等了?这正是由于外形不同之故。

通常,人们把标准弹的  $C_{xon}-Ma$  曲线叫做阻力定律。早期有西亚切阻力定律,它用的标准弹是一组圆弧形弹头(所谓卵形弹头),其长度  $h_r$  为弹径  $d$  的  $1.2 \sim 1.5$  倍,如图 1.9 所示。后来,为适应速度较高的较细长弹形的需要,又选取一组弹头

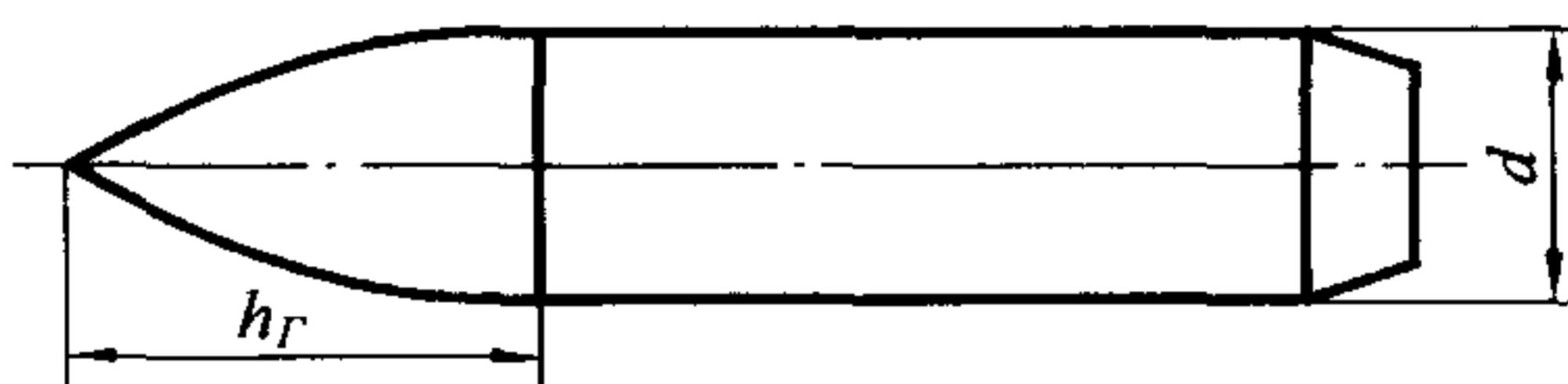


图 1.9 标准弹形示意图

长度  $h_r = (3 \sim 3.5)d$  的弹形,测出了  $C_{x0}-Ma$  曲线平均值,叫做 43 年空气阻力定律,见附表 5。现今旋转弹与 43 年空气阻力定律所用标准弹的外形较为接近,故用 43 年空气阻力定律时,弹形系数  $i_{43}$  大约为  $0.85 \sim 1.0$ ;而用西亚切定律时,则  $i_c$  的数量级为  $0.45 \sim 0.50$ 。

目前我国一般采用 43 年空气阻力定律,以后不做申明时,所论空气阻力定律都是指的 43 年空气阻力定律。

综合上述,可看到弹形系数  $i$  具有下述几个性质:(1) 它决定于弹箭本身的形状,而与弹径无关;(2) 决定于所取空气阻力定律,即是对给定的阻力定律说的。

对尾翼弹,目前还有用弹形系数这个概念的。有些尾翼弹的弹形与标准弹形相差较大,弹形系数将会是一个随马赫数  $Ma$  变化的量。如此一来,根据阻力系数  $C_{x0}$  的特性,只有在  $Ma < 0.7 \sim 0.8$  的情况下才能把  $i$  当成常数。但对超过这个速度范围的尾翼弹,在设计和靶场试验中,往往还是对全弹道取用某一适当的  $i$  值,这是在保证射程准确的前提下,而取的某一平均值。之所以抓住弹形系数这一概念不放,是因为它给弹道计算带来了很大方便。如果抛弃这个概念,则需准确确定实际的阻力系数,以使用数值积分法计算。在电子计算技术和空气动力学已具相当水平的今天,这是一种很现实的办法。

### 1.6.3 空气阻力加速度,弹道系数

空气阻力对弹箭运动的影响,不仅与空气阻力的大小有关,同时还与弹体质量  $m$  有关,就是说,由阻力引起的加速度大小来决定。设弹质量为  $m$ ,阻力加速度以  $a_x$  表示,则

$$a_x = \frac{R_x}{m}$$

将式(1.39)代入,并考虑到式(1.41)得

$$a_x = \frac{id^2}{m} 10^3 \times \frac{\rho}{\rho_{on}} \times \frac{10^{-3}\pi}{8} \rho_{on} v^2 C_{xon} \left( \frac{v}{c_s} \right)$$

上式用乘号“ $\times$ ”隔开的三部分,分别代表一个重要方面的因素对阻力加速度的影响。第二部分的  $\rho/\rho_{on}$  是空气密度函数  $H(y)$ ,已介绍过了。第一部分与弹形、弹径、弹体质量有关,记为

$$c = \frac{id^2}{m} \times 10^3 \quad (1.42)$$





它表征弹体本身特征的物理量,称为弹道系数。最后一部分表示为

$$F(v, c_s) = \frac{10^{-3}\pi}{8} \rho_{\text{on}} v^2 C_{x\text{on}} \left( \frac{v}{c_s} \right) \quad (1.43)$$

它表征弹箭的相对速度与空气阻力的关系,称阻力函数。于是,阻力加速度可表示为

$$a_x = cH(\gamma)F(v, c_s) \quad (1.44)$$

在  $a_x$  所依赖的三方面因素中,  $H(\gamma)$  是气象条件,无从减小;  $F(v, c_s)$  主要取决于速度  $v$ , 在既定的射程要求下,它也无从减小;惟有弹道系数  $c$  值是可以人为地作适当改变的量,它的大小,直接关系到  $a_x$  的大小,从而影响到弹道特性。就是说,在其他条件一定的情况下,比如将一发炮弹以一定射角和一定初速发射出去,  $c$  值越大,则受到的阻力加速度就越大,弹道就越弯曲,射程就越小;反之亦然。因此,弹道系数是影响弹道特性的一个物理量。如何减小它呢?从式(1.42)初看起来,似乎应减小弹径,但实际上却相反。这是因为  $d$  与  $m$  之间不是相互无关的量,  $m$  将以弹径  $d$  之三次方的正比关系而变化。就某一类型的弹种而言,大致存在下列关系

$$m = C_m d^3 \times 10^3 \quad (1.45)$$

$C_m$  称为弹体密度系数,在设计中习惯上用  $\text{kg}/\text{dm}^3$  作单位(其数值,如榴弹炮爆破榴弹为 10 ~ 12,穿甲弹就大些)。由此代入式(1.42),使得

$$c = \frac{i}{C_m d} \quad (1.46)$$

可见,弹道系数  $c$  与  $d$  成反比,而与弹形系数  $i$  成正比,故改善弹形,乃是设计者的重要任务之一。 $c$  的单位在运算及书写中通常省略。

至于  $c$  与弹径的关系,可给出一个数量级的概念,对大口径弹在 0.5 以下;对中口径弹在 1 左右;对小口径弹在 5 左右,特别对小口径枪弹可达 10 之多。

应该强调,在计算空气阻力加速度和进行弹道计算时,所用弹道系数、弹形系数、阻力定律及阻力函数,均必须是属于同一阻力定律的,决不可同时采取几种阻力定律混用。

#### 1.6.4 弹道上任意点加速度公式的另外形式

阻力加速度计算式(1.44)中的阻力函数  $F(v, c_s)$  是两个变量  $(v, c_s)$  的函数,计算起来不甚方便。最好将双变量函数变成由两个单变量函数的组合函数,再将单变量函数编成表格,计算起来就方便了。针对  $F(v, c_s)$  是可能的,由于  $C_{x\text{on}}$  是马赫数的函数,只要马赫数相同,  $C_{x\text{on}}$  的值就相等。为此,进行如下变量置换

$$\frac{v_\tau}{c_{\text{son}}} = \frac{v}{c_s} \quad (1.47)$$

式中,  $c_{\text{son}}$  是声速的地面标准值,  $c_{\text{son}} = 340.74 \text{ m/s}$ ;  $v_\tau$  是引进的一个新变量,是一个虚拟速度,则





$$v_\tau = v \frac{c_{son}}{c_s} = v \sqrt{\frac{\tau_{on}}{\tau}} \quad (1.48)$$

于是

$$v^2 = v_\tau^2 \frac{\tau}{\tau_{on}} \quad (1.49)$$

将式(1.47)和(1.49)代入式(1.43),得

$$F(v, c_s) = F(v_\tau) \frac{\tau}{\tau_{on}} \quad (1.50)$$

式中

$$F(v_\tau) = \frac{10^{-3}}{8} \pi \rho_{on} v_\tau^2 C_{xon} \left( \frac{v_\tau}{c_{son}} \right) \quad (1.51)$$

这样,  $F(v, c_s)$  就是两个单变量函数  $F(v_\tau)$  和  $\tau/\tau_{on}$  之积。 $F(v_\tau)$  也常叫做阻力函数, 已编成了函数表, 见附表6。 $F(v_\tau) - v_\tau$  曲线示于图 1.10 中(43 年阻力定律)。

于是阻力加速度  $a_x$  表示为

$$a_x = cH(\gamma) \frac{\tau}{\tau_{on}} F(v_\tau)$$

将式(1.35)、(1.36)代入,得

$$a_x = c\pi(\gamma) F(v_\tau) \quad (1.52)$$

在往后建立运动方程中, 需要用到一个函数  $G(v, c_s)$ , 它定义为

$$G(v, c_s) = \frac{1}{v} F(v, c_s) \quad (1.53)$$

则

$$a_x = cH(\gamma) G(v, c_s) v$$

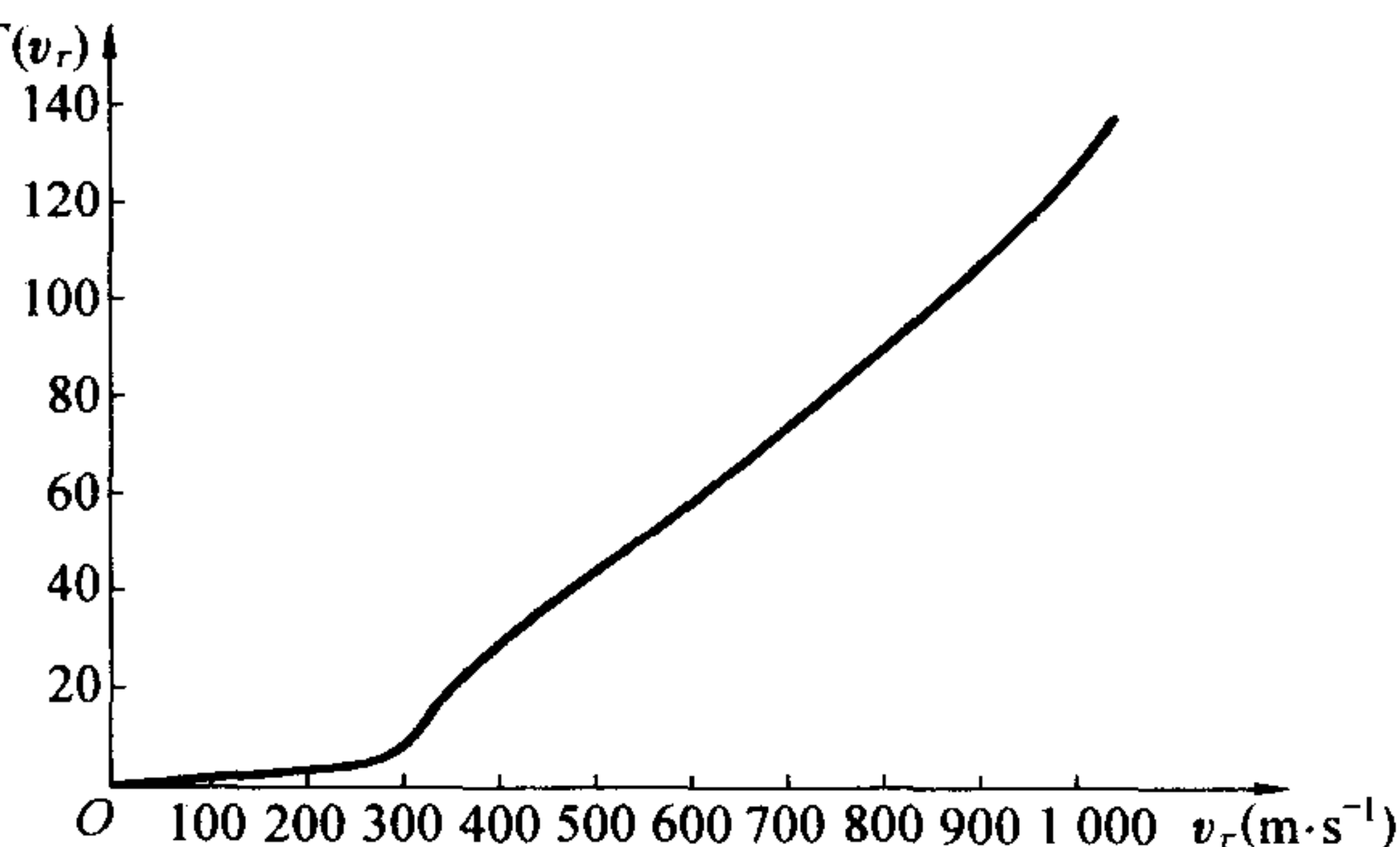


图 1.10  $F(v_\tau) - v_\tau$  曲线

## 1.7 在基本假设下的火箭质心运动矢量方程

实际上火箭在飞行中的运动是很复杂的。在研究火箭质心运动时, 要分析哪些是影响质心运动的主要因素, 哪些是次要因素。从而作一些必要的假设以暂时忽略一些次要因素, 得出质心运动的主要规律, 然后再考虑那些次要因素加以修正。这样既可以掌握问题的本质, 使问题简化处理, 又可求得与实际情况相符的结果。对问题进行简化, 首先要抓住主次。比如对稳定性良好的火箭弹, 在飞行中的攻角  $\delta$  总是很小的, 一般几度而已, 它的存在对质心运动的影响甚小, 故当研究质心运动规律时, 可暂时忽略它, 即假设飞行中的  $\delta = 0$ 。

另外, 由于制造上的缺陷, 外形常会形成不对称。这样, 即使弹轴和速度方向一致, 气流不





对称流动,也会形成对质心的力矩。火箭推力  $F_P$  的方向一般也不完全沿着弹轴,形成对质心的推力矩,也会引起围绕质心运动。但是,只要控制加工精度,上述不良后果便可大大克服。因此,可以假定弹体是轴对称的,而且推力  $F_P$  沿弹轴方向。

有了上述假设,火箭就不存在围绕质心运动,方程(1.5)中的推力沿弹轴方向亦与速度矢量方向一致,空气阻力即为  $R_x$ ,与攻角无关。这样就把火箭弹运动当作一个全部质量集中于质心的一个质点运动。

相对于惯性参考系来说,若火箭质心加速度为  $a$ ,在主动段上,式(1.5)为

$$ma = F_P + G_1 + R_x \quad (1.54)$$

所关心的问题不是火箭相对于惯性参考系的运动,而是要观测火箭在地面坐标系内如何运动。在图0.1中,曾经将地面坐标系以  $o-xyz$  表示,原点在弹道起点, $ox$ 轴为起点水平线(射向为正); $oy$ 轴铅直向上, $oz$ 轴垂直于 $ox$ 和 $oy$ 轴,依右手法则确定其方向。由于 $o-xyz$ 坐标系随地球以角速度  $\Omega_E$  不断转动着,因而它不是惯性参考系。若在该坐标系内观测到的加速度是  $a_r$ ,并仍然用  $dv/dt$  表示  $a_r$ ,于是可知

$$ma_r = m \frac{dv}{dt} = F_P + R_x + G_1 + F_E + F_C \quad (1.55)$$

等式右边另加上去的  $F_E$  和  $F_C$  是离心惯性力及柯里奥利(Coriolis)惯性力,其中  $F_C = -ma_C$ ,这里的柯里奥利加速度  $a_C$  由下式决定

$$a_C = 2(\Omega_E \times v) \quad (1.56)$$

以  $m$  通除式(1.55),并考虑到(1.15)这个关系式,可得

$$\frac{dv}{dt} = a_P + a_x + g - a_C \quad (1.57)$$

注意,这里的  $v$  是相对地球表面的速度。一般柯里奥利加速度影响甚小,如火箭速度高达1 000 m/s时,其最大值也不过  $0.15 \text{ m/s}^2$ ,只有重力加速度  $g$  的1.5%。柯里奥利加速度对质心运动的影响,当射程较大时,可以单独计算其影响量,这里不妨暂且假设  $a_C = 0$ 。

另外,地球表面实际上应考虑曲面为宜,但射程不大时可视为平面(当射程大于80 km时,视为平面就会带来一定误差)。

综合上述,特将质心运动基本假设归纳如下:

- (1) 火箭整个飞行过程中,  $\delta = 0$ ;
- (2) 弹体外形及质量分布轴对称,推力沿弹轴方向;
- (3) 标准气象条件,无风;
- (4) 不计柯里奥利加速度;
- (5) 重力加速度大小和方向不变;
- (6) 地表面为平面。

在这些假设条件下,火箭质心运动轨迹将是一条平面曲线,质心运动方程为





$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_x + \mathbf{g} \quad (1.58)$$

此方程可以用来具体地计算火箭质心的平面运动。求解此方程,即所谓的“外弹道学基本问题”,所得弹道称为理想弹道。实际弹道与理想弹道总是会有差别的。由于实际情况与假设 1、2 条不符而产生的问题,将在摆动理论与旋转理论中解决;由于实际情况与 3 ~ 6 条不符而产生的问题,将在修正理论中解决。

## 1.8 火箭质心运动的标量方程组

### 1.8.1 确定质心运动的主要变量

在外弹道基本问题中,主要任务是计算理想弹道。如图 1.11 所示,火箭在射击平面内,若知道火箭从弹道起点飞行  $t$  秒那一瞬时,在空中某一点的坐标  $(x, y)$ ,就是确定了火箭在该时刻所到达的位置。如果同时得知在该瞬时的速度大小和方向,就能确定火箭将飞向何方。因此,只要知道了  $(t, v, \theta, x, y)$  五个变量,则火箭质心运动问题就完全解决了。

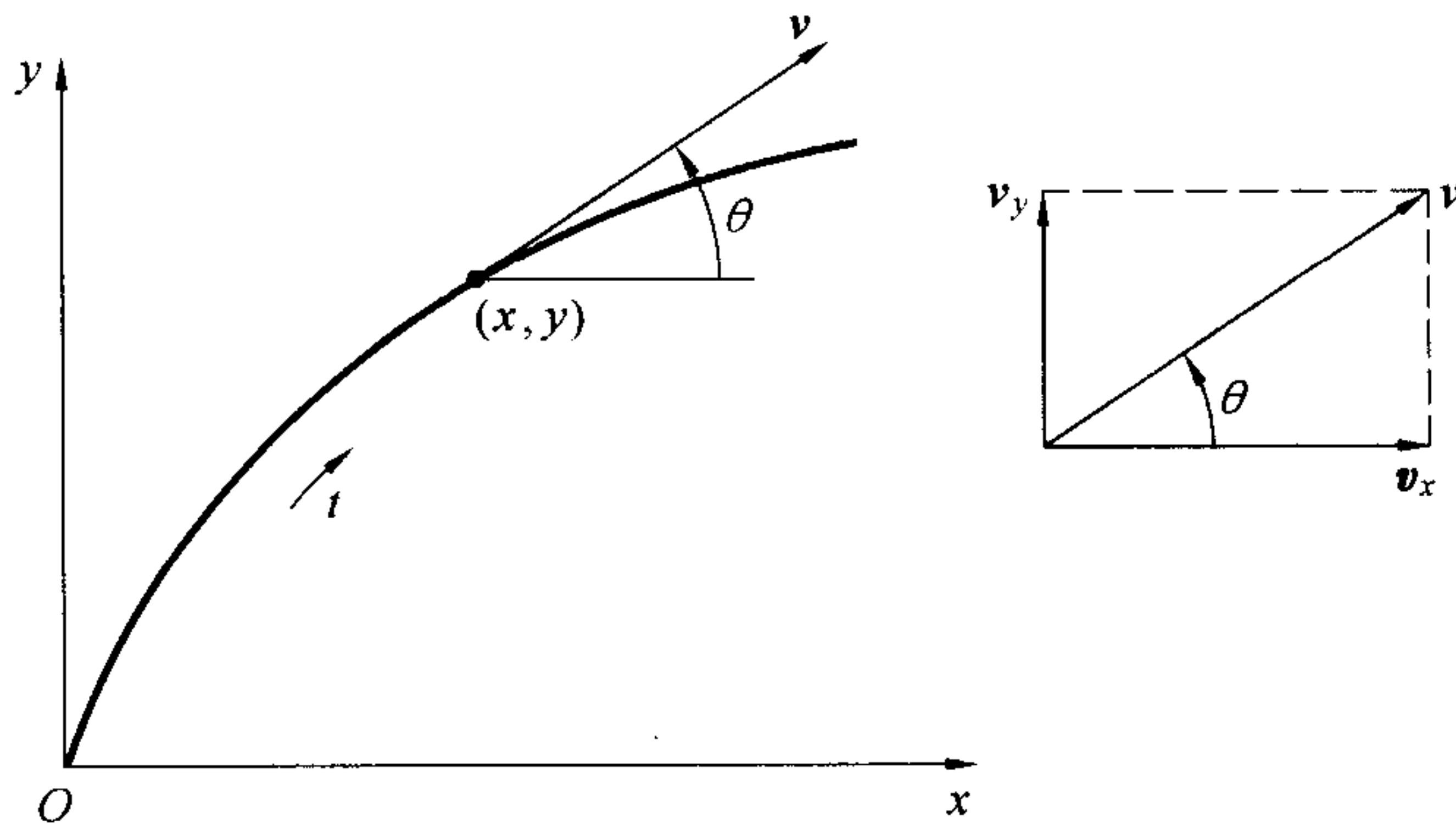


图 1.11 射击平面内的火箭质心运动

但速度的大小和方向不仅用  $v$  和  $\theta$  两个量表示,还可以用别的两个量表示,比如可用其两个坐标轴投影表示,即  $(v_x, v_y)$ ;还可以用  $(\tan\theta, v_x)$  表示,等等。

以上各变量在理论上都可以作自变量组成质心运动方程组,但常用的是以  $t$  或  $x$  作自变量。

### 1.8.2 在平面自然坐标系内火箭质心运动方程组

取火箭质心速度方向,也就是弹道切线方向为一轴,此轴上的单位矢量记为  $\tau$ ,又取垂直于速度方向的弹道主法线方向作另一轴,其上的单位矢量记为  $n$ ,  $(\tau, n)$  即构成平面自然坐标系(图 1.12)。





火箭的运动速度可表示为

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau} \quad (1.59)$$

则加速度为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

根据矢量导数规则,有

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{n}$$

于是

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v \frac{d\theta}{dt}\mathbf{n} \quad (1.60)$$

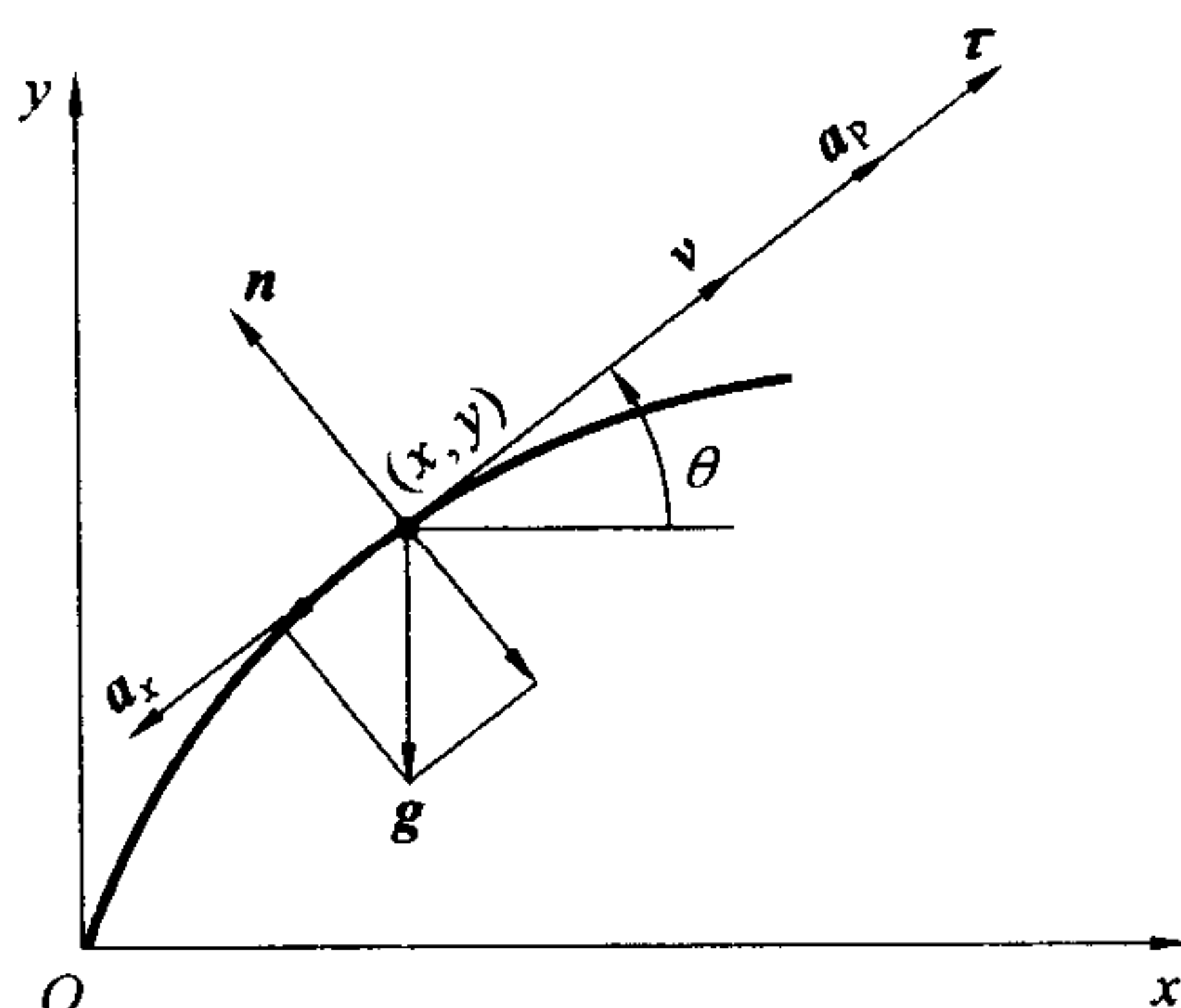


图 1.12 平面自然坐标系

这就是质心加速度向自然坐标轴分解的表达式,其中  $dv/dt$  是切线加速度的大小;而  $v(d\theta/dt)$  是法向加速度的大小。

将式(1.60)代入式(1.58),同时向坐标轴  $\boldsymbol{\tau}$  和  $\mathbf{n}$  投影,便得向  $\boldsymbol{\tau}$  轴投影

$$\frac{dv}{dt} = a_p - a_x - g\sin\theta$$

向  $\mathbf{n}$  轴投影

$$v \frac{d\theta}{dt} = -g\cos\theta$$

再加上确定坐标  $x$  和  $y$  (它们对时间  $t$  的导数分别等于速度在该二轴上的分量) 的方程,就得到以  $t$  为自变量的平面自然坐标系里的质心运动方程组

$$\begin{cases} * \frac{dv}{dt} = a_p - cH(y)F(v, c_s) - g\sin\theta & \text{①} \\ * \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{v} & \text{②} \\ * \frac{dy}{dt} = v\sin\theta & \text{③} \\ \frac{dx}{dt} = v\cos\theta & \text{④} \end{cases} \quad (1.61)$$

积分初始条件为:  $t = t_0$  时,  $v = v_0, \theta = \theta_0, y = y_0, x = x_0$ 。

从第一个方程可见,如要积分出速度  $v$ ,必须知道  $y$  和  $\theta$  是  $t$  的什么函数;  $a_p$  中的  $p$  也是高度  $y$  的函数。在解方程 ② 时,又要知道  $v$  是  $t$  的什么函数。在解方程 ③ 时,须知道  $v$  和  $\theta$  是  $t$  的什么函数。因此,这三个方程都不能单独求解,必须同时联立求解,此具有联解性的方程式以“\*”号标记之。第四个方程在前三个方程求出  $v$  和  $\theta$  之后,再行单独积分。此外,方程中的声速  $c_s$  和空气密度函数  $H(y)$  分别由式(1.38)、(1.36)给出,它们都是  $y$  的函数,求解方程时需单独列出。





### 1.8.3 火箭在被动段内的质心运动方程组

这只要将方程组(1.61)中的推力加速度  $a_p$  取为零即可。此时得

$$\begin{cases} * \frac{dv}{dt} = -c_K H(y) F(v, c_s) - g \sin \theta & ① \\ * \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v} & ② \\ * \frac{dy}{dt} = v \sin \theta & ③ \\ \frac{dx}{dt} = v \cos \theta & ④ \end{cases} \quad (1.62)$$

初始条件取主动段末端  $K$  点弹道诸元

$$t = t_K \text{ 时, } v = v_K, \theta = \theta_K, y = y_K, x = x_K$$

如果取  $x$  为自变量,以  $v_x$  和  $P(= \tan \theta)$  为表示速度大小和方向的两个函数,则可得到形式较为简单的方程组。由于

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{d \tan \theta}{dx} = \frac{d \tan \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( -\frac{g \cos \theta}{v} \right) \frac{1}{v_x} = -\frac{g}{v_x^2} \\ \frac{dv_x}{dx} &= \frac{dv_x}{dt} \frac{dt}{dx} = (-a_x \cos \theta) \frac{1}{v_x} = -c_K H(y) G(v, c_s) \end{aligned}$$

这样就组成了以  $x$  为自变量的方程组

$$\begin{cases} * \frac{dv_x}{dx} = -c_K H(y) G(v, c_s) & ① \\ * \frac{dP}{dx} = -\frac{g}{v_x^2} & ② \\ * \frac{dy}{dx} = P & ③ \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_x} & ④ \end{cases} \quad (1.63)$$

联系方程为

$$v = v_x \sqrt{1 + P^2} \quad ⑤$$

初始条件是,当  $x = x_K$  时,  $v_x = v_K \cos \theta_K$ ,  $P = \tan \theta_K$ ,  $y = y_K$ ,  $t = t_K$ 。

此方程组的缺点是由于函数  $P = \tan \theta$ , 当  $\theta > 60^\circ$  时,  $P$  值变化太快,容易发生误差,故用于较平缓的弹道计算。

以上介绍的质心运动方程组并不是一成不变的,可以针对武器的特点结合工作经验,组成其他形式的方程,以便更好地解决弹道计算问题。比如求解炸弹弹道,就可采用以  $y$  为自变量的方程组,读者可自行推导。关于在滑轨段的质心运动方程组,读者也可自行解决。





#### 1.8.4 计及地表曲率及重力随高度变化时的火箭质心运动方程组

对远程火箭,在其射程范围内,地球表面曲率是需要考虑的。在此,对地球可采用球体模型,其半径  $r_E$  等于 6 371 110 m。现引入地表切面坐标系  $o-x_e y_e z_e$ , 原点  $o$  取火箭质心,  $ox_e$  轴平行于地表切面,处于射击面内,  $oy_e$  轴在地心至弹质心连线上,向上为正,  $oz_e$  轴依右手定则确定,如图 1.13 所示。它是动参考系,当火箭飞行  $t$  时刻时动坐标转动角度为  $\varphi_E$ , 转动角速度  $\omega_e = \dot{\varphi}_E$ ; 此时火箭速度  $v$  在动坐标上的二分量(投影)为  $v_x$  和  $v_y$ ,  $v$  与  $ox_e$  轴的夹角为  $\theta$ , 显然  $v_x = v \cos \theta$ ,  $v_y = v \sin \theta$ 。依据矢量导数运算法则,对动参考系而言,有(以  $\frac{d_r v}{dt}$  表示  $v$  对时间的相对导数)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d_r v}{dt} + \omega_e \times v \quad (1.64)$$

在动参考系  $o-x_e y_e z_e$  中,  $v$  和  $\omega_e$  表示为

$$v = (v_x, v_y, 0) \quad (1.65)$$

$$\omega_e = (0, 0, -\dot{\varphi}_E) \quad (1.66)$$

$\dot{\varphi}_E$  由图 1.13 知

$$\omega_e = \dot{\varphi}_E = \frac{\dot{x}}{r_E + y_g} \quad (1.67)$$

式中,  $x$  是从射出点至火箭在地面上的投影的曲线长。 $\dot{x}$  为火箭在地面上投影的移动速率,它与火箭地表切面分速  $v_x$  之间的关系为

$$\frac{\dot{x}}{v_x} = \frac{r_E + y_g}{r_E + y_g + y} = \left(1 + \frac{y}{r_E + y_g}\right)^{-1} \quad (1.68)$$

由此得

$$\dot{x} = v_x \left(1 + \frac{y}{r_E + y_g}\right)^{-1} \quad (1.69)$$

代入式(1.67),即

$$\omega_e = \dot{\varphi}_E = \frac{v_x}{r_E} \left(1 + \frac{y + y_g}{r_E}\right)^{-1} \quad (1.70)$$

将式(1.65)、(1.66)代入式(1.64),得

$$\frac{dv}{dt} = (\dot{v}_x + v_y \omega_e, \dot{v}_y - v_x \omega_e, 0) \quad (1.71)$$

将式(1.71)代入式(1.58),重力加速度取式(1.20),便得所需的火箭质心运动方程组

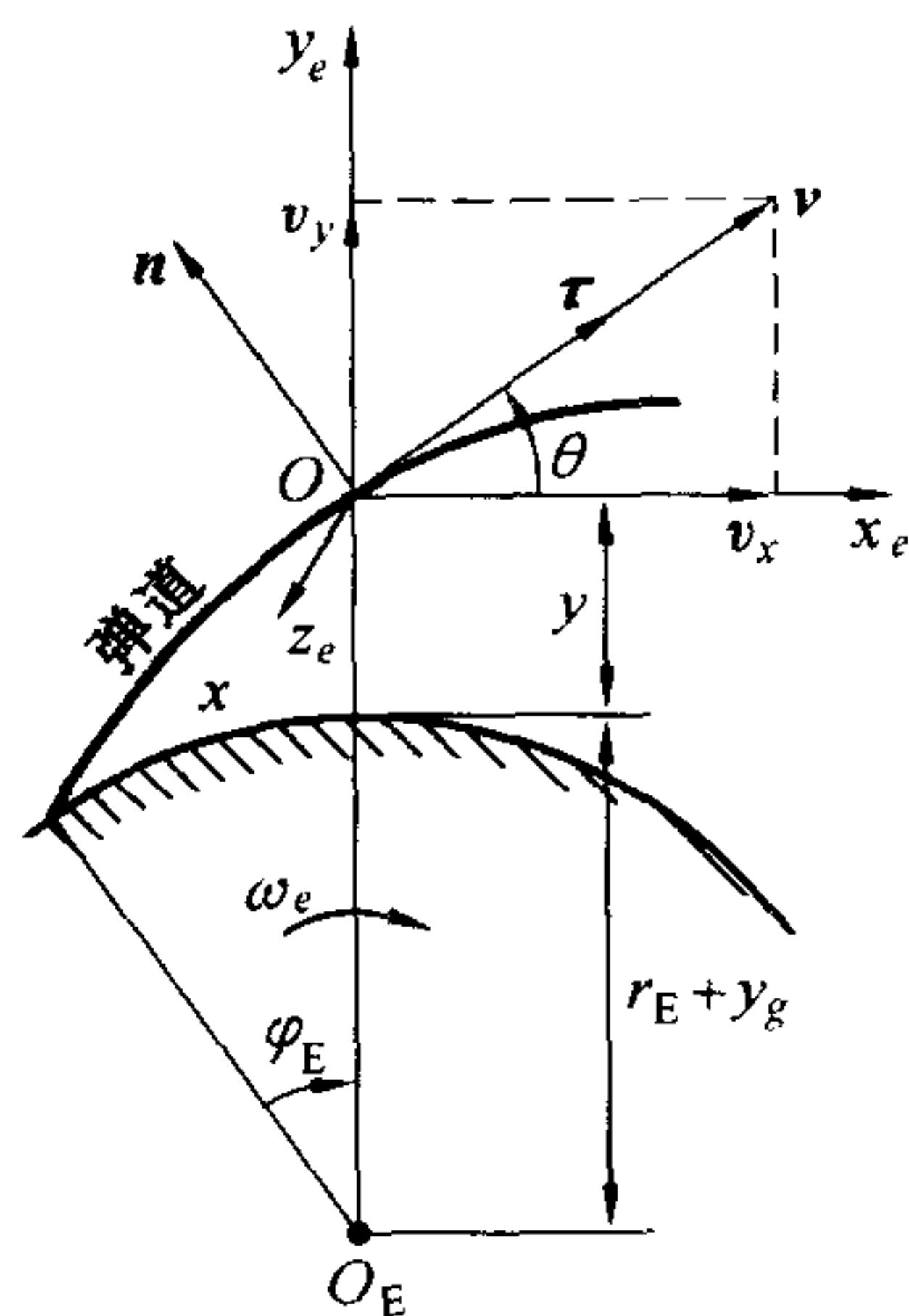


图 1.13 地表切面坐标系





$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_p \cos \theta - cH(y)G(v, c_s)v_x - \frac{v_x v_y}{r_E} \left(1 + \frac{y + y_g}{r_E}\right)^{-1} \\ \frac{dv_y}{dt} = a_p \sin \theta - cH(y)G(v, c_s)v_y + \frac{v_x^2}{r_E} \left(1 + \frac{y + y_g}{r_E}\right)^{-1} - g_0 \left(\frac{r_0}{r_0 + y_g + y}\right)^2 \\ \frac{dx}{dt} = v_x \left(1 + \frac{y}{r_E + y_g}\right)^{-1} \\ \frac{dy}{dt} = v_y \end{cases} \quad (1.72)$$

以同样方法,还可以在平面自然坐标系内建立计及地表曲率和重力随高度变化的火箭质心运动方程。图 1.13 以  $\tau$  和  $n$  构成的坐标系之转速为

$$\omega_m = \dot{\theta} + \omega_e = (0, 0, \dot{\theta} - \dot{\varphi}_E) \quad (1.73)$$

在此坐标系内的火箭速度为

$$\mathbf{v} = (v, 0, 0) \quad (1.74)$$

则

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{v}}{dt} + \omega_m \times \mathbf{v} = (\dot{v}, v(\dot{\theta} - \dot{\varphi}_E), 0) \quad (1.75)$$

将式(1.75)代入式(1.58),便可得所需运动方程组的另一种形式

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = a_p - cH(y)F(v, c_s) - g_0 \sin \theta \left(\frac{r_0}{r_0 + y_g + y}\right)^2 \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v} + \frac{v \cos \theta}{r_E + y_g + y} \\ \frac{dx}{dt} = v \cos \theta \left(1 + \frac{y}{r_E + y_g}\right)^{-1} \\ \frac{dy}{dt} = v \sin \theta \end{cases} \quad (1.76)$$

显然,方程组(1.76)是方程组(1.61)的局部修正式。

## 1.9 空气弹道特征

### 1.9.1 被动段弹道完全由 $c_K, v_K, \theta_K, y_K$ 四个参量决定

由微分方程理论可知,当初始条件确定后,微分方程的解是惟一的。对方程组(1.62),先须对前三个方程联立求解,这就需依赖于给出的初始条件  $v_K, \theta_K, y_K$ ,另外还要给出一定的参数值  $c_K$ ,于是使得





$$\begin{cases} v = v(c_K, v_K, \theta_K, y_K, t) & ① \\ \theta = \theta(c_K, v_K, \theta_K, y_K, t) & ② \\ y = y(c_K, v_K, \theta_K, y_K, t) & ③ \end{cases} \quad (1.77)$$

而第四方程,可以最后积分出来,即  $x = x_K + x_1(c_K, v_K, \theta_K, y_K, t)$ 。在积分前三个方程时,  $x$  对它们无任何影响;  $x_K$  只是在  $x$  轴上改变了  $K$  点对坐标原点  $o$  的距离,不能改变速度和倾角的变化规律,即不改变弹道的形状。当各弹道的  $c_K, v_K, \theta_K, y_K$ , 对应相等时,对应的被动段弹道完全重合。所以说,火箭被动段弹道完全由  $c_K, v_K, \theta_K, y_K$  四个参量决定。特别是,当  $x_K = y_K = 0$  时,则相当于地面火炮弹道。地炮弹道是由其弹道系数  $c$ 、初速  $v_0$  和射角  $\theta_0$  三个参量所决定。例如,对于落点,  $y_c = 0, t = T$ , 则

$$y_c = y(c, v_0, \theta_0, T) = 0$$

故

$$T = T(c, v_0, \theta_0)$$

将上式代入  $x, v, \theta$  的表达式中,得

$$X = X(c, v_0, \theta_0)$$

$$v_c = v_c(c, v_0, \theta_0)$$

$$\theta_c = \theta_c(c, v_0, \theta_0)$$

对弹道顶点,由  $t = t_s$  时的  $\theta_s = 0$ , 同时可证明顶点诸元也是  $c, v_0, \theta_0$  的函数。

现今,人们已对地面火炮常用的几个落点和顶点诸元  $X, T, v_c, |\theta_c|, Y$ , 编出了以  $c, v_0, \theta_0$  三个参量为表头的表格,列于“地面火炮外弹道表”第一部分,采用的是43年空气阻力定律。对于火箭被动段,只是坐标原点在  $K$  点而不是在地面上,多了一个参量  $y_K$ 。以后可以尽量利用已有的地炮弹道表来解决火箭弹道被动段的计算问题。

这里简单介绍一下查表的方法。例如  $c = 1.10, v_0 = 570\text{m/s}, \theta_0 = 45^\circ$ , 求  $X$ 。

**解** 由“地外表 I”知,  $c$  和  $v_0$  不刚好是表上给出的值,需要进行插值。一般进行直线插值就可以了。在外弹道学中,常用列表法进行直线插值是比较方便的。先把与给定量临近的上下两个表点值都列出来,并查出各表点对应的表格函数值,然后直线插值。本例题结果如下表。

$v_0 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ $c / (\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1})$	560	570	580
1.00	10 697 m	10 841 m	10 985 m
1.10		10 336 m	
1.20	9 711 m	9 831 m	9 950 m

若三个参量都不是表点值,需进行三变量插值。如果  $c_1 < c < c_2, v_{01} < v_0 < v_{02}, \theta_{01} < \theta_0 < \theta_{02}$ , 则可列表如下。





$\theta_0$	$\theta_{01}$			$\theta_0$	$\theta_{02}$		
$v_0$	$v_{01}$	$v_0$	$v_{02}$		$v_{01}$	$v_0$	$v_{02}$
$c$							
$c_1$	$X_{11} \rightarrow$	$X_1 \downarrow$	$\leftarrow X_{12}$		$X'_{11} \rightarrow$	$X'_1 \downarrow$	$\leftarrow X'_{12}$
$c$		$X_0 \uparrow$		$X$		$X'_0 \uparrow$	
$c_2$	$X_{21} \rightarrow$	$X_2$	$\leftarrow X_{22}$		$X'_{21} \rightarrow$	$X'_2$	$\leftarrow X'_{22}$

用同样方法,可以求出其他所需的弹道诸元。

应指出的是,该地炮外弹道表对于  $\theta_0 < 5^\circ$  的低伸弹道进行插值是不合适的,那将带来很大误差。1977 年国防工业出版社已出版了《低伸弹道表》,可以弥补原地炮外弹道表的不足。

对高射炮弹,需要知道任意时刻的弹道诸元,现用的有高射外弹道表第一至第六部分,其初速  $v_0 \geq 700 \text{ m/s}$ 。

1.9.2 火箭弹速度沿全弹道的变化

在解弹道方程之前,对质心运动速度  $v$  沿全弹道的变化规律有一个定性了解,对以后有关问题的讨论是有益的。

按方程组(1.61) 第 ① 式

$$\frac{dv}{dt} = a_P - a_x - g \sin \theta$$

分几段加以讨论,并参见图 1.14。

1. 在主动段内

因推力加速度  $a_P$  远比阻力加速度和重力加速度大,所以  $dv/dt > 0$ ,速度  $v$  是单调递增的,且在  $K$  点有最大速度  $v_K$ 。

2. 在被动段内

此段  $a_P = 0$ ,那么  $\frac{dv}{dt} = -a_x - g \sin \theta$ 。

(1)  $KS$  段。因  $a_x$  总是正值,且此段内的  $\theta > 0$ ,  
 $\frac{dv}{dt} < 0$ , $v$  单调递减;

(2) 顶点  $S$ 。此时  $\theta_S = 0$ ,但  $a_x \neq 0$ , $v$  继续减小;

(3)  $SN$  段。过  $S$  点后,倾角  $\theta$  变为负值,则

$$\frac{dv}{dt} = -a_x + g \sin |\theta|$$

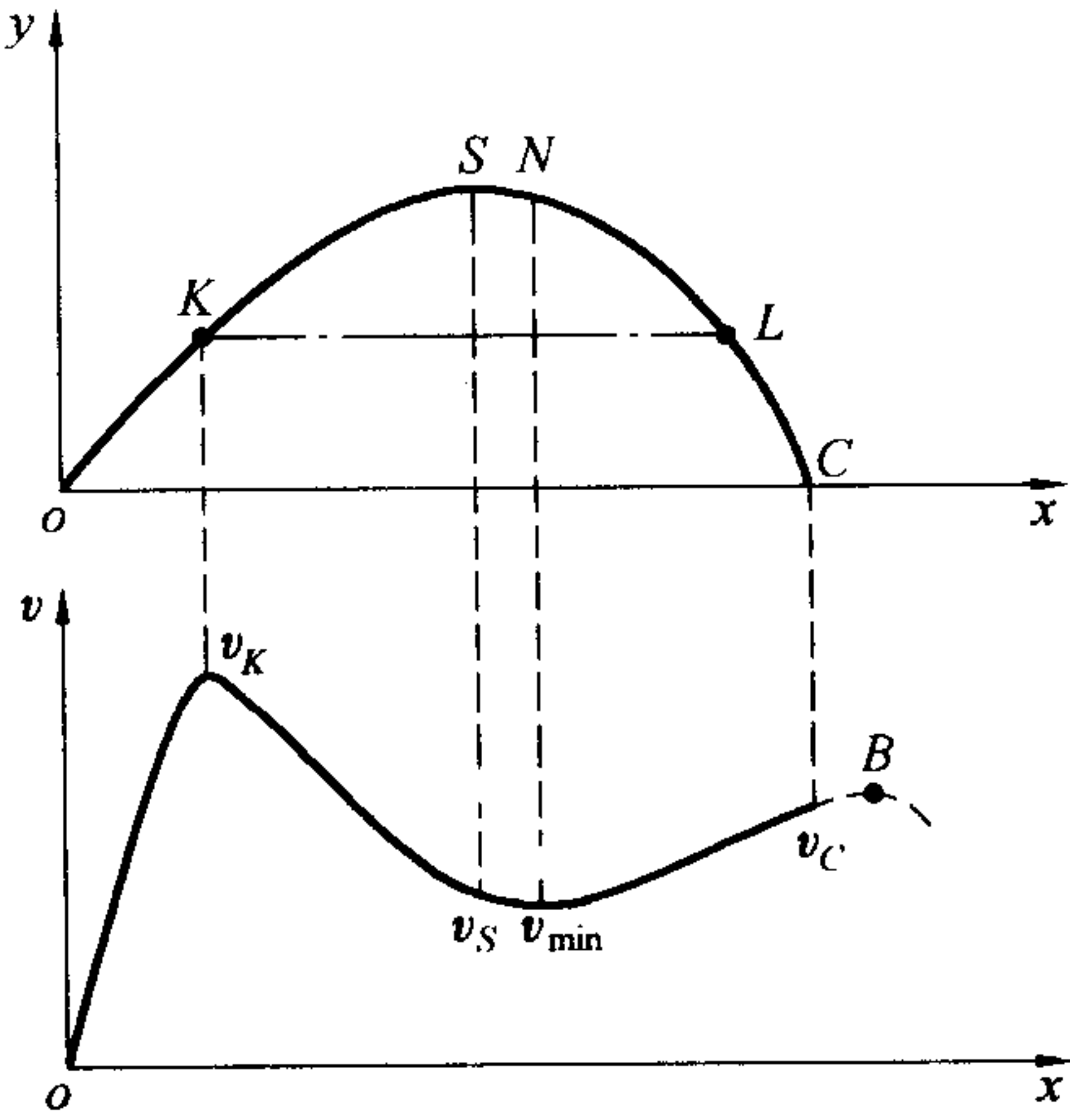


图 1.14 火箭速度沿全弹道的变化规律





重力加速度的切线分量  $g \sin |\theta|$  开始抵消一部分阻力加速度  $a_x$  的作用, 并且  $g \sin |\theta|$  随弹道下降越来越大, 故在过顶点后不远的  $N$  点处, 便有  $dv/dt = -a_x + g \sin |\theta| = 0$  的情况, 此时出现  $v$  的极值, 为  $v$  的极小值  $v_{\min}$ ;

(4)  $NC$  段。过  $N$  点后,  $g \sin |\theta|$  继续增大, 且通常比  $a_x$  值要大, 故又出现了  $dv/dt > 0$  的情况,  $v$  又逐渐增加, 直到落地为止。

这里且问, 若在速度增加的过程中, 火箭并不落地, 那么速度是不是会无限增大呢? 这是不可能的, 因为重力加速度的分量最大也大不过一个  $g$ ; 而  $a_x$  则随  $v$  的增加而增加, 因此经过一段路程之后, 就会出现  $dv/dt = -a_x + g = 0$  的情况, 这又是一个速度极值点  $B$ ; 此后进入稠密的大气层, 阻力又将有所增大, 速度  $v$  又将减小。

### 3. 最大射程角的概念

一般来讲, 对一定的弹箭, 用某初速发射时, 其射程为最大时的射角, 叫最大射程角, 以符号  $\theta_{0X_{\max}}$  表示。

真空弹道的最大射程角是  $45^\circ$ 。对空气弹道, 由于空气阻力影响程度的不同, 各类弹箭的最大射程角便不一定是  $45^\circ$ , 而各有其值。现将一些普通枪、炮弹丸的  $\theta_{0X_{\max}}$  值列于表 1.2 中。

火箭弹在主动段内的倾角有所减小, 为达到最大射程, 一般应使  $K$  点倾角  $\theta_K$  达到表中之值, 其  $\theta_0$  须大一些。

除上述几条之外, 还有其他一些弹道特性, 比如弹道的不对称性, 就不再介绍了, 有兴趣者, 可参阅其他外弹道学。

表 1.2 几类弹的最大射程角

弹 种 与 初 速	$\theta_{0X_{\max}}$	弹 种 与 初 速	$\theta_{0X_{\max}}$
真空抛射	$45^\circ$	大口径远程弹丸 ( $v_0 = 770 \sim 800\text{m/s}$ )	$50^\circ \sim 55^\circ$
小速度弹丸 ( $v_0 < \text{声速}$ )	$45^\circ$ 左右	枪	$30^\circ$ 左右
中口径、中速度弹丸 ( $v_0$ 在 $500\text{m/s}$ 左右)	$43^\circ \sim 44^\circ$		

## 附录 火箭质心运动的一般方程

在变质量力学中, 若有一定量质点, 在  $t$  瞬时的质量为  $m$ , 速度为  $v$ , 同时另有一微小量  $\Delta m$ , 以速度  $v_1$  运动, 并于  $(t + \Delta t)$  时刻与  $m$  合并。合并后的总速度为  $(v + \Delta v)$ ; 若作用于其上的全部外力为  $F$ , 则根据质点系的动量定理, 有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(m + \Delta m)(v + \Delta v) - (mv + \Delta m \cdot v_1)}{\Delta t} = F$$

即得





$$m \frac{dv}{dt} = F + u_1 \frac{dm}{dt} \quad (1.78)$$

式中,  $u_1 = v_1 - v$ ,  $u_1$  是质量为  $\Delta m$  的微小质点的相对速度。

若将量  $(dm/dt)u_1$  理解为一外力, 则变质量质点的运动方程与定质量质点的运动方程在形式上是相同的。

火箭弹是一变质量系, 取  $t$  时刻时火箭体所包含的全部质量作为研究对象。显然, 对弹体内的第  $i$  个质点, 亦满足式(1.78), 即

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i + u_1 \frac{dm_i}{dt} \quad (1.79)$$

不过此式中的  $F_i$  也包括了弹体内其他质点对  $m_i$  及  $dm_i$  的作用力(即内力)。

在  $(t + dt)$  时刻, 对所考虑的质点系的全部质点求和, 得

$$\sum m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum F_i + \sum u_1 \frac{dm_i}{dt} \quad (1.80)$$

取一与火箭体刚性部分相固联的坐标系, 其原点为  $A$ , 坐标系的角速度(即火箭的角速度)为  $\omega$ ; 此坐标系不仅有转动, 并且有平动。以  $r_i$  表示  $m_i$  在该坐标系中的矢径,  $v_A$  表示  $A$  点相对静参考系的速度,  $v_{ri}$  表示  $m_i$  相对于该动参考系的相对速度, 则

$$v_i = v_{ri} + v_A + \omega \times r_i \quad (1.81)$$

于是

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{dv_{ri}}{dt} + \frac{dv_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\omega \times r_i) \quad (1.82)$$

对任何矢量  $T$ , 其绝对变化率用  $dT/dt$  表示,  $T$  在转动角速度为  $\omega$  的参考系内的投影的变化率用  $d_r T/dt$  表示, 便存在关系

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d_r T}{dt} + \omega \times T \quad (1.83)$$

因此

$$\frac{dv_{ri}}{dt} = \frac{d_r v_{ri}}{dt} + \omega \times v_{ri} \quad (1.84)$$

$$\frac{d}{dt}(\omega \times r_i) = \frac{d_r}{dt}(\omega \times r_i) + \omega \times (\omega \times r_i) = \frac{d\omega}{dt} \times r_i + \omega \times v_{ri} + \omega \times (\omega \times r_i) \quad (1.85)$$

将式(1.84)、(1.85)代入式(1.82), 再代入到式(1.80), 得

$$\begin{aligned} \sum m_i \left[ \frac{d v_A}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r_i + \omega \times (\omega \times r_i) \right] = \\ \sum F_i + \sum \frac{dm_i}{dt} u_1 - \sum m_i \frac{d_r v_{ri}}{dt} - \sum 2m_i \omega \times v_{ri} \end{aligned} \quad (1.86)$$





方程(1.86) 等式左边为

$$m \left[ \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C) \right]$$

式中,  $\mathbf{r}_C$  是瞬时  $t$  火箭质心对  $A$  点的矢径,  $m$  为此时的火箭质量。中括号内的三项为  $t$  时刻火箭质心的牵连加速度, 以  $\mathbf{a}_e$  表示。方程(1.86) 等式右边第一项  $\Sigma \mathbf{F}_i$  中, 由于内力成对出现(大小相等, 方向相反), 则两两相消, 只剩下外力合力, 以  $\mathbf{F}$  记之。第二项  $\Sigma (dm_i/dt) \mathbf{u}_1$ , 即为动推力, 以  $\mathbf{F}'_P$  表示。第三项与燃气质点相对弹体的加速度有关, 第四项为因弹体转动及燃气流动而产生的柯里奥利惯性力, 此两项统称燃气惯性力, 记为  $\mathbf{F}_{\text{gas}}$ , 于是式(1.86) 变为

$$m \mathbf{a}_e = \mathbf{F} + \mathbf{F}'_P + \mathbf{F}_{\text{gas}} \quad (1.87)$$

在与火箭刚性部分固联的坐标系内, 若火箭质心对  $A$  点的相对速度为  $\mathbf{v}_{rc}$ , 相对加速度为  $\mathbf{a}_{rc}$ , 则火箭质心运动的一般方程为

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}'_P + \mathbf{F}_{\text{gas}} + m \mathbf{a}_{rc} + 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rc} \quad (1.88)$$

可见, 把动推力  $\mathbf{F}'_P$  和燃气惯性力  $\mathbf{F}_{\text{gas}}$  等当作外力时, 则火箭质心运动方程与刚体运动方程具有相同的形式, 这种把火箭之类的变质点系作为刚体处理的原则, 就是所谓“刚化原理”。



## 第二章 火箭弹道主动段的解析解

在火箭弹设计时,所提出的战术技术指标中,主要是最大射程、威力、散布(或密集度)及机动性等。在总体设计中,为了选取一套合理的弹体参数(这些参数涉及全弹质量  $m_0$ 、推进剂质量  $m_p$ 、弹形系数等),需要进行大量弹道计算;但并不要求很精确,只要有一定准确性的解析公式就可满足要求。为求得全弹道,首先得求出主动段末端  $K$  点诸元,然后求解被动段。本章先研究主动段解析解。

### 2.1 运动方程组

推力加速度采用式(1.14)。由式(1.61)得

$$\left\{ \begin{array}{l} * \frac{dv}{dt} = u_{\text{eff}} \frac{|\dot{m}|}{m} - cH(y)F(v, c_s) - g\sin\theta \quad \textcircled{1} \\ * \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{v} \quad \textcircled{2} \\ * \frac{dy}{dt} = v\sin\theta \quad \textcircled{3} \\ \frac{dx}{dt} = v\cos\theta \quad \textcircled{4} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

为了进行解析积分,必须将该方程组简化。其根据是对影响主动段质心运动的主要因素和次要因素加以区别,以便对次要因素近似处理,并保障主要因素的可靠性。

目的在于求  $K$  点诸元  $v_K$ 、 $\theta_K$ 、 $y_K$ 、 $x_K$ ;继之求解被动段,以得到全射程  $X$ 。影响计算射程准确性的主要诸元是  $v_K$ 。就普通炮兵火箭而言,一般主动段不长,即使射程达到 50 km,主动段长也不过 2 km 左右,小火箭的弹道主动段就更短了,甚至只有几十米。因此,  $x_K$  和  $y_K$  即使有些误差,对全射程影响不大。而切线倾角  $\theta$  在全主动段变化也很小,一般为  $3^\circ$  以下,甚至  $1^\circ$  以下。况且,在考虑用最大射程角射击时,  $\theta_K$  的误差对全射程影响是小的。至于  $v_K$ ,它是火箭动能的来源,对射程影响较明显。

通观各个方面,要使被动段计算准确,首先应保证速度  $v_K$  准确。

而从方程组(2.1)本身来看,②、③、④三个方程中都有  $v$  和  $\theta$ 。在主动段内,  $\theta$  变化缓慢,  $v$  变化剧烈。这样,为使  $\theta_K$ 、 $y_K$  和  $x_K$  足够准确,也依赖于  $v$  的准确性。因此,解方程组(2.1)的关





键,在于保证①式积分的准确性。

在①式等号右边的三项中,对野战火箭,推力加速度  $a_P$  很大,一般  $20g$  以上,甚至有  $100g$  以上的,最大速度  $v_K$  很少超过  $1000\text{ m/s}$ ,故阻力加速度比之  $a_P$  就很小了,它与重力加速度合起来,仍比推力加速度小得多。比如某火箭  $a_P = 572\text{ m/s}^2$ ,当  $v_K = 370\text{ m/s}$  时,  $a_x = 22\text{ m/s}^2$ ;而  $\theta_K = 45^\circ$  时,  $g\sin\theta_K \approx 7\text{ m/s}^2$ ,当  $v < v_K$  时的  $a_x$  更小,所以积分①式时,主要保障  $a_P$  的准确性,另两项可粗略一些。

此外,计算阻力加速度  $a_x$  时,可把声速  $c_s$  取地面标准值  $c_{\text{son}}$ ,因为主动段高度不高,则

$$F(v, c_s) \approx F(v)$$

为了使  $K$  点诸元直接与火箭弹的结构参量( $m_0, m_P$  等)相联系,故选取排出推进剂的相对值

$$\mu = \frac{m_0 - m}{m_0} \quad (2.2)$$

作自变量。特别是,当发动机工作完毕时  $\mu_K = m_P/m_0$ 。

由式(2.2)知,任意瞬时的弹体质量为

$$m = m_0(1 - \mu) \quad (2.3)$$

并且有

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{1}{m_0} \frac{dm}{dt} = \frac{|\dot{m}|}{m_0} \quad (2.4)$$

将式(2.3)代入式(1.42),得弹道系数为

$$c = \frac{c_0}{1 - \mu} \quad (2.5)$$

式中

$$c_0 = \frac{id^2}{m_0} \times 10^3 \quad (2.6)$$

为了得到以  $\mu$  为自变量的方程,可用  $d\mu/dt$  除式(2.1)①等式两边,并利用式(2.3)、(2.4)、(2.5),得

$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{u_{\text{eff}}}{1 - \mu} - \frac{c_0}{1 - \mu} H(\gamma) F(v) \frac{dt}{d\mu} - (g\sin\theta) \frac{dt}{d\mu} \quad (2.7)$$

上式等号右边第一项是可靠的。对第二、三项中的  $dt/d\mu$  可做如下近似替代,即在全主动段内取其平均值

$$\frac{dt}{d\mu} = \frac{t_P}{\mu_K} \quad (2.8)$$

式中,  $t_P$  是火箭弹的发动机工作时间,对野战火箭弹就是主动段时间  $t_K$ 。把式(2.8)运用到式(2.1)②、③、④中,便得以  $\mu$  为自变量的方程组





$$\left\{ \begin{array}{l} * \frac{dv}{d\mu} = \frac{u_{\text{eff}}}{1-\mu} - \frac{\alpha F(v)}{1-\mu} - \beta \quad ① \\ * \frac{d\theta}{d\mu} = -\frac{gt_P}{\mu_K} \cdot \frac{\cos\theta}{v} \quad ② \\ * \frac{dy}{d\mu} = \frac{t_P}{\mu_K} v \sin\theta \quad ③ \\ dx = (\cot\theta) dy \quad ④ \end{array} \right. \quad (2.9)$$

式中

$$\alpha = \frac{t_P c_0}{\mu_K} H(\gamma) \quad (2.10)$$

$$\beta = \frac{gt_P}{\mu_K} \sin\theta \quad (2.11)$$

## 2.2 K点弹道诸元的计算公式

### 2.2.1 速度公式

由式(2.9)①知,对 $v$ 积分,需要依赖于 $\alpha$ 中的 $H(\gamma)$ 及 $\beta$ 中的 $\sin\theta$ 。但考虑到其中二、三项是较次要的项,故可以把 $H(\gamma)$ 和 $\sin\theta$ 取某一平均值。这样,就可对①式单独积分。另外,在主动段及滑轨段的速度变化规律,在形式上都遵循①式,只不过在滑轨段时的 $\theta$ 为 $\theta_0$ 而已。这样,为避免繁琐起见,就不用分段求 $v$ ,而干脆把滑轨段一起考虑进去,这样在初始条件 $v|_{\mu=0}=0$ 时,对①式积分得

$$v = u_{\text{eff}} K(\mu) - \int_0^\mu \frac{\alpha F(v)}{1-\mu} d\mu - \int_0^\mu \beta d\mu \quad (2.12)$$

式中

$$K(\mu) = \int_0^\mu \frac{d\mu}{1-\mu} = \ln \frac{1}{1-\mu} = -\ln(1-\mu) \quad (2.13)$$

而

$$\int_0^\mu \beta d\mu = \beta \mu \quad (2.14)$$

式中, $\beta$ 系按积分中值定理取成某一常量。

下面专门研究式(2.12)第二项的积分。由于推力加速度远较阻力加速度和重力加速度为大,因此主动段内火箭的质心运动速度,主要由推力加速度项(第一项)决定,也就是说, $v-\mu$ 曲线主要取决于 $u_{\text{eff}} K(\mu)$ 。为了把次要量第二、三两项并入第一项,引进所谓“代有效排气速度” $u_{\text{eff}}^*$ 来代替有效排气速度 $u_{\text{eff}}$ ,于是得

$$v = u_{\text{eff}}^* K(\mu) \quad (2.15)$$





$u_{\text{eff}}^*$  也是  $\mu$  的函数, 不过它的变化很小, 对近似计算来说, 可忽略这一变化。因此, 可取以  $K$  点为标准的常数值, 即

$$u_{\text{eff}}^* = \frac{v_K}{K(\mu_K)} \quad (2.16)$$

这样,  $v - \mu$  与  $u_{\text{eff}}^* K(\mu) - \mu$  曲线, 能在原点  $O$  和  $K$  点重合, 其间略有相差, 如图 2.1 所示。

把  $u_{\text{eff}}^*$  视为式 (2.16) 所确定的常数时, 对式 (2.15) 求导数, 得

$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{u_{\text{eff}}^*}{1 - \mu}$$

代入式 (2.12) 第二项, 得

$$\int_0^\mu \frac{\alpha F(v)}{1 - \mu} d\mu = \int_0^\mu \frac{\alpha F(v)}{u_{\text{eff}}^*} dv = \frac{\alpha}{u_{\text{eff}}^*} \int_0^\mu F(v) dv = \frac{\alpha}{u_{\text{eff}}^*} L(v) \quad (2.17)$$

式中

$$L(v) = \int_0^\mu F(v) dv \quad (2.18)$$

$L(v)$  已根据 43 年空气阻力定律编成了表 (见附表 9)。

为了计算方便, 有时把式 (2.17) 变换一下, 利用式 (2.15), 可得

$$\frac{\alpha}{u_{\text{eff}}^*} L(v) = \alpha K(\mu) R(v) \quad (2.19)$$

式中

$$R(v) = \frac{L(v)}{v} \quad (2.20)$$

$R(v)$  是  $F(v)$  的积分平均值 (见附表 10)。

在积分式 (2.17) 时, 对变化不大的  $\alpha$  亦按照积分中值定理, 对函数  $H(y)$  取某一平均值。这样, 求得  $K$  点速度公式为

$$v_K = u_{\text{eff}} K(\mu_K) - \frac{\alpha}{u_{\text{eff}}^*} L(v_K) - \beta \mu_K \quad (2.21)$$

或

$$v_K = u_{\text{eff}} K(\mu_K) - \alpha K(\mu_K) R(v_K) - \beta \mu_K \quad (2.22)$$

式 (2.22) 用于一般野战火箭弹。式中  $\alpha$  和  $\beta$  根据经验可取其中的  $H(y)$  和  $\sin \theta$  为下列近似值

$$H(y) = \frac{1}{4} [1 + 3H(y_K)]$$

$$\theta = \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta_K) \quad (2.23)$$

### 2.2.2 倾角公式

倾角  $\theta$  在滑轨段上不变, 式 (2.9)② 式是不存在的。在主动段内, 有

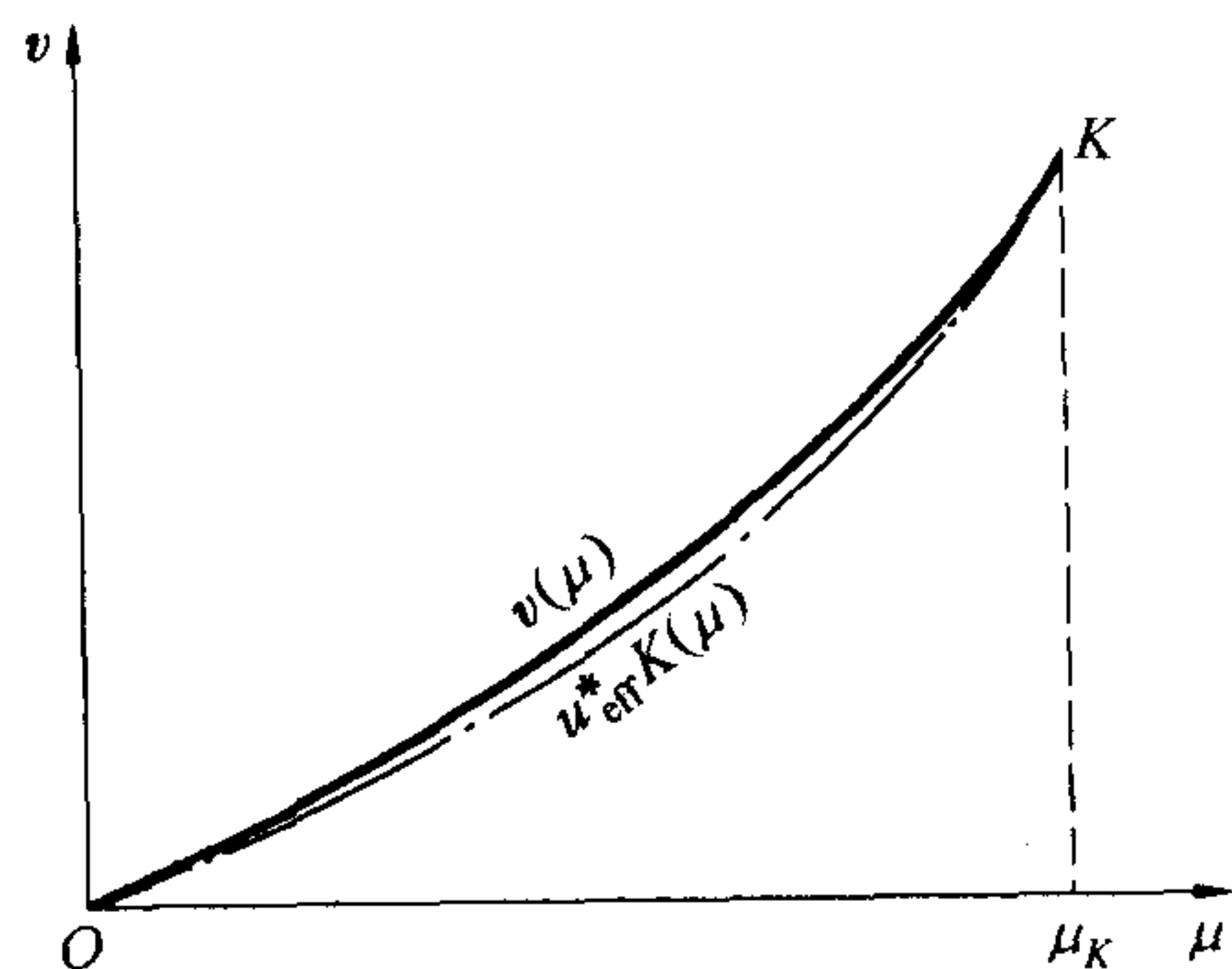


图 2.1 主动段内火箭速度变化曲线





$$\frac{d\theta}{d\mu} = -\frac{gt_P \cos\theta}{\mu_K v} = -\frac{gt_P \cos\theta}{\mu_K u_{\text{eff}}^* K(\mu)}$$

分离变量并积分,得

$$\int_{\theta_0}^{\theta_K} \frac{d\theta}{\cos\theta} = -\frac{gt_P}{\mu_K u_{\text{eff}}^*} \int_{\mu_0}^{\mu_K} \frac{d\mu}{K(\mu)}$$

而

$$\int_{\theta_0}^{\theta_K} \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \xi(\theta) \quad (2.24)$$

$$\int_{0.01}^{\mu} \frac{d\mu}{K(\mu)} = K_2(\mu) \quad (2.25)$$

$\xi(\theta)$  和  $K_2(\mu)$  分别列附表 11 和附表 8。

利用式(2.24) 和(2.25), 便得

$$\xi(\theta_K) = \xi(\theta_0) - \frac{gt_P K(\mu_K)}{\mu_K v_K} [K_2(\mu_K) - K_2(\mu_0)] \quad (2.26)$$

剩下的问题是  $\mu_0$  值如何计算。 $\mu_0$  是火箭离轨时排出火药量的相对值, 即与滑轨长  $s_0$  相应的  $\mu$  值。为此, 须考虑火箭滑轨段的运动。在滑轨段, 其速度很小, 阻力加速度可忽略不计, 并且在  $\theta_0$  已知时, 质心位置仅由弹道弧长  $s$  确定, 于是

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = u_{\text{eff}} \frac{|\dot{m}|}{m} - g \sin\theta_0 \\ \frac{ds}{dt} = v \end{cases}$$

变为以  $\mu$  为自变量的方程组

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\mu} = \frac{u_{\text{eff}}}{1 - \mu} - \beta_0 & \textcircled{1} \\ \frac{ds}{d\mu} = \frac{t_P v}{\mu_K} & \textcircled{2} \end{cases} \quad (2.27)$$

式中

$$\beta_0 = \frac{gt_P}{\mu_K} \sin\theta_0$$

对 ① 式积分得

$$v = u_{\text{eff}} K(\mu) - \beta_0 \mu \quad (2.28)$$

由于

$$K(\mu) = \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{3} + \dots$$

在滑轨段的  $\mu$  的最大值  $\mu_0$ , 一般不超过 0.03, 故取  $K(\mu) \approx \mu$  就足够准确了。于是



$$\frac{ds}{d\mu} = \frac{t_P}{\mu_K} v = \frac{t_P}{\mu_K} (u_{\text{eff}} - \beta_0) \mu$$

则

$$s_0 = \frac{t_P}{\mu_K} (u_{\text{eff}} - \beta_0) \int_0^{\mu_0} \mu d\mu = \frac{t_P}{2\mu_K} (u_{\text{eff}} - \beta_0) \mu_0^2$$

那么

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2s_0\mu_K}{t_P(u_{\text{eff}} - \beta_0)}} \quad (2.29)$$

当然,若是  $v_0$  已由试验测得,那就可以直接根据式(2.28)反求出  $\mu_0$  来,这样得出的  $\mu_0$  会更准确。

### 2.2.3 K 点坐标公式

由方程组(2.9)第③式,将式(2.15)代入,得

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{t_P}{\mu_K} u_{\text{eff}}^* K(\mu) \sin\theta$$

积分得

$$y_K = \frac{t_P v_K \sin\theta}{\mu_K K(\mu_K)} K_1(\mu_K) \quad (2.30)$$

式中,  $\theta$  按式(2.23)计算;

$$K_1(\mu) = \int_0^\mu K(\mu) d\mu = (1 - \mu) \ln(1 - \mu) + \mu \quad (2.31)$$

对  $K_1(\mu)$  这个函数也编了表,列于附表 7。

由式(2.9)中④式,积分得

$$x_K = \int_0^{\mu_K} \cot\theta dy$$

利用中值定理,有

$$x_K = y_K \cot\theta^* \quad (2.32)$$

根据经验,这里取

$$\cot\theta^* = \frac{1}{4} (3\cot\theta_K + \cot\theta_0) \quad (2.33)$$

比较合适。

## 2.3 计算顺序

为了求 K 点诸元,须对式(2.22)、(2.26) 及(2.30) 联立求解,同时考虑到式(2.22) 是关于





$v$  的隐函数,故需采取逐次逼近的方法。这个方法在高等数学中已有论述。

若已知微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

初始条件是

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

用逐次逼近法解此方程的步骤是

一次近似

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx$$

二次近似

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx$$

$\vdots$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx$$

当  $n \rightarrow +\infty$ , 则  $y_n(x) \rightarrow y(x)$ 。

于是,可写出  $K$  点诸元的迭代形式的联立方程组

$$\begin{cases} v_{Kn} = u_{\text{eff}} K(\mu_K) - \alpha_{n-1} K(\mu_K) R(v_{Kn-1}) - gt_p \sin \theta_{n-1} \\ \xi(\theta_{Kn}) = \xi(\theta_0) - \frac{gt_p K(\mu_K)}{\mu_K v_{Kn}} [K_2(\mu_K) - K_2(\mu_0)] \\ y_{Kn} = \frac{t_p v_{Kn} \sin \theta_n}{\mu_K K(\mu_K)} K_1(\mu_K) \end{cases} \quad (2.34)$$

为简化书写形式,现将有关常量记为如下符号:

$$v_p = u_{\text{eff}} K(\mu_K) \quad (\text{表示不计阻力和重力时的火箭最大速度})$$

$$B_1 = \frac{t_p c_0}{\mu_K} K(\mu_K)$$

$$B_2 = gt_p \quad (2.35)$$

$$B_3 = \frac{gt_p}{\mu_K} K(\mu_K) [K_2(\mu_K) - K_2(\mu_0)]$$

$$B_4 = \frac{t_p}{\mu_K K(\mu_K)} K_1(\mu_K)$$

于是式(2.34) 具有简单形式



$$\begin{cases} v_{Kn} = v_P - B_1 H_{n-1}(\gamma) R(v_{Kn-1}) - B_2 \sin \theta_{n-1} \\ \xi(\theta_{Kn}) = \xi(\theta_0) - \frac{B_3}{v_{Kn}} \\ y_{Kn} = B_4 v_{Kn} \sin \theta_n \end{cases} \quad (2.36)$$

对方程组(2.36)的计算顺序如下:

### 1. 常量计算

- (1) 计算  $\mu_K$ 、 $K(\mu_K)$ 、 $\beta_0$  并进而计算  $\mu_0$ ;
- (2) 查表:  $K_1(\mu_K)$ 、 $K_2(\mu_K)$ 、 $K_2(\mu_0)$ 、 $\xi(\theta_0)$ ;
- (3) 计算  $v_P$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$ 、 $B_4$ 。

### 2. 一次近似

- (1)  $v_{K1} = v_P - B_2 \sin \theta_0$ , 查表得  $R(v_{K1})$ ;
- (2)  $\xi(\theta_{K1}) = \xi(\theta_0) - B_3/v_{K1}$ , 查表得  $\theta_{K1}$ , 计算  $\theta_1 = (\theta_0 + \theta_{K1})/2$ ;
- (3)  $y_{K1} = B_4 v_{K1} \sin \theta_1$ , 得到  $H_1(\gamma) = [1 + 3H(y_{K1})]/4$ 。

### 3. 二次近似

- (1)  $v_{K2} = v_P - B_1 H_1(\gamma) R(v_{K1}) - B_2 \sin \theta_1$ , 查表得  $R(v_{K2})$ ;
- (2)  $\xi(\theta_{K2}) = \xi(\theta_0) - \frac{B_3}{v_{K2}}$ ,  $\theta_2 = \frac{\theta_0 + \theta_{K2}}{2}$ ;
- (3)  $y_{K2} = B_4 v_{K2} \sin \theta_2$ 。

如此继续下去,直到  $n$  次近似值和  $(n-1)$  次近似值相差在允许的范围为止。一般应保证  $v_{Kn}$  和  $v_{Kn-1}$  之差在  $1 \text{ m/s}$  之内。最后根据式(2.32)计算出  $x_K$ 。

**例题 2.1** 已知某火箭弹  $d = 122 \text{ mm}$ ,  $m_0 = 49.0 \text{ kg}$ ,  $m_P = 9.40 \text{ kg}$ ,  $t_P = 0.640 \text{ s}$ ,  $u_{\text{eff}} = 1960 \text{ m/s}$ ,  $s_0 = 3 \text{ m}$ ,  $i = 1.50$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$ 。求主动段终点弹道诸元。

**解** 1. 常量计算

$$(1) \mu_K = \frac{m}{m_0} = \frac{9.40}{49.0} = 0.1918$$

$$K(\mu_K) = \ln \frac{1}{1 - \mu_K} = \ln \frac{1}{1 - 0.1918} = \ln 1.237 = 0.2127$$

$$\beta_0 = \frac{t_P}{\mu_K} g \sin \theta_0 = \frac{0.640}{0.1918} \times 9.80 \times 0.707 = 23.1$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2s_0\mu_K}{t_P(u_{\text{eff}} - \beta_0)}} = \sqrt{\frac{2 \times 3 \times 0.1918}{0.640(1960 - 23)}} = 0.0305$$

### (2) 查表

$$K_1(\mu_K) = 197 \times 10^{-4}; K_2(\mu_K) = 2.863; K_2(\mu_0) = 1.103; \xi(\theta_0) = 0.88137$$

$$(3) v_P = u_{\text{eff}} K(\mu_K) = 1960 \times 0.2127 = 417.5$$





$$B_1 = \frac{t_P c_0}{\mu_K} K(\mu_K) = \frac{0.640}{0.1918} \times \frac{1.50 \times 0.122^2}{49.0} \times 10^3 \times 0.2127 = 0.324$$

$$B_2 = g t_P = 9.80 \times 0.640 = 6.27$$

$$B_3 = \frac{g t_P}{\mu_K} K(\mu_K) [K_2(\mu_K) - K_2(\mu_0)] = \frac{6.27}{0.1918} \times 0.2127 (2.863 - 1.103) = 12.25$$

$$B_4 = \frac{t_P}{\mu_K K(\mu_K)} K_1(\mu_K) = \frac{0.640}{0.1918 \times 0.2127} \times 197 \times 10^{-4} = 0.309$$

2. 一次近似

$$v_{K1} = v_P - B_2 \sin \theta_0 = 417.5 - 6.27 \sin 45^\circ = 413.1$$

查表  $R(v_{K1}) = 7.21$

$$\xi(\theta_{K1}) = \xi(\theta_0) - \frac{B_3}{v_{K1}} = 0.88137 - \frac{12.25}{413.1} = 0.85172$$

得  $\theta_{K1} = 43^\circ 47'$ ,  $\theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_{K1}) = \frac{1}{2}(45^\circ + 43^\circ 47') = 44^\circ 24'$

$$y_{K1} = B_4 v_{K1} \sin \theta_1 = 0.309 \times 413.1 \times \sin 44^\circ 24' = 89.3$$

查表得

$$H(y_{K1}) = 0.9914, H_1(y) = \frac{1}{4}[1 + 3H(y_{K1})] = \frac{1}{4}(1 + 3 \times 0.9914) = 0.9936$$

3. 二次近似

$$v_{K2} = v_P - B_1 H_1(y) R(v_{K1}) - B_2 \sin \theta_1 =$$

$$417.5 - 0.324 \times 0.9936 \times 7.21 - 6.27 \times \sin 44^\circ 24' = 410.8$$

查表  $R(v_{K2}) = 7.08$

$$\xi(\theta_{K2}) = \xi(\theta_0) - \frac{B_3}{v_{K2}} = 0.88137 - \frac{12.25}{410.8} = 0.85155$$

得

$$\theta_{K2} = 43^\circ 47'; \theta_2 = \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_{K2}) = 44^\circ 24'$$

$$y_{K2} = B_4 v_{K2} \sin \theta_2 = 0.309 \times 410.08 \times \sin 44^\circ 24' = 89.0$$

查表得

$$H(y_{K2}) = 0.9915, H_1(y) = \frac{1}{4}[1 + 3H(y_{K2})] = 0.9936$$

4. 三次近似

$$v_{K3} = v_P - B_1 H_2(y) R(v_{K2}) - B_2 \sin \theta_2 =$$

$$417.5 - 0.324 \times 0.9936 \times 7.08 - 6.27 \times \sin 44^\circ 24' = 410.8$$

因为算得  $v_{K3} = v_{K2}$ ,  $\theta_{K2} = \theta_{K1}$ , 故不用再算了。由此得

$$v_K = 410.8 \text{ m/s}, \theta_K = 43^\circ 47', y_K = 89 \text{ m}$$

最后根据式(2.32)和(2.33), 得



$$x_K = y_K \times \frac{1}{4} (3 \cot \theta_K + \cot \theta_0) = 89.0 \times \frac{1}{4} (3 \times \cot 43^\circ 47' + \cot 45^\circ) = 92 \text{ m}$$

## 2.4 增程弹道增速段解法

增程弹一般用火炮发射,使弹丸具有比较高的初速  $v_0$ 。飞离炮口一段路程后,火箭发动机开始点火,此点火位置以  $H$  表示(图 2.2)。从  $H$  点开始到发动机工作完毕这一段弹道叫主动段或增速段,增速段时间是  $t_p$ 。增速段弹道诸元的增量以如下符号表示:

$$\begin{cases} v_{KH} = v_K - v_H \\ \theta_{KH} = \theta_K - \theta_H \\ y_{KH} = y_K - y_H \\ x_{KH} = x_K - x_H \end{cases} \quad (2.37)$$

对  $v_{KH}$ 、 $\theta_{KH}$ 、 $y_{KH}$  和  $x_{KH}$  计算,原则上可以运用上面野战火箭主动段解法的思路,只是现在需要注意积分的初始条件不是零值罢了。就速度公式而言,当式(2.21)考虑到初始条件为

$$v|_{\mu=0} = v_H$$

时,则得

$$v_{KH} = u_{\text{eff}} K(\mu_K) - \frac{\alpha}{u_{\text{eff}}} [L(v_K) - L(v_H)] - \beta \mu_K \quad (2.38)$$

式中

$$u_{\text{eff}}^* = \frac{v_{KH}}{K(\mu_K)} \quad (2.39)$$

$\beta$  中的  $\theta$  仍取为

$$\theta = \frac{1}{2} (\theta_H + \theta_K) \quad (2.40)$$

$\alpha$  中的  $y$  可取更简单的形式为

$$y = \frac{1}{2} (y_H + y_K) \quad (2.41)$$

对  $\theta_{KH}$  计算,由于点火时的速度  $v_H$  比较大,  $\theta_{KH}$  的数值比之野战火箭弹主动段倾角变化值要小,故可采取更简单方法计算。直接从方程组(2.1)第②式

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{g \cos \theta}{v}$$

取  $v$  和  $\theta$  为某一平均值时,得

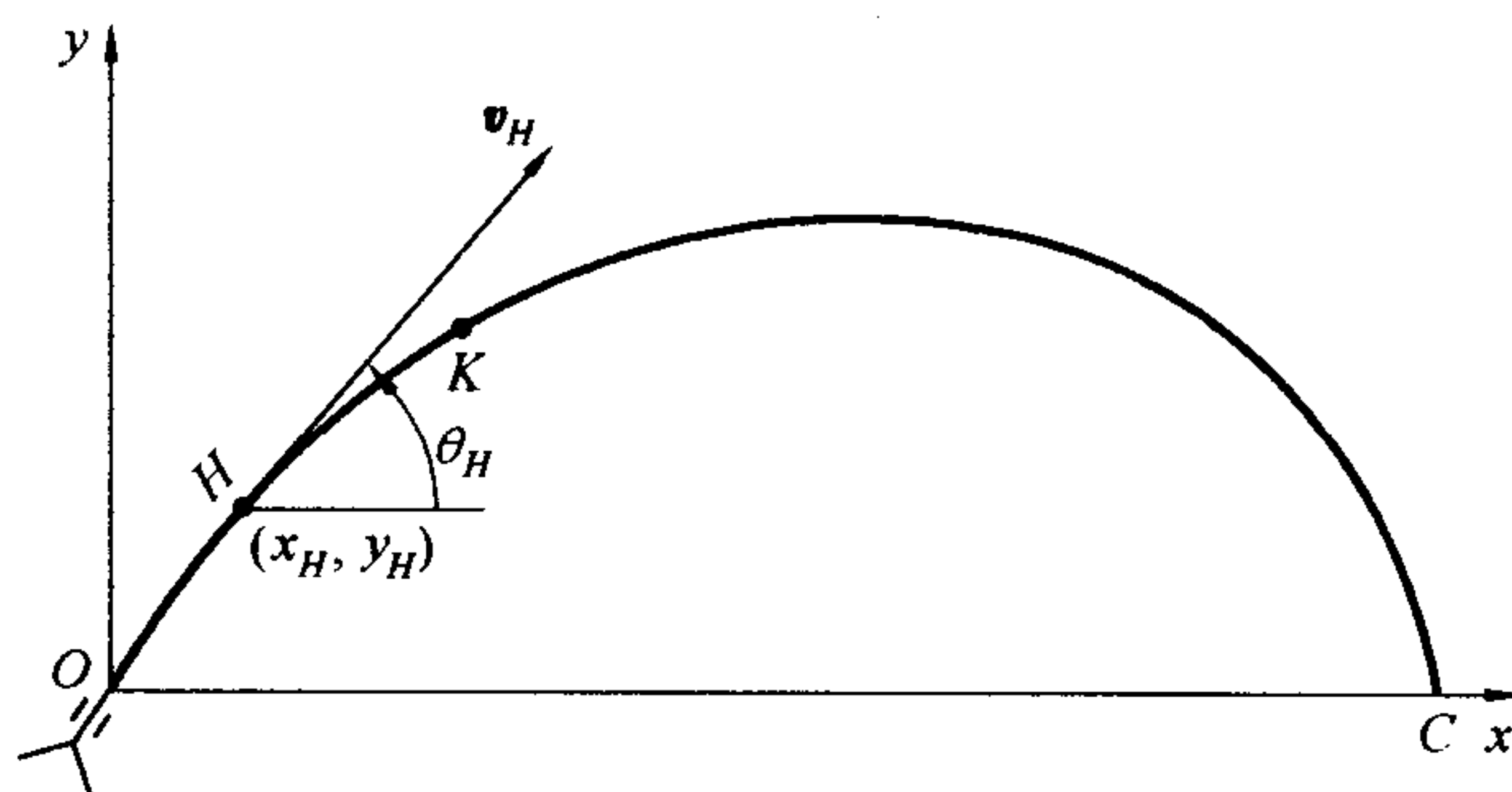


图 2.2 火箭增程弹弹道





$$\theta_{KH} = - \frac{g \cos \theta}{v} t_P \quad (2.42)$$

式中  $\theta$  按式(2.40) 计算, 而

$$v = \frac{1}{2}(v_H + v_K) \quad (2.43)$$

对  $y_{KH}$  计算, 仍由式(2.9)③ 式积分, 只要注意到速度  $v$  的表达式为

$$v = v_H + u_{\text{eff}}^* K(\mu) \quad (2.44)$$

于是对式(2.9)③ 式积分可得

$$y_{KH} = (v_H t_P + B_4 v_{KH}) \sin \theta \quad (2.45)$$

而  $x_{KH}$  为

$$x_{KH} = y_{KH} \cot \theta \quad (2.46)$$

式(2.45)、(2.46) 中的  $\theta$  均由式(2.40) 确定。

综合上述, 按逐次逼近法写成迭代形式的方程组为

$$\begin{cases} v_{KHn} = v_P - B_1 H(y_{n-1}) \frac{L(v_{Kn-1}) - L(v_H)}{v_{KHn-1}} - B_2 \sin \theta_{n-1} \\ \theta_{KHn} = - B_2 \frac{\cos \theta_{n-1}}{v_n}, v_n = v_H + \frac{1}{2} v_{KHn} \\ y_{KHn} = (v_H t_P + B_4 v_{KHn}) \sin \theta_n, \theta_n = \theta_H + \frac{1}{2} \theta_{KHn} \end{cases} \quad (2.47)$$

## 第三章 火箭弹道被动段解法

### 3.1 前言

火箭在被动段内,仅受到空气阻力和重力作用,其质心运动规律与普通炮弹弹道是一样的。炮弹弹道由  $c$ 、 $v_0$ 、 $\theta_0$  三个参数确定,并已编成了《地面火炮外弹道表》,用以查取弹道顶点和落点诸元。但火箭被动段的起点是  $K$  点,多了一个影响弹道的  $y_K$ ,所以被动段由  $c_K$ 、 $v_K$ 、 $\theta_K$ 、 $y_K$  四个参数确定。由于编制四个参数的表过于繁杂,故对被动段的计算还要求解质心运动微分方程组。然而,基于被动段与炮弹弹道的共性,在考虑到  $y_K$  影响的前提下,可以充分利用现有的地炮外弹道表来解决被动段顶点和落点诸元的计算问题。常用解法有弹道分段解法和虚速法。此外,对反坦克火箭弹及反坦克增程弹弹道,还要用到适用于低伸弹道计算的西亚切解法。

### 3.2 分段解法

如图 3.1 所示,过  $K$  点作水平面,与被动段交点为  $L$ ,则被动段分成两部分: $KSL$ ——习惯上称为“被动段”; $LC$ ——被动结束段。

#### 3.2.1 被动段 $KSL$ 的弹道解法

火箭在这一段的运动,相当于将火炮放在  $K$  点发射的炮弹运动。当其他条件相同时,这时炮弹所受到的空气阻力比从地面发射时小,如果直接用  $c_K$ 、 $v_K$ 、 $\theta_K$  三个参量查地炮外弹道表所得到的这部分射程  $X_L$  将会比实际的要小。因为这部分弹道比地炮弹道高出了  $y_K$  这一高度之故。正因为高出了  $y_K$ ,则任意点的空气阻力加速度都减小了一些。在任意点  $N$  的阻力加速度比在地面上的  $K'$  点发射时要小的程度,可以从阻力加速度的表达式看出。由于

$$a_x = c_K H(y) F(v, c_s) = c_K H(y_K + y_N) F(v, c_s)$$

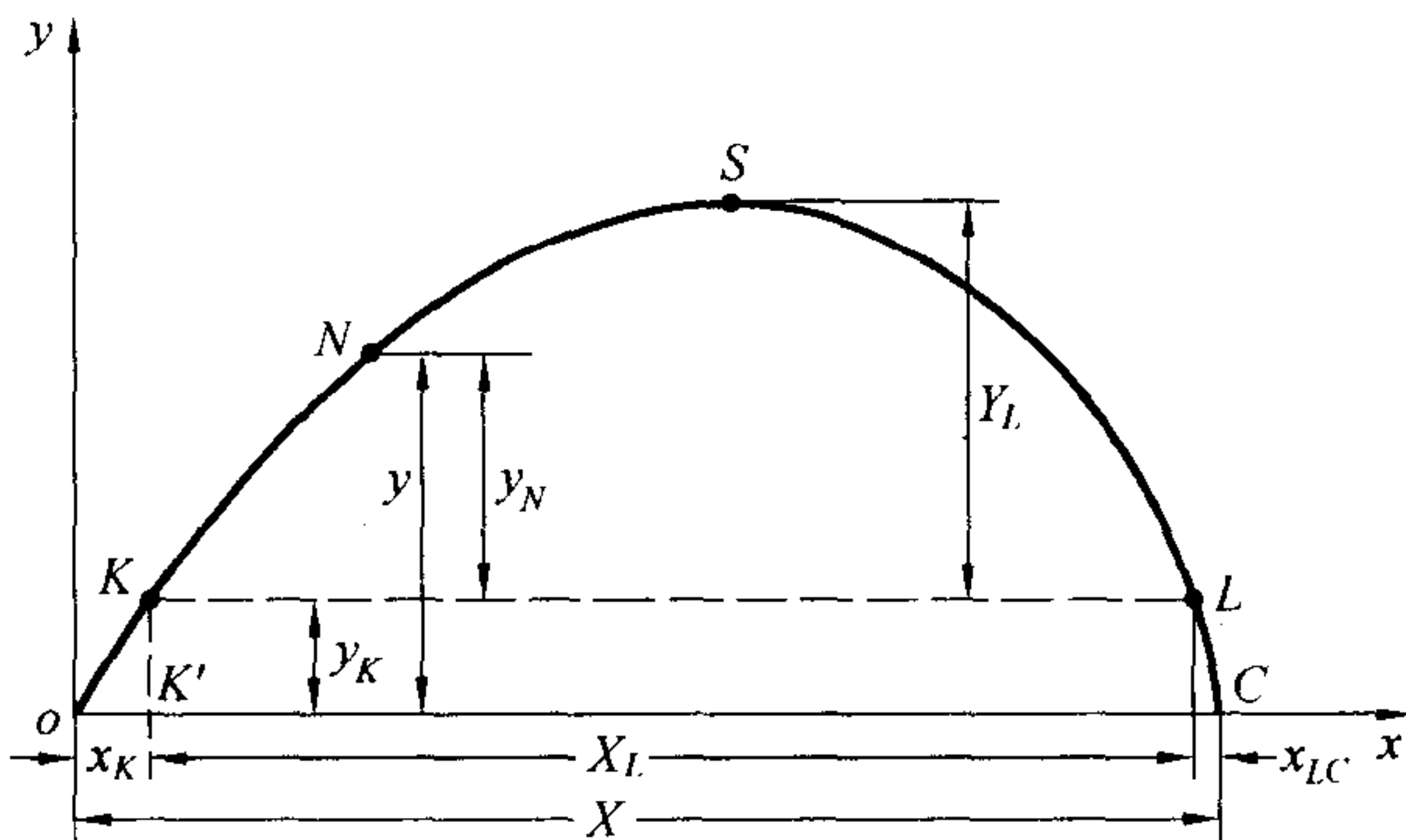


图 3.1 弹道分段





而  $H(y)$  利用近似表达式(1.37),其值为

$$H(y) = \exp(-\beta' y)$$

故  $H(y_K + y_N) = \exp[-\beta'(y_K + y_N)] = \exp(-\beta' y_K) \exp(-\beta' y_N) = H(y_K) H(y_N)$

从而  $a_x = c_K H(y_K) H(y_N) F(v, c_s)$

记  $c_K^* = c_K H(y_K)$  (3.1)

则  $a_x = c_K^* H(y_N) F(v, c_s)$  (3.2)

上式说明,在  $K$  点发射时,若忽略  $y_K$  引起的声速的变化,弹道上任一点所受阻力加速度为地面发射时的  $H(y_K)$  倍。由于弹道系数和空气密度函数均与阻力加速度成正比关系,故可以把  $H(y)$  的减小量看作是弹道系数的减小量。这样一来,火箭从  $K$  点发射由  $c_K, v_K, \theta_K, y_K$  所决定的弹道  $KSL$  就与从地面上发射由  $c_K^*, v_K, \theta_K$  所确定的火炮弹道一样了。不言而喻,由  $c_K^*, v_K, \theta_K$  查地炮外弹道表,就可以得到以  $K$  点为坐标原点的顶点  $S$  和  $L$  点弹道诸元:  $X_L, Y_L, T_L, v_L, |\theta_L|$ 。

### 3.2.2 被动结束段 $LC$ 的弹道计算

分三种情况,一是对  $|\theta_L|$  很小的低伸弹道要用到下面将介绍的西亚切解法;二是  $|\theta_L|$  不是很小,而  $y_K$  也不大时,可把  $LC$  当作直线处理;三是  $|\theta_L|$  不是很小,而  $y_K$  较大时,要用级数解。

对第二种情形,易知

$$x_{LC} = y_K \cot |\theta_L| \quad (3.3)$$

该段的飞行时间为

$$t_{LC} = \frac{y_K}{v_L \sin |\theta_L|} \quad (3.4)$$

对第三种情形,不妨选取  $K'$  为新的坐标原点,将  $KSLC$  用弹道曲线  $y = f(x)$  表示,对此在  $x = X_L$  处邻域内展成泰勒级数

$$y = f(X_L) + f'(X_L) \Delta x + f''(X_L) \frac{(\Delta x)^2}{2!} + f'''(X_L) \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.5)$$

式中

$$\begin{cases} f(X_L) = y_L = y_K \\ f'(X_L) = \left( \frac{dy}{dx} \right) = \tan \theta_L = -\tan |\theta_L| \\ f''(X_L) = \left( -\frac{d \tan \theta}{dx} \right)_L = -\frac{g}{v_{xL}^2} = -\frac{g}{v_L^2 \cos^2 \theta_L} \\ f'''(X_L) = \left[ \frac{d}{dx} \left( -\frac{g}{v_x^2} \right) \right]_L = \frac{2g}{v_{xL}^3} \cdot \frac{dv_x}{dx} \Big|_L = \\ -\frac{2g}{v_L^3 \cos^3 \theta_L} c_K H(y_K) G(v_L, c_{sL}) \end{cases} \quad (3.6)$$



对四阶以上导数可以略而不计。将式(3.6)代入式(3.5),并取 $\Delta x = x_{LC}$ ,即取 $x = X_L + x_{LC}$ 时, $y = y_C = 0$ ,那么式(3.5)成为下式

$$y_K = \tan |\theta_L| x_{LC} + \frac{g}{2v_L^2 \cos^2 \theta_L} x_{LC}^2 + \frac{gc_K H(y_K) G(v_L, c_{sL})}{3v_L^3 \cos^3 \theta_L} x_{LC}^3 \quad (3.7)$$

解代数方程(3.7)就可以得到 $x_{LC}$ 。显然式(3.3)是式(3.7)的最简单情况。

### 3.2.3 火箭弹道顶点和落点诸元

根据上面求得的结果,可得全弹道有关诸元为

$$\begin{cases} X = x_K + X_L + x_{LC} \\ Y = y_K + Y_L \\ T = t_K + T_L + t_{LC} \\ v_C \approx v_L \\ \theta_C \approx \theta_L \end{cases} \quad (3.8)$$

### 3.2.4 简短的评价

这种解法计算简单而迅速,尤其在火箭弹方案设计,或对准确性要求不很高的弹道计算中,常用此法。但有一定误差,来源于以下两方面:

- (1) 声速 $c_s$ 因高度 $y_K$ 引起的变化,在把 $KSL$ 当作地炮弹道计算时未进行修正。
- (2) 对空气密度函数用了近似公式(1.37),也带来误差,其误差大小可见下表。

$y/m$	$H(y)$	$y_K/m$	$H(y_K)$	$H(y - y_K) = H(y_N)$	$H(y_K)H(y_N)$	误差
3 000	0.741	500	0.953	0.781	0.744	0.4%
		1 000	0.907	0.821	0.745	0.5%
4 000	0.668	500	0.953	0.704	0.671	0.4%
		1 000	0.907	0.741	0.673	0.7%
		1 500	0.863	0.781	0.674	0.9%

由上表可知, $y_K$ 不大时,误差是很小的;当 $y_K$ 较大时,误差会增加。

对 $y_K$ 影响的全面修正法,可以利用朗日文定理(参阅《外弹道学》)。

**例题 3.1** 已知某火箭弹弹道 $K$ 点诸元及有关参数为: $c_K = 0.564$ , $v_K = 410.8$  m/s, $\theta_K = 43^\circ 47'$ , $y_K = 89$  m, $x_K = 92$  m, $t_K = 0.64$  s,求其弹道顶点和落点诸元。

**解** 1.  $X_L$ 、 $Y_L$ 、 $v_L$ 、 $|\theta_L|$ 、 $T_L$ 等计算,用第一章1.9节的列表法

$$c_K^* = c_K H(y_K) = 0.564 \times 0.991 = 0.559$$

由 $c_K^*$ 、 $v_K$ 、 $\theta_K$ 查地炮外弹道表,查得诸量及插值结果列出表格。



2. 被动结束段计算

由于  $y_K$  较小,  $|\theta_L|$  较大, 可用式(3.3)、式(3.4) 计算

$$x_{LC} = y_K \cot |\theta_L| = 89 \cot 51^\circ 38' = 70 \text{ m}$$

$$t_{LC} = \frac{y_K}{v_L \sin |\theta_L|} = \frac{89}{281 \times \sin 51^\circ 38'} = 0.404 \text{ s}$$

3. 全弹道落点和顶点诸元

$$X = x_K + X_L + x_{LC} = 92 + 10\,459 + 70 = 10\,621 \text{ m}$$

$$Y = y_K + y_L = 89 + 2\,904 = 2\,993 \text{ m}$$

$$T = t_K + T_L + t_{LC} = 0.64 + 48.33 + 0.40 = 49.37 \text{ s}$$

$$v_C \approx v_L = 281 \text{ m/s}$$

$$|\theta_C| \approx |\theta_L| = 51^\circ 38'$$

诸 元	$\theta_K$	40°			43°47'	45°		
	$\frac{v_0}{c} / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	400	410.8	420	410.8	400	410.8	420
$X_L / \text{m}$	0.55	10 168	10 430	10 654	10 459	10 272	10 537	10 763
	0.559		10 380				10 485	
	0.60	9 904	10 151	10 361		9 997	10 246	10 458
$Y_L / \text{m}$	0.55	2 452	2 530	2 597	2 904	2 945	3 038	3 119
	0.559		2 521				3 027	
	0.60	2 407	2 482	2 546		2 889	2 978	3 054
$v_L / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	0.55	276	278.7	281	281	280	283.2	286
	0.559		277.6				282.1	
	0.60	270	272.7	285		274	277.2	280
$ \theta_L $	0.55	47°37'	47°52'	48°04'	51°38'	52°31'	52°44'	52°55'
	0.559		47°57'				52°49'	
	0.60	48°05'	48°20'	48°32'		52°58'	53°11'	53°22'
$T_L / \text{s}$	0.55	44.47	45.12	45.68	48.33	48.76	49.47	50.08
	0.559		45.04				49.38	
	0.60	44.06	44.68	45.21		48.30	48.98	49.56

3.3 虚 速 法

3.3.1 虚速法的实质

虚速法又名等效弹道法。其关键在于寻求具有同火箭被动段同样弹道系数的等效炮弹发射条件——初速  $\tilde{v}_0$  和射角  $\tilde{\theta}_0$ 。如果这一炮弹飞达  $K$  点时,亦具有速度  $v_K$  和倾角  $\theta_K$ ,那么  $K$  点



之后,该炮弹弹道便与火箭被动段完全重合。根据弹道特性,是容易理解的。因为由  $c_K$ 、 $v_K$ 、 $\theta_K$ 、 $y_K$  所确定的火箭被动段是惟一的,这就必然导致了两条弹道的一致性。这种一致性,归根于二者都遵循同样的微分方程组(1.62)所确定的运动规律。至于如何求得等效炮弹的发射条件,也是容易解决的。根据微分方程组

$$\begin{cases} * \frac{dv}{dt} = -c_K H(y) F(v, c_s) - g \sin \theta & \text{①} \\ * \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v} & \text{②} \\ * \frac{dy}{dt} = v \sin \theta & \text{③} \\ \frac{dx}{dt} = v \cos \theta & \text{④} \end{cases} \quad (3.9)$$

在已知条件  $c_K$ 、 $v_K$ 、 $\theta_K$ 、 $y_K$  下进行数值积分,便可求出等效炮弹的发射条件  $\tilde{v}_0$  和  $\tilde{\theta}_0$  以及发射点  $\tilde{o}$  到  $K$  点的水平距离  $\tilde{x}_K$  (图 3.2) 等,习惯上称  $\tilde{v}_0$  为虚初速,称  $\tilde{\theta}_0$  为虚射角。于是由  $c_K$ 、 $\tilde{v}_0$ 、 $\tilde{\theta}_0$  三个参量查地炮外弹道表得到等效炮弹弹道的顶点和落点诸元:

$$\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{T}, \tilde{v}_C, \tilde{\theta}_C$$

因而,实际火箭弹道落点和顶点诸元便为

$$\begin{cases} X = \tilde{X} - \tilde{x}_K + x_K \\ Y = \tilde{Y} \\ T = \tilde{T} - \tilde{t}_K + t_K \\ v_C = \tilde{v}_C \\ |\theta_C| = |\tilde{\theta}_C| \end{cases} \quad (3.10)$$

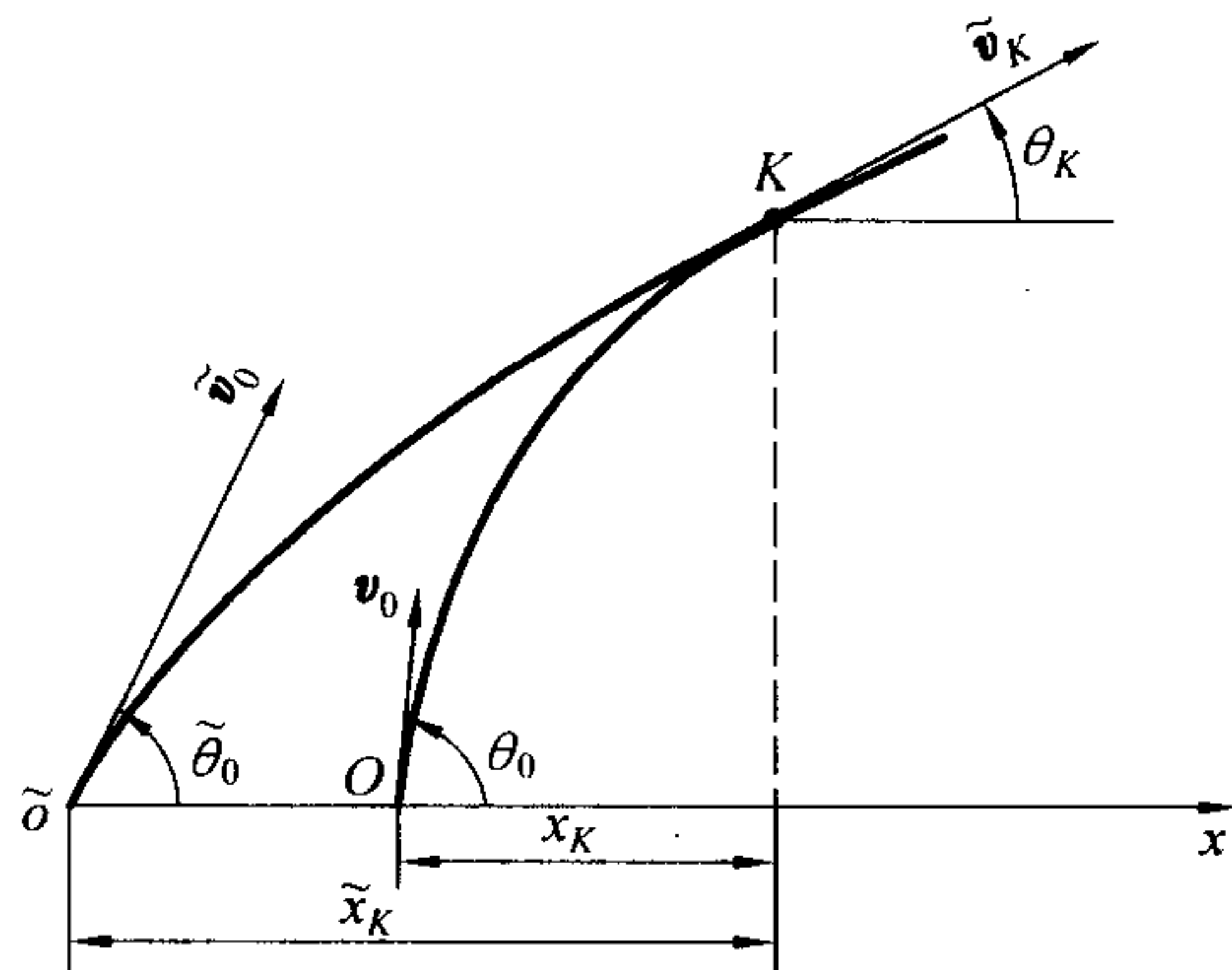


图 3.2 等效炮弹的发射条件

综合上述,虚速法就是把火箭被动段看作某等效炮弹弹道的一部分,求得炮弹发射条件后,利用地炮外弹道表间接可获得火箭弹道有关弹道诸元的方法。

### 3.3.2 $\tilde{v}_0$ 、 $\tilde{\theta}_0$ 、 $\tilde{t}_K$ 和 $\tilde{x}_K$ 的近似计算

现介绍一种利用微分方程组(3.9)来求解  $\tilde{v}_0$ 、 $\tilde{\theta}_0$ 、 $\tilde{t}_K$  和  $\tilde{x}_K$  的解析方法。无疑,这需要对方程组作某些近似处理,才能达到求解目的。方程组(3.9)中,  $F(v, c_s)$  是一个随  $v$  递增的函数,需要把重点放在对它的处理上;而且,无论哪一种弹道近似解法,都差不多把重点放在这一问题





上。由于在  $y_K$  范围内的声速  $c_s$  变化甚小,可取地面标准值,于是  $F(v, c_s) = F(v)$ 。这里,将把  $F(v)$  用直线型函数替代,因为考虑到  $\tilde{v}_0$  与  $\tilde{v}_K$  相差不会很大,加之  $F(v)$ - $v$  曲线变化比较平缓,尤其是在  $v > 350$  m/s 时与直线较为接近,这可从图 1.10 看出来。总之,在  $v_K$  和  $\tilde{v}_0$  的范围之内,用直线型函数代替  $F(v)$ - $v$  的实际函数是完全可以的。不妨采取如下形式

$$F(v) = -F_0 + F'v \quad (3.11)$$

式中,  $F_0$  和  $F'$  是依据所取  $v$  的区间而确定的常数,可由表 3.1 查取。查表时,须考虑到  $\tilde{v}_0$  比  $v_K$  为大。 $v_K$  一般不应大于所取速度范围的中间速度,以保证能使  $v_K$  和  $\tilde{v}_0$  在同一区间之内。

表 3.1  $F_0$  与  $F'$  与  $v$  的关系

$v/(m \cdot s^{-1})$	$F_0(m \cdot s^2 \cdot kg^{-1})$	$F'(m^2 \cdot s \cdot kg^{-1})$	$v/(m \cdot s^{-1})$	$F_0(m \cdot s^2 \cdot kg^{-1})$	$F'(m^2 \cdot s \cdot kg^{-1})$
100 ~ 200	1.79	0.0239	400 ~ 600	27.3	0.144
150 ~ 250	3.22	0.0415	500 ~ 700	31.0	0.148
200 ~ 300	8.28	0.0524	600 ~ 800	40.0	0.162
280 ~ 330	56.0	0.214	700 ~ 900	53.8	0.180
300 ~ 370	64.9	0.241	800 ~ 1 000	74.9	0.203
330 ~ 400	40.2	0.173	900 ~ 1 100	95.0	0.226
350 ~ 450	30.0	0.148	1 000 ~ 1 200	125.0	0.253

为求  $\tilde{v}_0$ , 用式(3.9)③式去除 ①式, 并将式(3.11)代入得

$$\frac{dv}{dy} = \frac{B_0 - B'v}{v \sin \theta} \quad (3.12)$$

式中

$$\begin{aligned} B_0 &= c_K H(y) F_0 - g \sin \theta \\ B' &= c_K H(y) F' \end{aligned} \quad (3.13)$$

在下面的积分过程中, 可把  $B_0$  和  $B'$  取为常量, 且取

$$\begin{cases} \theta = \bar{\theta}^{\text{①}} = \frac{\theta_K + \tilde{\theta}_0}{2} \\ y = \bar{y} = \frac{y_K}{2} \end{cases} \quad (3.14)$$

将式(3.12)分离变量积分, 得

$$\int_{\tilde{v}_0}^{v_K} \frac{v dv}{1 - \frac{B'}{B_0} v} = \frac{B_0}{\sin \bar{\theta}} \int_0^{y_K} dy$$

由积分表中的积分公式可得

① 以后凡符号顶上加横线“—”者, 一般表示平均值, 只有个别情况例外。



$$\left(\frac{B'}{B_0}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{B'}{B_0} v_K - \ln \left| 1 - \frac{B'}{B_0} v_K \right| \right) - \left(1 - \frac{B'}{B_0} \tilde{v}_0 - \ln \left| 1 - \frac{B'}{B_0} \tilde{v}_0 \right| \right) \right] = \frac{B_0}{\sin \tilde{\theta}} y_K$$

现已编成一个函数表(附表 12), 定义为

$$\phi(x) = 1 - x - \ln |1 - x| \quad (3.15)$$

则得

$$\phi\left(\frac{B'}{B_0} \tilde{v}_0\right) = \phi\left(\frac{B'}{B_0} v_K\right) - \frac{B'^2}{B_0 \sin \tilde{\theta}} y_K \quad (3.16)$$

下面再求  $\tilde{\theta}_0$ , 用式(3.9)① 式除 ② 式, 并将式(3.11) 和(3.13) 代入, 得

$$\frac{d\theta}{dv} = - \frac{g \cos \theta}{(B_0 - B'v)v}$$

分离变量并积分

$$\int_{\tilde{\theta}_0}^{\theta_K} \frac{d\theta}{\cos \theta} = - \frac{g}{B_0} \int_{\tilde{v}_0}^{v_K} \frac{dv}{\left(1 - \frac{B'}{B_0} v\right)v}$$

利用积分公式

$$\int \frac{dx}{x(a + bx)} = - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + bx}{x} \right|$$

得

$$\xi(\tilde{\theta}_0) = \xi(\theta_K) - \frac{g}{B_0} \ln \frac{\tilde{v}_0 \left(1 - \frac{B'}{B_0} v_K\right)}{v_K \left(1 - \frac{B'}{B_0} \tilde{v}_0\right)} \quad (3.17)$$

为了求  $\tilde{t}_K$ , 由式(3.9)① 式

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{B_0 - B'v}$$

则

$$\int_0^{\tilde{t}_K} dt = \int_{\tilde{v}_0}^{v_K} \frac{dv}{B_0 - B'v} = - \frac{1}{B'} \ln |B_0 - B'v| \Big|_{\tilde{v}_0}^{v_K}$$

故

$$\tilde{t}_K = \frac{1}{B'} \ln \frac{1 - \frac{B'}{B_0} \tilde{v}_0}{1 - \frac{B'}{B_0} v_K} \quad (3.18)$$

而

$$\tilde{x}_K = y_K \cot \theta_0^* \quad (3.19)$$

根据经验, 此处  $\theta^*$  取为加权值

$$\theta^* = \theta_K + 0.55(\tilde{\theta}_0 - \theta_K) \quad (3.20)$$

**例题 3.2** 用例题 3.1 的数据, 以虚速法求弹道顶点和落点诸元。





解 1. 一次近似

(1) 求  $\tilde{v}_0$

$$\bar{y} = \frac{y_K}{2} = 44.5; H(\bar{y}) = 0.9956, \text{查取 } F_0 = 30.0, F' = 0.148$$

$$B_0 = c_K H(\bar{y}) F_0 - g \sin \theta_K = 0.564 \times 0.9956 \times 0.30 - 9.80 \sin 43^\circ 47' = 10.07$$

$$B' = c_K H(\bar{y}) F' = 0.564 \times 0.9956 \times 0.148 = 0.0831$$

$$\left( \frac{B'}{B_0} \right) v_K = \frac{0.0831 \times 410.8}{10.07} = 3.390$$

$$\frac{B'^2 y_K}{B_0 \sin \theta} = \frac{(0.0831)^2 \times 89}{10.07 \times \sin 43^\circ 47'} = 0.0882$$

$$\phi\left(\frac{B' v_K}{B_0}\right) = \phi(3.390) = -3.2613$$

$$\phi\left(\frac{B' \tilde{v}_0}{B_0}\right) = -3.2613 - 0.0882 = -3.3495$$

反查  $\phi(x)$  表, 得  $B' \tilde{v}_0 / B_0 = 3.4524$ , 由此得虚初速为

$$\tilde{v}_0 = \frac{3.4524 \times 10.07}{0.0831} = 418.4 \text{ m/s}$$

(2) 求  $\tilde{\theta}_0$

$$\xi(\theta_K) = 0.85209$$

$$\frac{g}{B_0} \ln \frac{\tilde{v}_0 \left(1 - \frac{B'}{B_0} v_K\right)}{v_K \left(1 - \frac{B'}{B_0} \tilde{v}_0\right)} = \frac{9.80}{10.07} \ln \frac{418.4(1 - 3.390)}{410.8(1 - 3.4524)} = -0.007171$$

$$\xi(\tilde{\theta}_0) = 0.85209 - (-0.007171) = 0.85926$$

查表得  $\tilde{\theta}_0 = 44^\circ 06'$

查表得

2. 二次近似

(1) 求  $\tilde{v}_0$

$$B_0 = c_K H\left(\frac{y_K}{2}\right) F_0 - g \sin \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_0 + \theta_K) = 16.85 - 6.80 = 10.05$$

$$B' = 0.0831; \frac{B' v_K}{B_0} = \frac{0.0831 \times 410.8}{10.05} = 3.397$$

$$\frac{B'^2 y_K}{B_0 \sin \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_0 + \theta_0)} = 0.08812$$



$$\phi\left(\frac{B'v_K}{B_0}\right) = -3.2712; \phi\left(\frac{B'\tilde{v}_0}{B_0}\right) = -3.2712 - 0.0881 = -3.3593$$

反查表得  $B'\tilde{v}_0/B_0 = 3.4593$ , 则  $\tilde{v}_0 = 418.4 \text{ m/s}$ 。

(2) 求  $\tilde{\theta}_0$

$$\frac{g}{B_0} \ln \frac{\tilde{v}_0 \left(1 - \frac{B'}{B_0} v_K\right)}{v_K \left(1 - \frac{B'}{B_0} \tilde{v}_0\right)} = \frac{9.80}{10.05} \ln \frac{418.4(1 - 3.397)}{410.8(1 - 3.4593)} = -0.007184$$

$$\xi(\tilde{\theta}_0) = 0.85209 - (-0.007184) = 0.85927$$

$$\tilde{\theta}_0 = 44^\circ 06'$$

由于二次近似与一次近似已相等(或者可略有误差), 故以二次近似中求得的结果作为需求值, 即

$$\tilde{v}_0 = 418.4 \text{ m/s}, \quad \tilde{\theta}_0 = 44^\circ 06'$$

3. 求  $x_K$

$$\theta^* = \theta_K + 0.55(\tilde{\theta}_0 - \theta_K) = 43^\circ 57'$$

$$\tilde{x}_K = y_K \cot \theta^* = 89 \times \cot 43^\circ 57' = 92.3 \text{ m}$$

4. 求  $t_K$

$$\tilde{t}_K = \frac{1}{B'} \ln \frac{1 - \frac{B'}{B_0} \tilde{v}_0}{1 - \frac{B'v_K}{B_0}} = \frac{1}{0.0831} \ln \frac{(-2.459)}{(-2.397)} = 0.308 \text{ s}$$

5. 求等效炮弹弹道顶点和落点诸元

已知  $c_K = 0.564$ ,  $\tilde{v}_0 = 418.4 \text{ m/s}$ ,  $\tilde{\theta}_0 = 44^\circ 06'$ 。用与例题 3.1 相同的列表插值法求得

$$\tilde{X} = 10618 \text{ m}; \tilde{T} = 49.04 \text{ s}, \tilde{Y} = 2993 \text{ m}, v_C = 283 \text{ m/s}, |\theta_C| = 52^\circ 10'$$

根据式(3.10), 得弹道顶点和落点诸元

$$X = \tilde{X} - \tilde{x}_K + x_K = 10618 - 92 + 92 = 10618 \text{ m}$$

$$Y = \tilde{Y} = 2993 \text{ m}, v_C = \tilde{v}_C = 283 \text{ m/s}$$

$$|\theta_C| = |\tilde{\theta}_C| = 52^\circ 10'$$

$$T = \tilde{T} - \tilde{t}_K + t_K = 49.04 - 0.31 + 0.64 = 49.37 \text{ s}$$

上面结果与用分段法计算结果比较, 除落角、落速相差较大( $32'$  和  $2 \text{ m/s}$ ) 外, 其余结果均





比较接近。但落角、落速应以虚速法计算结果为准,因为分段解法近似取  $|\theta_C| = |\theta_L|$  和  $v_C = v_L$  会带来一定误差。

## 3.4 西亚切解法及其应用

### 3.4.1 任意点弹道诸元和西亚切辅助函数

西亚切解法是一种火炮弹道计算的方法。在外弹道表编出以前,它是一种主要方法;外弹道表编出后,由于表的射角间隔为  $5^\circ$ ,不能满足小射角(尤其是  $5^\circ$  以下)的低伸弹道的要求,因而西亚切解法仍有它的作用。直到目前,低伸弹道表虽已编出,但某些特殊情况下还是要用到西亚切解法。比如火箭弹道被动结束段公式(3.3),当  $|\theta_L|$  很小时误差就很大。因为  $\cot |\theta_L|$  (当  $|\theta_L|$  很小时)是一个变化非常剧烈的函数,但可借西亚切解法求解。所以,掌握这一解法是很有用处的。

根据方程组(1.63)可得

$$\left\{ \begin{array}{l} * \frac{dv_x}{dx} = -cH(y)G(v, c_s) \quad \text{①} \\ * \frac{dP}{dx} = -\frac{g}{v_x^2} \quad \text{②} \\ * \frac{dy}{dx} = P \quad \text{③} \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_x} \quad \text{④} \end{array} \right. \quad (3.21)$$

初始条件是:当  $x = 0$  时,  $v_x = v_0 \cos \theta_0$ ,  $P = \tan \theta_0$ ,  $y = 0$ ,  $t = 0$ 。为了求得解析解,针对低伸弹道的特点,可以将其简化。首先考虑到弹道低伸,可取声速为地面标准值,并取  $H(y) = 1$ 。另一方面,全弹道  $\theta$  很小,  $\cos \theta$  就同  $\cos \theta_0$  相差不多,可用  $\cos \theta_0$  代替  $\cos \theta$ ,就等于用

$$U = \frac{v_x}{\cos \theta_0} \quad (3.22)$$

代替  $v_x / \cos \theta$ , 称  $U$  为假速度,如图 3.3 所示。假速度  $U$  是真速度  $v$  在铅直方向上向初速方向线上的投影。在绝大部分弹道上,其  $|\theta| < \theta_0$ , 因而  $\cos \theta > \cos \theta_0$ , 则  $v < U$ 。而  $G(v) = G(v, c_{son})$  是  $v$  的增函数,这样在弹道大部分上,甚至全弹道平均来看,都存在  $G(v) < G(U)$ 。另外,上面用 1 代替  $H(y)$  也略偏大。综合上述两方面,式(3.21)①的  $H(y)G(v, c_s)$  可用  $G(U)\cos \theta_0$  替代,即

$$H(y)G(v, c_s) = G(U)\cos \theta_0 \quad (3.23)$$

$G(U)$  乘上  $\cos \theta_0$ , 是由于  $G(U)$  将大于  $H(y)G(v, c_s)$ , 以用一个小于 1 的  $\cos \theta_0$  来补偿之故。式(3.23)就是所谓“西亚切替代”。用此替代后,方程组(3.21)便可对各式一一单独积分了。

将式(3.23)代入式(3.21)①,则有

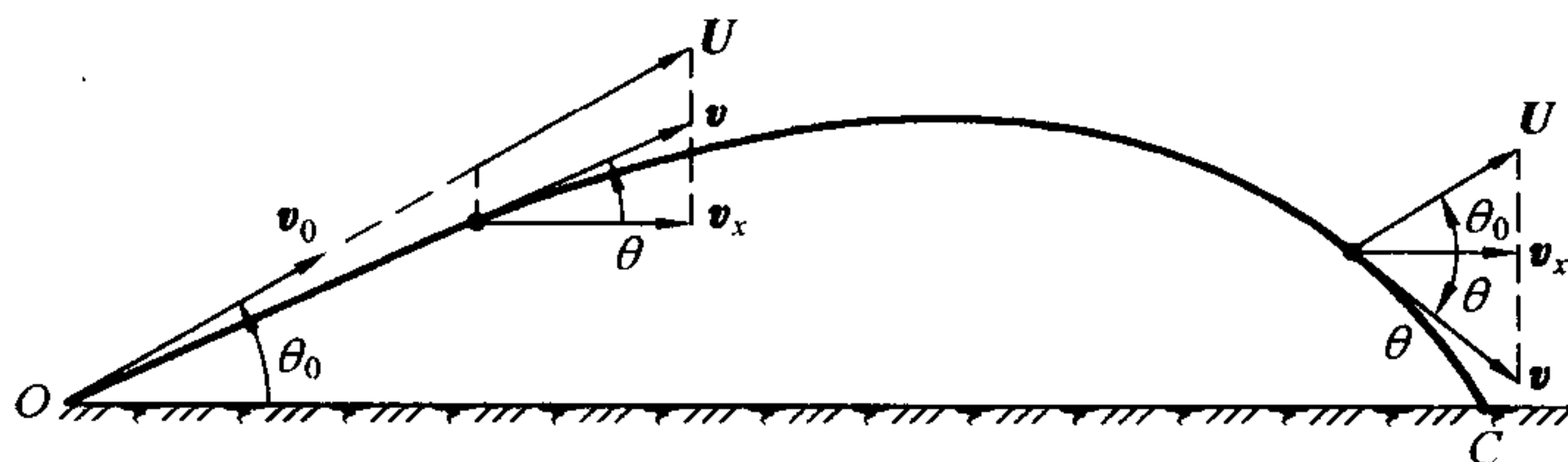


图 3.3 假速度和速度的关系

$$\frac{d(U \cos \theta_0)}{dx} = -cG(U) \cos \theta_0$$

分离变量得

$$dx = -\frac{1}{c} \frac{dU}{G(U)} \quad (3.24)$$

引进一个函数

$$D(U) = \int_U^{2000} \frac{dU}{G(U)} \quad (3.25)$$

将式(3.24)自射出点积分到弹道上任意点,则得

$$x = \frac{1}{c} [D(U) - D(v_0)] \quad (3.26)$$

再引进函数

$$I(U) = \int_U^{2000} \frac{2g}{U^2 G(U)} dU, \quad A(U) = \int_U^{2000} \frac{I(U)}{G(U)} dU, \quad (3.27)$$

$$T(U) = \int_U^{2000} \frac{dU}{UG(U)}$$

可将方程组(3.21)变成如下以假速度为自变量的任意点弹道诸元的公式组

$$\begin{cases} x = \frac{1}{c} [D(U) - D(v_0)] & \text{①} \\ \tan \theta = \tan \theta_0 - \frac{1}{2c \cos^2 \theta_0} [I(U) - I(v_0)] & \text{②} \\ y = x \tan \theta_0 - \frac{x}{2c \cos^2 \theta_0} \left[ \frac{A(U) - A(v_0)}{D(U) - D(v_0)} - I(v_0) \right] & \text{③} \\ t = \frac{1}{c \cos^2 \theta_0} [T(U) - T(v_0)] & \text{④} \\ v = U \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} & \text{⑤} \end{cases} \quad (3.28)$$

式中,  $D(U)$ 、 $I(U)$ 、 $A(U)$  和  $T(U)$  叫做西亚切主要函数, 已用 43 年空气阻力定律编成了表, 见《地面火炮外弹道表》第二部分。





根据弹道落点  $y_c = 0$  和弹道顶点  $\theta_s = 0$  的特点,也可用式(3.28)来计算弹道落点和顶点诸元。但由于计算过繁,因而引出计算较简便的所谓西亚切辅助函数。

对落点,式(3.28)③变成下式

$$\frac{A(U_c) - A(v_0)}{D(U_c) - D(v_0)} - I(v_0) = c \sin 2\theta_0 \quad (3.29)$$

由式(3.28)①知

$$D(U_c) = cX + D(v_0) \quad (3.30)$$

此式说明落点的假速度是  $cX$  和  $v_0$  的函数,只要  $cX$  和  $v_0$  给定,  $U_c$  也就惟一地被确定。可见式(3.29)等号左边也是  $cX$  和  $v_0$  的函数,即

$$f_0(cX, v_0) = \frac{A(U_c) - A(v_0)}{D(U_c) - D(v_0)} - I(v_0) \quad (3.31)$$

则式(3.29)可变为下式

$$f_0(cX, v_0) = c \sin 2\theta_0 \quad (3.32)$$

若将  $f_0(cX, v_0)$  乘以  $v_0^2/cX$ ,其乘积仍然是  $cX$  和  $v_0$  的函数,并用  $f_1(cX, v_0)$  表示,得

$$f_1(cX, v_0) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{X} \quad (3.33)$$

为求落点  $|\theta_c|$ ,将式(3.28)②除以  $\tan \theta_0$  得

$$\frac{\tan |\theta_c|}{\tan \theta_0} = -1 + \frac{I(U_c) - I(v_0)}{c \sin 2\theta_0}$$

将式(3.32)代入,有

$$\frac{\tan |\theta_c|}{\tan \theta_0} = -1 + \frac{I(U_c) - I(v_0)}{f_0(cX, v_0)} = f_2(cX, v_0) \quad (3.34)$$

应用上面同样的原理和方法,可得  $Y$ 、 $x_s$  和  $v_c$  与  $(cX, v_0)$  的函数关系。综合起来得到下列诸式

$$\begin{cases} f_0(cX, v_0) = c \sin 2\theta_0 & \text{①} \\ f_1(cX, v_0) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{X} & \text{②} \\ f_2(cX, v_0) = \frac{\tan |\theta_c|}{\tan \theta_0} & \text{③} \\ f_3(cX, v_0) = \frac{v_0 \sin \theta_0}{T} & \text{④} \\ f_4(cX, v_0) = \frac{v_c \cos \theta_c}{\cos \theta_0} & \text{⑤} \\ f_5(cX, v_0) = \frac{x_s}{X} & \text{⑥} \\ f_6(cX, v_0) = \frac{Y}{X \tan \theta_0} & \text{⑦} \end{cases} \quad (3.35)$$



式中函数  $f_0, f_1, \dots, f_6$ , 叫做西亚切辅助函数, 已用 43 年阻力定律编成了表, 见《地面火炮外弹道表》第二部分。

应用辅助函数计算  $\theta_0 < 5^\circ$  的弹道, 与精确结果比较起来是足够准确的。为了扩大西亚切解法的使用范围, 对  $\theta_0 > 5^\circ$  的弹道, 可对西亚切替代加一修正系数  $\beta$ , 则

$$H(\gamma)G(v, c_s) = \beta G(U) \cos \theta_0 \quad (3.36)$$

代入到式(3.21)①可得

$$dx = \frac{1}{c'} \frac{dU}{G(U)} \quad (3.37)$$

式中

$$c' = c\beta \quad (3.38)$$

比较式(3.24)和(3.37), 所差之处, 仅是将弹道系数  $c$  用  $c'$  替代, 所以没有必要重复上面的推导过程, 只要把弹道任意点诸元公式及辅助函数中的  $c$  以  $c'$  替代就行了。现在的西亚切辅助函数是以  $c'X$  和  $v_0$  为自变量的。按理, 对不同的弹道诸元  $X, Y, T, \dots$ , 应有不同的修正系数  $\beta_i$ 。但为了简单, 只是在保证射程  $X$  精确可靠的前提下确定一个修正系数, 叫做主要系数, 它随弹道的不同而变化。就是说,  $\beta$  是由  $c, v_0, \theta_0$  三个参量所确定的, 即

$$\beta = \beta(c, v_0, \theta_0)$$

它随  $c, v_0, \theta_0$  的变化较缓, 故  $\beta$  表的篇幅不大, 见《地面火炮外弹道表》第二部分, 计算表明, 用此  $\beta$  计算其他量, 在  $\theta_0 < 15^\circ$  时还是足够准确的; 只是  $\theta_0$  较大时, 误差才显得大些。

西亚切解法除直接用来求弹道顶点和落点几个弹道诸元值外, 还有其他一些特殊用处。

### 3.4.2 西亚切解法的其他应用

#### 1. 直射距离的计算

直射距离是指弹道顶点高度等于目标高度时的射程。目前, 一般所指直射距离多是指目标高度为 2 m 而言。这是评价反坦克武器和步兵武器的一个重要参量。利用西亚切辅助函数, 可以推导出  $X$  和  $Y$  的关系式。由

$$f_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{X} \quad \text{及} \quad f_6 = \frac{Y}{X \tan \theta_0}$$

相乘得

$$f_1 f_6 = \frac{2v_0^2 Y \cos^2 \theta_0}{X^2}$$

则

$$X = \sqrt{\frac{2}{f_1 f_6}} v_0 \sqrt{Y \cos \theta_0}$$

由于弹道低伸,  $\theta_0$  很小, 可取  $\cos \theta_0 \approx 1$ 。又记





$$K_X = \sqrt{\frac{2}{f_1 f_6}} \quad (3.39)$$

便得射程公式为

$$X = K_X v_0 \sqrt{Y} \quad (3.40)$$

当  $Y$  给定时,即为直射距离公式。

现已对  $K_X$  编成了以  $v_0$  和  $c\sqrt{Y}$  为表头的函数表(见附表 13)。这样,公式(3.40)的计算就简便了。至于  $K_X$  表的来源,可作如下说明。

将式(3.40)两边乘以弹道系数  $c$ ,得

$$cX = K_X v_0 \cdot c\sqrt{Y} \quad (3.41)$$

因式(3.39)定义的  $K_X$  仅是  $cX$  和  $v_0$  的函数,那么式(3.41)仅有三个变量,即  $cX, v_0, c\sqrt{Y}$ 。这就是说,由给定的  $v_0$  和  $c\sqrt{Y}$  可惟一地确定  $cX$ 。从而也就惟一地确定了  $K_X$ ,即  $K_X$  是  $v_0$  和  $c\sqrt{Y}$  的函数。

当初速  $v_0 < 250$  m/s 时,  $K_X$  值随  $v_0$  很少变化,仅由  $c\sqrt{Y}$  查  $v_0 = 250$  m/s 一栏下的值即可。

可根据式(3.40)和  $K_X$  表中的数值,考虑当  $Y = 2$  m 时的直射距离  $X_{zh}$  所依赖的主要因素。在  $K_X$  表中取典型的初速值  $v_0$  等于 500、1 000、1 500 m/s 三个值,取弹道系数在 1 到 7 的范围内,则可得出如下相应的值

对	$v_0 = 500$ m/s	$\frac{X_{zh}}{v_0} = 1.2 \sim 0.93$
	$v_0 = 1\,000$ m/s	$\frac{X_{zh}}{v_0} = 1.2 \sim 0.81$
	$v_0 = 1\,500$ m/s	$\frac{X_{zh}}{v_0} = 1.2 \sim 0.73$

这说明,初速  $v_0$  是决定直射距离  $X_{zh}$  的主要因素。在相当多的情况下,  $X_{zh}$  与  $v_0$  的比值在数值上具有 1 的数量级。然而,弹道系数的影响也是不可忽视的,减小弹道系数将使  $X_{zh}$  提高,尤其对大的直射距离更为明显。

对反坦克火箭弹和增程弹的直射距离,则主要以最大速度  $v_K$  为依据。它对  $X_{zh}$  的影响,与上述情况大致类似。由此可以粗略地说,反坦克武器的直射距离是以接近于 1 比 1 的速度值换来的。

## 2. 速度换算

对火炮或增程弹的炮口速度  $v_0$ ,往往不是直接测得的;由于后效作用,只可能测出距炮口某一定距离  $x$  处的速度  $v$ ,这可由式(3.26)换算为

$$D(v_0) = D(v) - cx \quad (3.42)$$

对弹道上任意两点的速度值都可相互换算。



### 3. 求弹道顶点 $S$ 处的速度 $v_S$

往后对旋转弹作飞行稳定性校核时, 需要知道  $v_S$  之值。目前《地面火炮外弹道表》中没有编出此量, 只有当  $v_0 > 700 \text{ m/s}$  时, 才可借高炮弹道表查取。也可借式(3.28)②、⑤ 两式求得 (式中的  $c$  须改用  $c' = c\beta$ ), 但有一定的误差。

### 4. 反坦克火箭增程弹弹道起始段和被动结束段的计算

作为西亚切解法的运用, 首先介绍如何求得反坦克增程弹点火点  $H$  处弹道诸元。由式(3.28) 诸式是可解决的。除了已知  $c, v_0, \theta_0$  外, 还知道  $H$  到炮口的距离  $x_H$  ( $x_H$  叫点火距离)。由式(3.28)① 可得  $H$  点处的假速度  $U_H$ , 然后代入式(3.28) 其余各式就可算出  $\theta_H, y_H, t_H$  和  $v_H$ 。值得注意的是, 式(3.28)③ 的括号还可借助式(3.31) 定义的  $f_0$  函数, 此时有

$$f_0(cx_H, v_0) = \frac{A(U_H) - A(v_0)}{D(U_H) - D(v_0)} - I(v_0)$$

于是便得

$$y_H = x_H \left[ \tan \theta_0 - \frac{f_0(cv_H, v_0)}{2c \cos^2 \theta_0} \right] \quad (3.43)$$

关于被动结束段(如图 3.4 所示), 在已知  $L$  点弹道诸元的情况下, 如何确定  $x_{LC}, t_{LC}, v_C, |\theta_C|$ 。在 3.2 已指出, 当  $|\theta_L|$  很小时, 亦可借助西亚切解法求解。

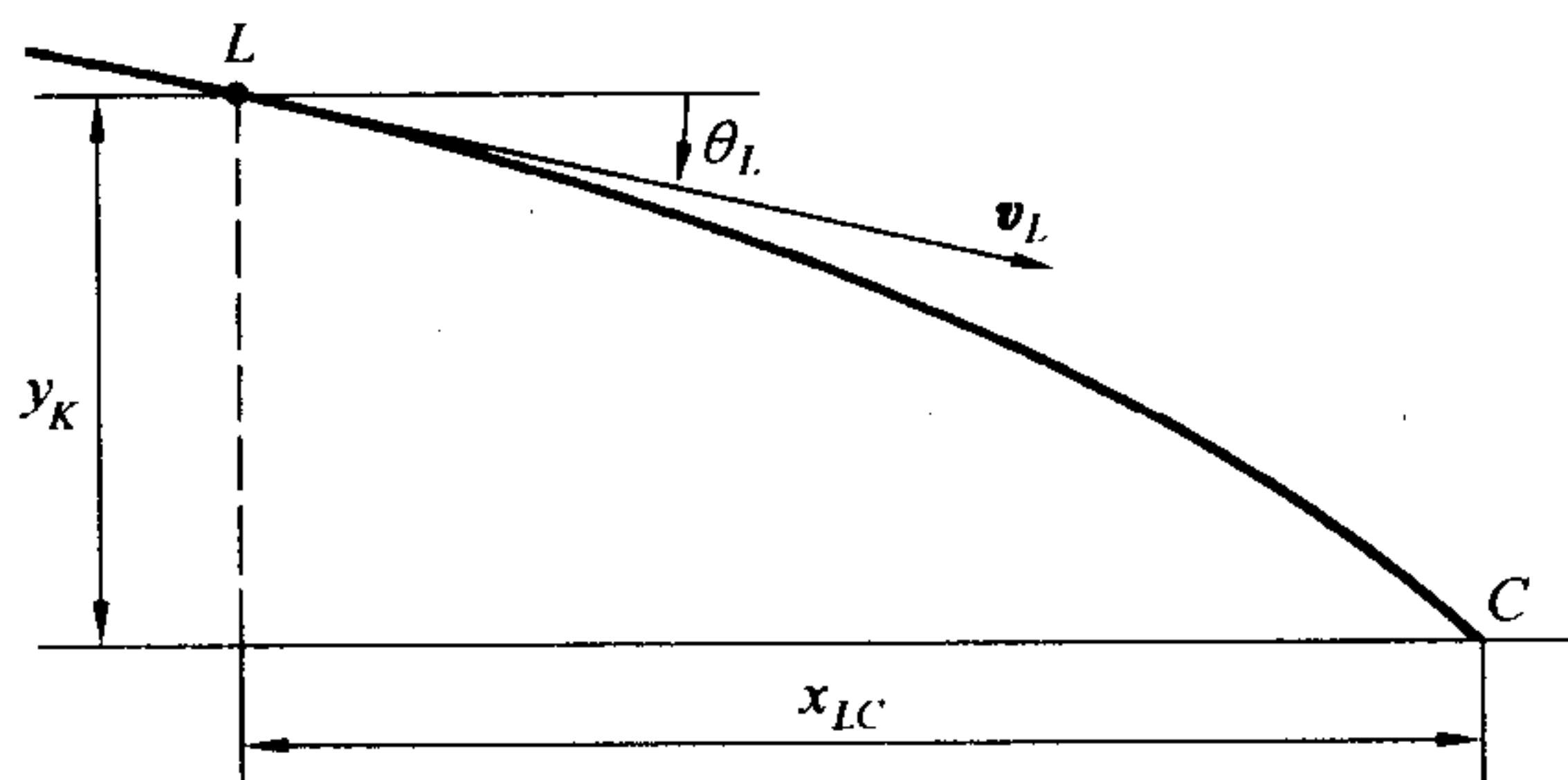


图 3.4 被动结束段

因已知弹道系数  $c_K$  及  $v_L, \theta_L, y_K$ , 由式(3.28)③, 其中括号内的值可借  $f_0$  函数, 为

$$\frac{A(U) - A(v_0)}{D(U) - D(v_0)} - I(v_0) = f_0(cx, v_0) \quad (3.44)$$

运用于被动结束段时, 将  $L$  视为火炮射出点, 则落点  $C$  对  $L$  点的  $y$  值为  $-y_K$ , 于是由式(3.28)③ 得

$$-y_K = x_{LC} \tan \theta_L - \frac{x_{LC}}{2c_K \cos^2 \theta_L} f_0(c_K x_{LC}, v_L)$$

则

$$x_{LC} f_0(c_K x_{LC}, v_L) + c_K x_{LC} \sin 2|\theta_L| = 2y_K c_K \cos^2 \theta_L \quad (3.45)$$





由上式通过计算,就可以把  $x_{LC}$  求出来。然后将此  $x_{LC}$  代入式(3.28)①,有

$$D(U_C) = D(U_L) + c_K x_{LC} \quad (3.46)$$

便得到落点假速度  $U_C$ ,再将  $U_C$  代入式(3.28)②、④、⑤,便可算出  $\theta_C$ 、 $t_{LC}$  和  $v_C$ 。

## 第四章 椭圆理论

现代武器发展很快,射程和威力都已达到了惊人的程度,即使对于战术武器来讲,其射程也能达到 1 000 km。对这种远程弹道,其大部分已脱离了稠密的大气层(高度约为 30 km),因而可应用椭圆理论来计算弹道。所研究的对象是定质量物体在地心引力场中相对于惯性坐标系的运动,在研究中,可以既不考虑空气阻力,也不考虑地球旋转的影响,但重力的大小和方向变化是要考虑的。

### 4.1 方程的组成和积分

对地球采用圆球模型。如图 4.1 所示,重力  $\mathbf{G}$  的方向指向地心。可选取一极坐标,以固连于地球的一直线  $O_E l$  为基准,则质量为  $m$  的火箭位置由矢量  $\mathbf{r}$  的大小  $r$  及极角  $\eta$  完全确定。不妨取  $r$  和  $\eta$  为广义坐标。现只有一个重力作用于火箭上,此重力  $\mathbf{G}$  的大小为

$$G = mg_A \left( \frac{r_A}{r} \right)^2 \quad (4.1)$$

式中,  $g_A$  和  $r_A$  表示弹道起点  $A$  处的重力加速度及起点到地心的距离。

根据拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (4.2)$$

可以把运动方程式建立起来。从图 4.1 可知,速度

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\eta})^2} \quad (4.3)$$

火箭的动能为

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\eta}^2) \quad (4.4)$$

现广义坐标  $q_i$  为  $r$  和  $\eta$ , 仅在  $\mathbf{G}$  的作用下, 相应的广义力为

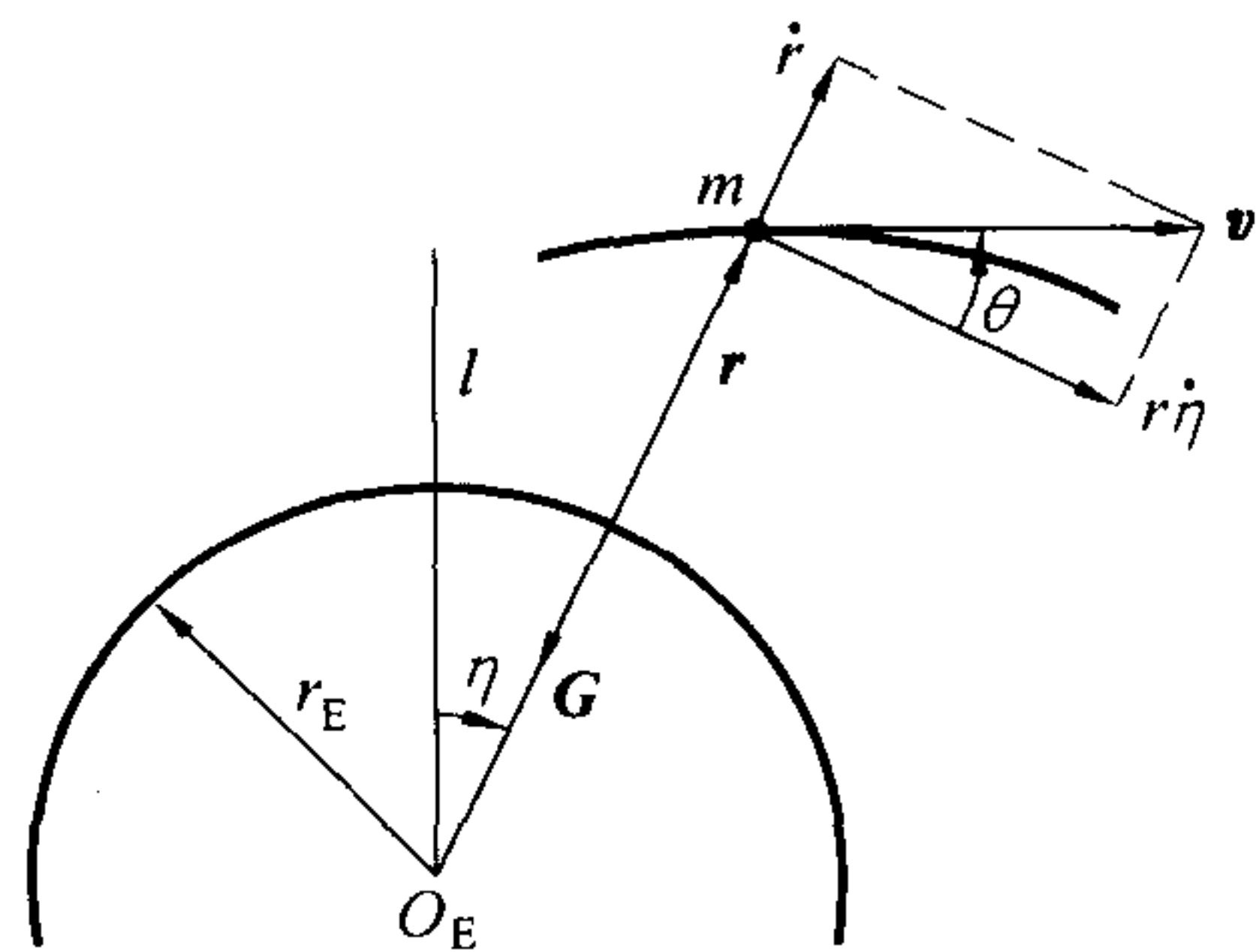


图 4.1 火箭仅在重力场作用下的运动

$$\begin{cases} Q_r = \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = -G \\ Q_\eta = \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

对坐标  $r$  的微分方程, 须预先求出方程(4.2) 等号左边各项





$$\frac{\partial T}{\partial r} = m r \dot{\eta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r}$$

将它们及式(4.5)中的第一式代入式(4.2), 便得

$$\ddot{r} - r \dot{\eta}^2 = -g_A \left( \frac{r_A}{r} \right)^2 \quad (4.6)$$

对广义坐标  $\eta$ , 有

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = m r^2 \dot{\eta}$$

则得方程

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\eta}) = 0 \quad (4.7)$$

方程(4.6)和(4.7)是被用来近似决定弹道火箭和地球卫星运动特性的椭圆理论的基础。

对式(4.7)积分, 得

$$r^2 \dot{\eta} = C_1 (\text{const}) \quad (4.8)$$

应当指出, 式(4.8)可以由动量矩定理直接得到。因为仅在有心力场的作用下, 外力矩为零, 动量矩是守恒的, 故

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{C}_1 (\text{常矢量})$$

$\mathbf{C}_1$  同  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{v}$  正交, 因之  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{v}$  总在同一平面内, 火箭运动是共面的,  $C_1$  是动量矩示性数。

若以  $\theta$  表示速度矢量  $\mathbf{v}$  与当地水平线间的夹角, 则式(4.8)可写成下列等式

$$r v \cos \theta = r_A v_A \cos \theta_A = C_1 \quad (4.9)$$

该式具有积分面积的意义, 它表示矢径  $\mathbf{r}$  在等时间间隔内所扫过的面积相等。

下面着手建立  $r$  与  $\eta$  之间的函数关系。由于

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr}$$

再考虑到将式(4.8)代入式(4.6), 则式(4.6)变为下式

$$\dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} - \frac{C_1^2}{r^3} + g_A \left( \frac{r_A}{r} \right)^2 = 0$$

积分得

$$\dot{r}^2 + \left( \frac{C_1}{r} \right)^2 - 2 \frac{g_A r_A^2}{r} = C_2 (\text{const}) \quad (4.10)$$

由于  $C_1 = r v \cos \theta$ ,  $\dot{r} = v \sin \theta$ , 故

$$\dot{r}^2 + \left( \frac{C_1}{r} \right)^2 = v^2 \quad (4.11)$$

于是从式(4.10)知

$$v^2 - 2 \frac{g_A r_A^2}{r} = C_2 = v_A^2 - 2 g_A r_A \quad (4.12)$$



不难看出,  $C_2$  实际上是火箭的总能量除以  $m/2$ , 它是一个能量示性数。又因为

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{dr}{d\eta} \cdot \frac{C_1}{r^2}$$

将它代入式(4.10), 并略加整理后, 得

$$d\eta = \frac{\frac{C_1}{r^2}}{\sqrt{C_2 - \frac{C_1^2}{r^2} + \frac{2g_A r_A^2}{r}}} dr$$

查积分表得

$$\eta - K = -\arcsin \frac{\frac{C_1}{r} - \frac{g_A r_A^2}{C_1}}{\sqrt{C_2 + \left(\frac{g_A r_A^2}{C_1}\right)^2}}$$

则

$$r = \frac{R_1}{1 - e \sin(\eta - K)} \quad (4.13)$$

式中

$$R_1 = \frac{C_1^2}{g_A r_A^2} = \frac{v_A^2 \cos^2 \theta_A}{g_A} \quad (R_1 \text{ 为通径}) \quad (4.14)$$

$$e = \sqrt{1 + C_2 \left(\frac{C_1}{g_A r_A^2}\right)^2}$$

将  $C_1$  和  $C_2$  的表达式(4.9) 及(4.12) 代入, 并令弹道起点的两倍动能与势能的无因次比为

$$\nu = \frac{v_A^2}{g_A r_A} \quad (4.15)$$

则

$$e = \sqrt{1 + \nu(\nu - 2) \cos^2 \theta_A} \quad (4.16)$$

为了确定系数  $K$  值, 考虑在弹道顶点  $S$  处有  $(dr/d\eta)_S = 0$ , 且取  $\eta_S = 0$  (图 4.2), 对式(4.13) 求导数, 得知在  $S$  点  $\cos(\eta_S - K) = 0$ , 故  $\eta_S - K = \pi/2$ , 则  $K = -\pi/2$ 。于是式(4.13) 为

$$r = \frac{R_1}{1 - e \cos \eta} \quad (4.17)$$

由解析几何知道, 这是极坐标系中的锥形截面方程, 其极轴乃是弹道对称轴(过地球中心与弹道顶点  $S$  的直线)。其几何性质由偏心率  $e$  确定:

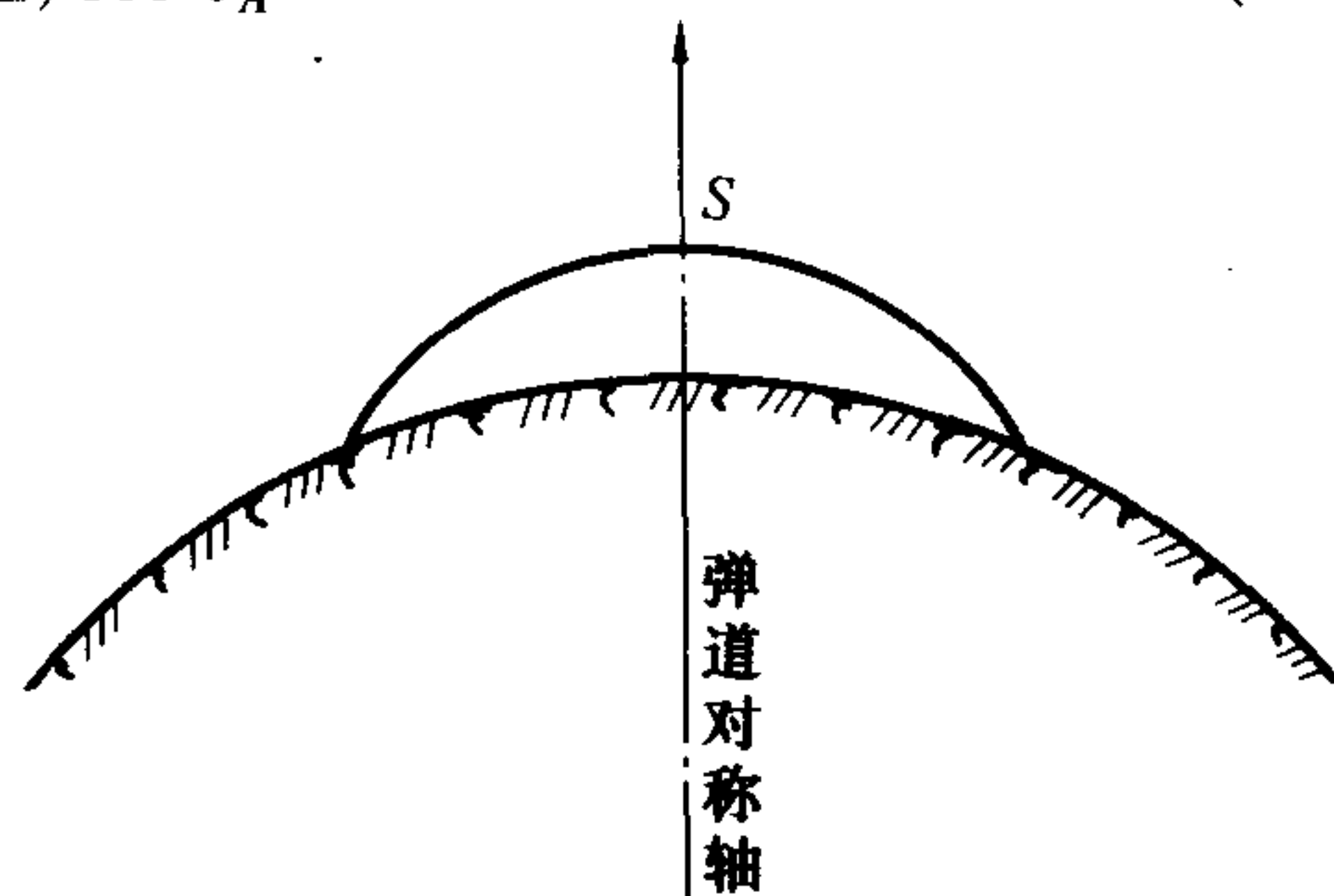


图 4.2 弹道对称轴





当  $e = 0$  时,表示圆;

当  $0 < e < 1$  时,表示椭圆;

当  $e = 1$  时,表示抛物线;

当  $e > 1$  时,表示双曲线。

$P$  是通径,对应于  $e = 0$  时的圆半径。下面对弹道方程进行讨论。

## 4.2 弹道方程的讨论

从弹道方程(4.17)及式(4.14)、(4.16)可以看出,弹道完全由弹道起点的速度大小  $v_A$ 、速度方向倾角  $\theta_A$  及起点到地心距离  $r_A$  所决定。为了清楚地看出速度  $v_A$  对弹道形状的影响,不妨先取  $\theta_A = 0$  的特殊情况进行讨论,此时从式(4.16)得  $\nu = 1 \pm e$ ,便有下列四种情况。

(1) 当  $e = 0$  时,弹道方程(4.17)变成  $r = R_1$ ,即以  $R_1$  为半径的圆。火箭成了地球卫星; $\nu = 1$  意味着所受到的重力加速度与向心加速度相等。成为地球卫星所必需的最小速度叫做第一宇宙速度,以  $v_I$  表示,其值为  $\sqrt{g_A r_A}$ 。将式(1.20)代入,则  $v_I = (r_0/r_A)\sqrt{g_0 r_A}$ 。若取  $y_A = 30$  km,算得  $v_I = 7.8769$  km/s;若取  $y_A = 50$  km,算得  $v_I = 7.8646$  km/s。可见第一宇宙速度随  $A$  点高度而异,人们通常所指 7.9 km/s 只是一种粗略的说法。

(2)  $e = 1$ ,弹道为抛物线,火箭将逃逸地球引力场。此时  $\nu = 2$ ,相应的速度叫做第二宇宙速度,以  $v_{II}$  表示。显然  $v_{II} = \sqrt{2}v_I$ ,与上述  $y_A$  为 30 km 和 50 km 相应的  $v_{II}$  等于 11.140 km/s 和 11.122 km/s。

(3)  $0 < e < 1$ ,弹道为椭圆。因为式  $\nu = 1 \pm e$ ,所以有两种不同的椭圆,一种  $\nu < 1$ ,另一种  $\nu$  在 1 与 2 之间,如图 4.3 所示。对应于  $\nu = 1 + e$  的椭圆  $A$  点为近地点,椭圆不与地球相交;对应于  $\nu = 1 - e$  的椭圆  $A$  点为远地点,椭圆必然穿过大气层和地球体,不可能成为卫星轨道。

(4)  $e > 1$ ,弹道是双曲线,此时  $v_A > v_{II}$ 。

当  $\theta_A > 0$  时,由  $e$  的表达式(4.16)知, $e$  不可能等于零,其最小值  $e_{\min}$  可由  $de/d\nu = 0$  求出;由式(4.16)得  $(\nu - 1)\cos^2\theta_A = 0$ ,即  $\nu = 1$  来确定

$$e_{\min} = \sqrt{1 - \cos^2\theta_A} = \sin\theta_A$$

无论速度  $v_A$  多少,都不存在圆运动。那么在什么情况下  $e \geq 1$ ,即火箭飞离地球引力场?由式(4.16)可知,仍然是条件  $\nu \geq 2$ ,也就是说,不管  $\theta_A$  之值如何,火箭达到第二宇宙速度后,总可以飞离地球引力场。对于  $\nu < 2$  的椭圆弹道如图 4.4 所示。当最小矢径  $r_{\min}$  之值  $P/(1+e)$  小于地球半径时,便是一般远程弹道。从方程(4.17)可知,弹道具有对称性,升弧段和降弧段是对称的。而且地心到椭圆的最小距离  $r_{\min}$  总小于  $r_A$ ,这可将式(4.14)和(4.16)代入  $r_{\min}$  的表达式得以证明:

$$r_{\min} = \frac{r_A \nu \cos^2\theta_A}{1 + \sqrt{1 + \nu(\nu - 2)\cos^2\theta_A}} < \frac{r_A \nu \cos^2\theta_A}{1 + \sqrt{\nu(\nu - 2) + 1\cos\theta_A}} < \frac{r_A \nu}{1 + |\nu - 1|}$$



当  $2 > \nu \geq 1$  时

$$r_{\min} < \frac{r_A \nu}{1 + |\nu - 1|} = r_A$$

当  $0 < \nu < 1$  时

$$r_{\min} < \frac{r_A \nu}{2 - \nu} < r_A \nu < r_A$$

因此,在  $v_A < v_{II}$  的条件下,只要  $A$  点靠近地球稠密的大气层,那么火箭就必然穿过大气层回到地球上来,而不可能成为地球卫星。

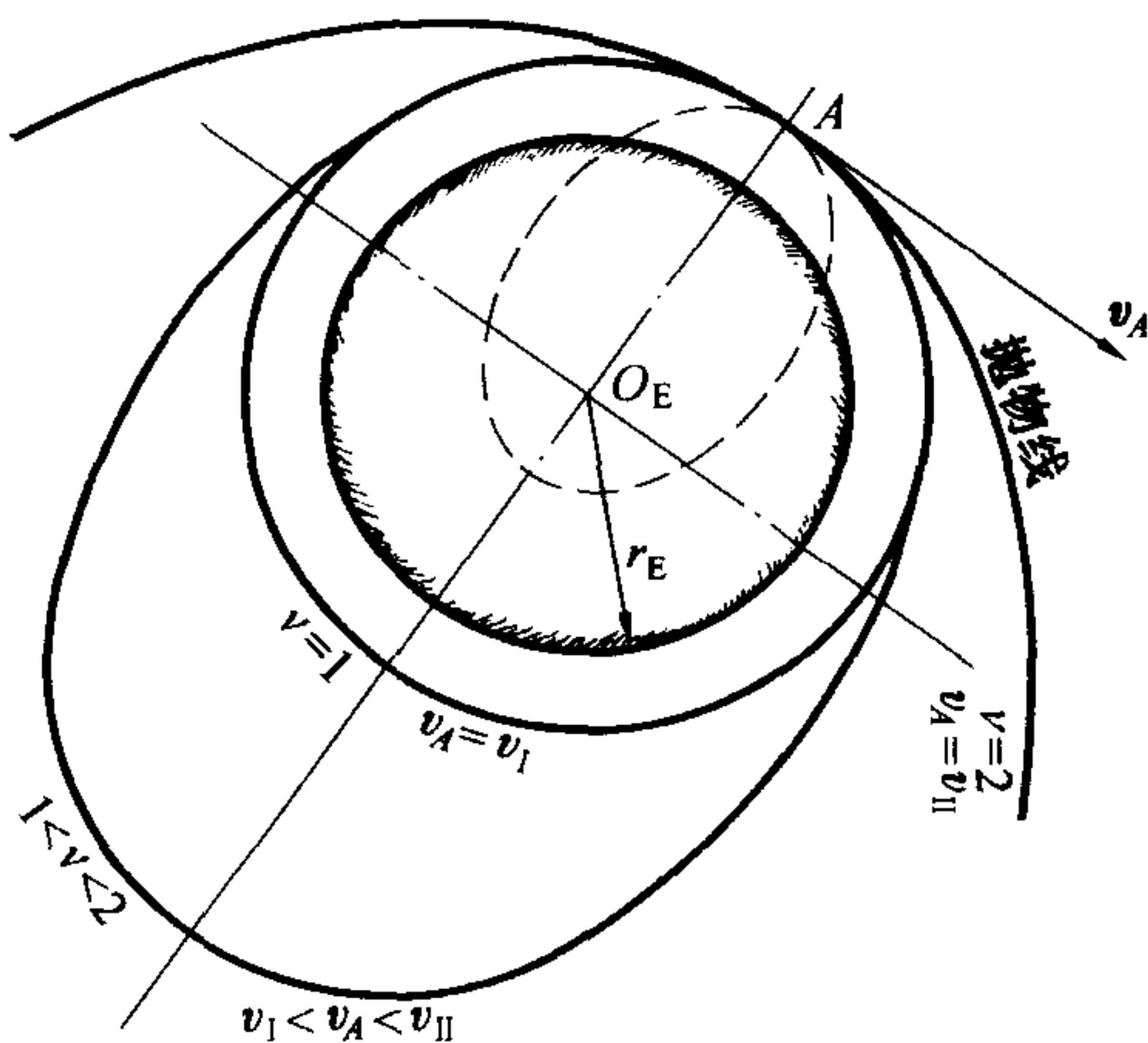


图 4.3  $\theta_A = 0$  时的弹道

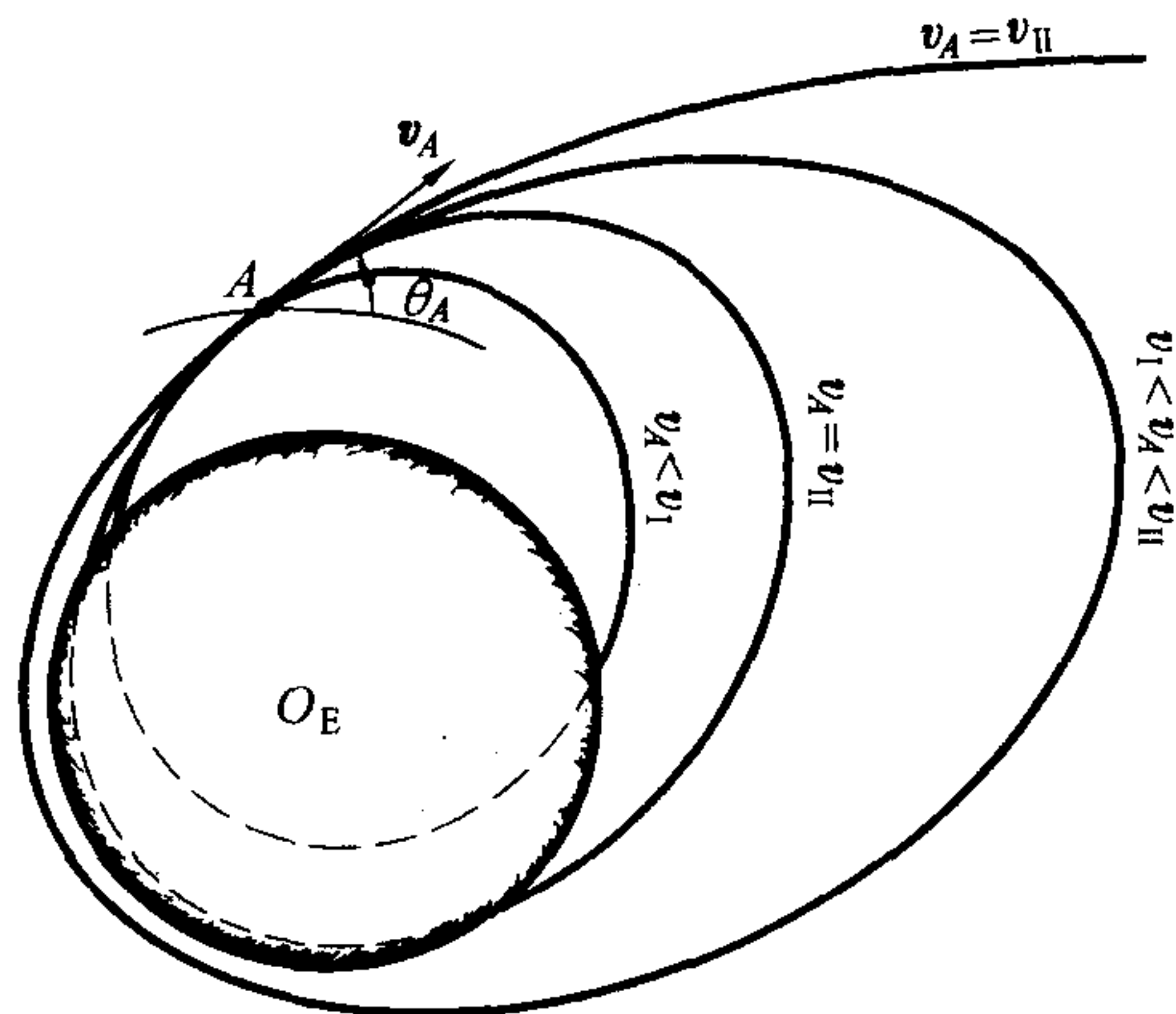


图 4.4  $\theta_A > 0$  时的弹道

### 4.3 任意点弹道诸元

椭圆弹道上任意点弹道诸元系指自弹道起点  $A$  飞达任意点  $M$  所经历的时间  $t$ ,  $M$  点的坐标  $x$  和  $y$ ,  $M$  点的速度  $v$  及弹道切线倾角  $\theta$  (图 4.5)。其中  $M$  点的距离  $x$  是以地心  $O_E$  为圆心、 $r_A$  为半径,  $A$  点到  $M$  点的地心向径  $r$  之间的弧线长, 易见

$$x = r_A(\eta - \eta_A) \quad (4.18)$$

须注意的是, 弹道升弧段  $AS$  之极角  $\eta$  为负, 降弧段  $SB$  之极角  $\eta$  为正。

任意点  $M$  的弹道高  $y$  为其地心向径  $r$  与  $A$  点地心向径  $r_A$  之差, 即

$$y = r - r_A = \frac{R_1}{1 - e \cos \eta} - r_A \quad (4.19)$$

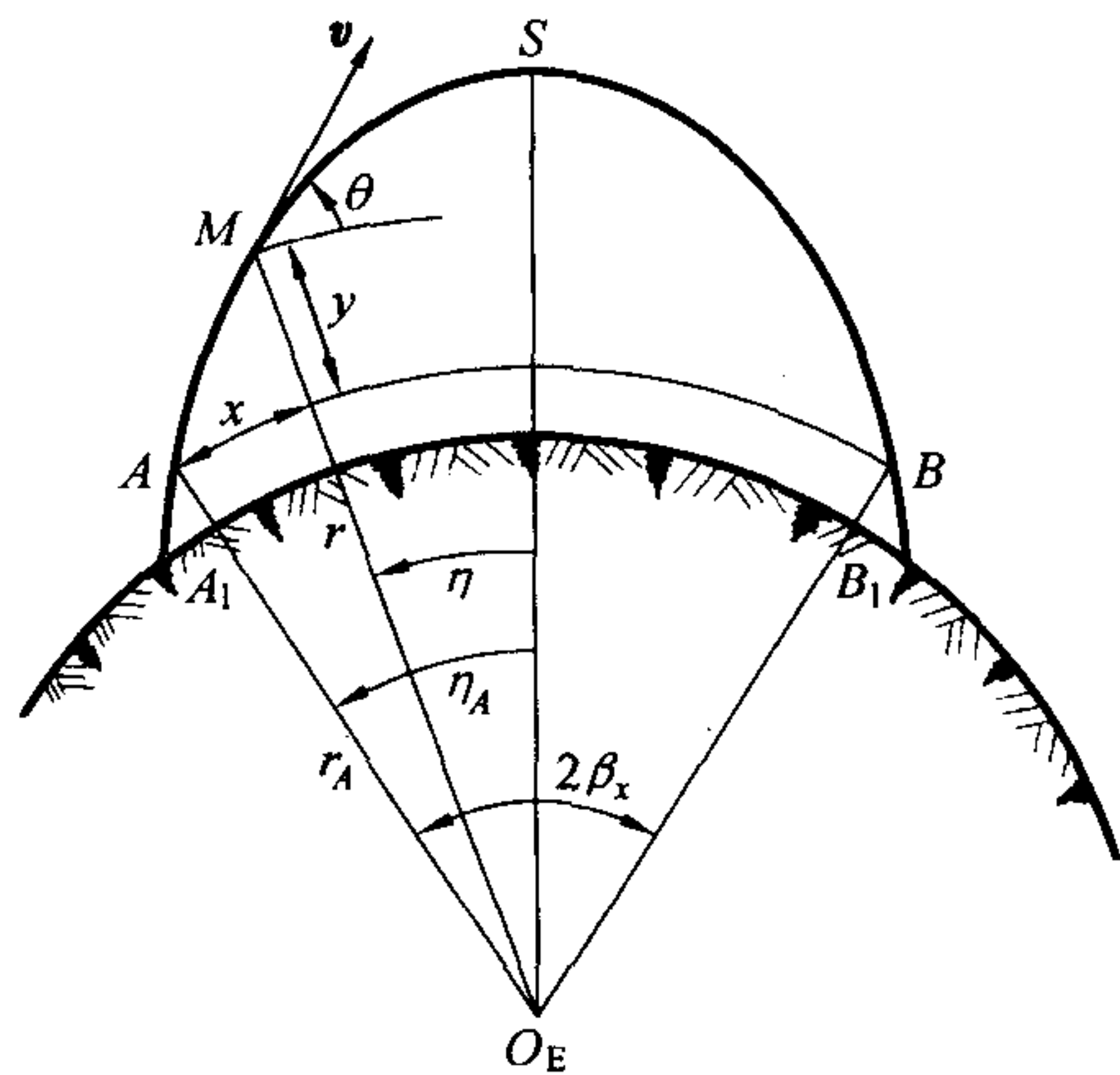


图 4.5 弹道诸元





当取  $\cos \eta = 1$  时, 便得与最高点  $S$  相应的最大弹道高  $Y$ 。

任意点  $M$  的速度  $v$ , 由式(4.12) 得

$$v = \sqrt{v_A^2 - 2g_A r_A (1 - r_A/r)} \quad (4.20)$$

切线倾角  $\theta$  由

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\eta}}{\frac{dx}{d\eta}}$$

可得。由于

$$\frac{dy}{d\eta} = -\frac{R_1 e \sin \eta}{(1 - e \cos \eta)^2} \quad \text{及} \quad \frac{dx}{d\eta} = r_A$$

故得

$$\tan \theta = -\frac{r_A^2 e \sin \eta}{r_A R_1} \quad (4.21)$$

关于飞行时间  $t$ , 由式(4.8) 知

$$dt = \frac{r^2}{C_1} d\eta = \frac{r^2}{r_A v_A \cos \theta_A} d\eta$$

将式(4.17) 代入并积分得

$$t = \frac{(v_A \cos \theta_A)^3}{g_A^2 r_A} \int_{\eta_A}^{\eta} \frac{d\eta}{(1 - e \cos \eta)^2} \quad (4.22)$$

对该式可查积分表得到初等函数的组合表达式。

## 4.4 射程与最大射程角

椭圆弹道弧段  $ASB$  所相应的地面射程  $X_E$ , 等于弧段  $A_1 B_1$  的长度。由图 4.5 看出

$$X_E = 2\beta_X \gamma_E \quad (4.23)$$

式中  $2\beta_X$  被称为角射程。为求得  $2\beta_X$ , 据式(4.17) 有

$$r_A = \frac{R_1}{1 - e \cos(-\beta_X)} = \frac{R_1}{1 - e \cos \beta_X}$$

则得

$$\cos \beta_X = \frac{1 - \nu \cos^2 \theta_A}{\sqrt{\nu(\nu - 2) \cos^2 \theta_A + 1}}$$

由

$$\tan^2 \beta_X = \frac{1}{\cos^2 \beta_X} - 1 = \frac{\nu^2 \cos^2 \theta_A \sin^2 \theta_A}{(1 - \nu \cos^2 \theta_A)^2}$$



则

$$\tan\beta_X = \frac{\nu \sin 2\theta_A}{2(1 - \nu \cos^2 \theta_A)} \quad (4.24)$$

将此式求出的  $\beta_X$  值代入式(4.23),  $X_E$  就立即可以求出。例如, 当  $\beta_X = 5^\circ$  时,  $X_E = 1\,112$  km。可见对战术武器, 其  $\beta_X$  值均在  $5^\circ$  以下。

最大射程角  $\theta_{AX_{\max}}$  满足  $\partial X_E / \partial \theta_A = 0$  的条件。先将式(4.24) 变换成下列形式

$$\tan\beta_X = \frac{\nu \tan\theta_A}{\tan^2\theta_A + 1 - \nu}$$

易见条件  $\partial X_E / \partial \theta_A = 0$  与  $\partial \tan\beta_X / \partial \tan\theta_A = 0$  是一致的。而今

$$\frac{\partial \tan\beta_X}{\partial \tan\theta_A} = \frac{\nu(1 - \nu - \tan^2\theta_A)}{(1 - \nu + \tan^2\theta_A)^2} = 0$$

即得

$$\tan\theta_{AX_{\max}} = \sqrt{1 - \nu} \quad (4.25)$$

进一步可求得

$$\left. \frac{\partial^2 \tan\beta_X}{\partial \tan^2\theta_A} \right|_{\theta_A = \theta_{AX_{\max}}} < 0$$

故由式(4.25) 所对应的  $\beta_X$  是极大值, 即得

$$\tan\beta_{X_{\max}} = \frac{\nu}{2\sqrt{1 - \nu}} \quad (4.26)$$

## 4.5 给定射程下所必需的最小初速的解

给定射程, 就是给定角射程  $2\beta_X$ , 要根据式(4.24), 在  $\beta_X$  一定的情况下, 寻求使  $\nu$  值极小的条件, 也就是求出射角  $\theta_A$  的最佳值  $\theta_{A_{\text{opt}}}$ 。由式(4.24) 可解出  $\nu$  的表达式

$$\nu = \frac{2\tan\beta_X}{\sin 2\theta_A + 2\tan\beta_X \cos^2 \theta_A}$$

分子分母用  $\cos^2 \theta_A$  除之, 并考虑到  $1/\cos^2 \theta_A = 1 + \tan^2 \theta_A$ , 则

$$\nu = \frac{\tan^2 \theta_A + 1}{\tan \theta_A + \tan \beta_X} \tan \beta_X \quad (4.27)$$

由

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tan \theta_A} = \frac{2\tan\theta_A(\tan\theta_A + \tan\beta_X) - (\tan^2\theta_A + 1)\tan\beta_X}{(\tan\theta_A + \tan\beta_X)^2} = 0$$

得





$$\tan \theta_{A \text{opt}} = \sqrt{\tan^2 \beta_X + 1} - \tan \beta_X = \frac{1 - \sin \beta_X}{\cos \beta_X} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_X\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_X\right)} = \tan \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta_X\right)$$

故

$$\theta_{A \text{opt}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta_X}{2} \quad (4.28)$$

可以进一步求  $\partial^2 \nu / \partial \tan^2 \theta_A$  的表达式, 读者不妨自行验算证明

$$\left. \frac{\partial^2 \nu}{\partial \tan^2 \theta_A} \right|_{\theta_A = \theta_{A \text{opt}}} > 0$$

故式(4.28)  $\theta_{A \text{opt}}$  所相应的  $\nu$  是极小值, 对应的弹道叫做最小速度弹道。

## 第五章 自动瞄准弹道

### 5.1 引言

现代兵器(尤其灵巧弹)已不局限于全弹道范围内的无控自由飞行状态。为了达到准确有效命中目标的目的,现今大型远程火箭主动段多采用姿态控制,有的炮弹和火箭弹道末段则采用自动瞄准技术,即末段制导。也有对弹道某一段采用修正技术,称为修正弹道。人们通常称有控火箭为导弹,但对无控火箭主动段进行控制或末制导,一般称之为简易控制火箭或末制导火箭,而不称为导弹。可见,有控弹道不是专属于导弹,其涉及面更广。就力学意义而言,无论导弹或是火箭,其飞行过程的受控阶段,都作为有控弹道加以研究,没有什么本质区别。况且,凡是火箭的有控弹道问题,均可以借鉴导弹运动的有关理论加以灵活应用。

导弹是现代战争中广泛使用的武器。与普通无控火箭的主要不同点,就在于导弹具有制导系统(或称控制系统)——能使飞行操纵机构动作,保证导弹击中目标或按预先给定的弹道飞行的全部装置。导弹正是制导系统的控制对象。制导系统的基本任务如下:

- (1)确定导弹相对于地球的位置和导弹相对于目标的位置,或导弹与目标相对于观察点的位置;
- (2)根据所确定的导弹与目标位置,发出操纵信号;
- (3)依据操纵信号使导弹操纵机构转动,操纵导弹飞行。

在图 5.1 中,  $T$  表示活动目标(比如飞机),  $M$  表示导弹,导弹与目标的连线  $MT$  称为目标瞄准线,或目标线。导弹的运动将要受到控制系统的某种约束。如果在飞行过程中,能够使导弹速度方向总指向目标,即其速度矢量  $v$  与目标线重合,这就是所谓纯追踪法。如果让导弹速度指向目标的前方,即要求  $v$  与  $MT$  之间的夹角  $\eta$  保持为常数,此称之为广义追踪法。还有其他种的运动参数间的关系,以后将陆续介绍。总之,控制系统根据预先选定的导弹与目标之间的某种运动参数应满足的关系,将导弹引向目标。这种运动参数的关系叫导引关系。制导系统按一定导引关系,引导导弹命中目标的方法,叫做导引方法。

导引方法按弹道形成的形式看,可分成两大类。一类是用于攻击活动目标的,其特点是这种弹道在发射前不预先给定,要视目标的活动情况而随机应变,如图 5.1 所示。属于此类的

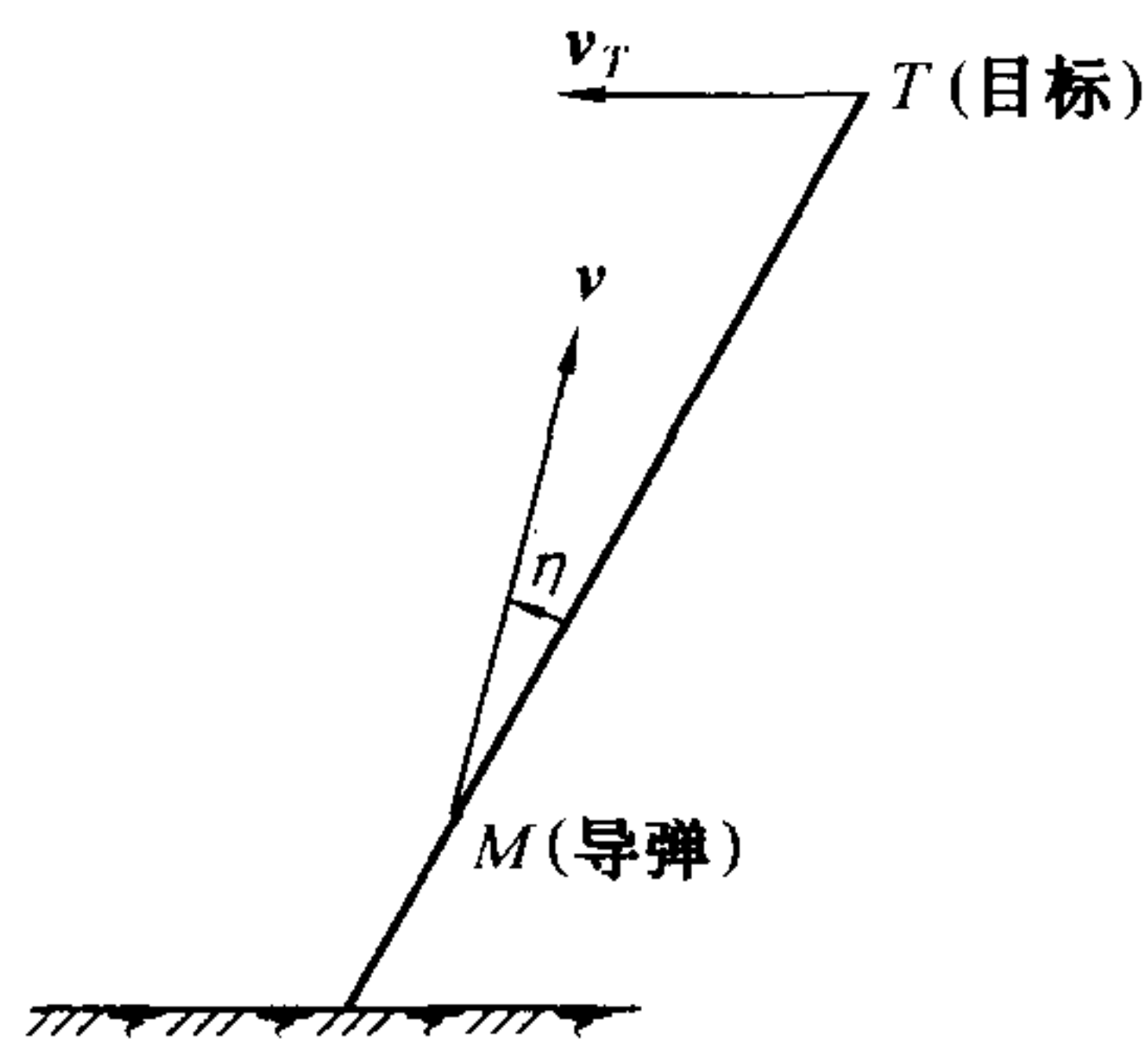


图 5.1 导弹攻击活动目标





有空空导弹、地空导弹及空地导弹等。也有的是目视控制,如地地反坦克导弹,坦克作为目标是活动的,根据其运动情况,通过有线操纵(或激光制导)控制导弹向目标飞去。另一类是用于攻击固定目标的,其特点是整个弹道或大部分弹道在发射前已被制导系统预先确定,如弹道式导弹,人造卫星运载火箭等。这里主要介绍第一类导弹的弹道。作为攻击活动目标的战术导弹,其弹道的大部分在稠密的大气层中,因此该种导弹都是有翼导弹。这类导弹除了尾翼之外,还有弹翼。对一般的防空导弹来说,其外形大致有三种类型,即“正常式”,“无尾式”和“鸭式”,其示意图见图 5.2。

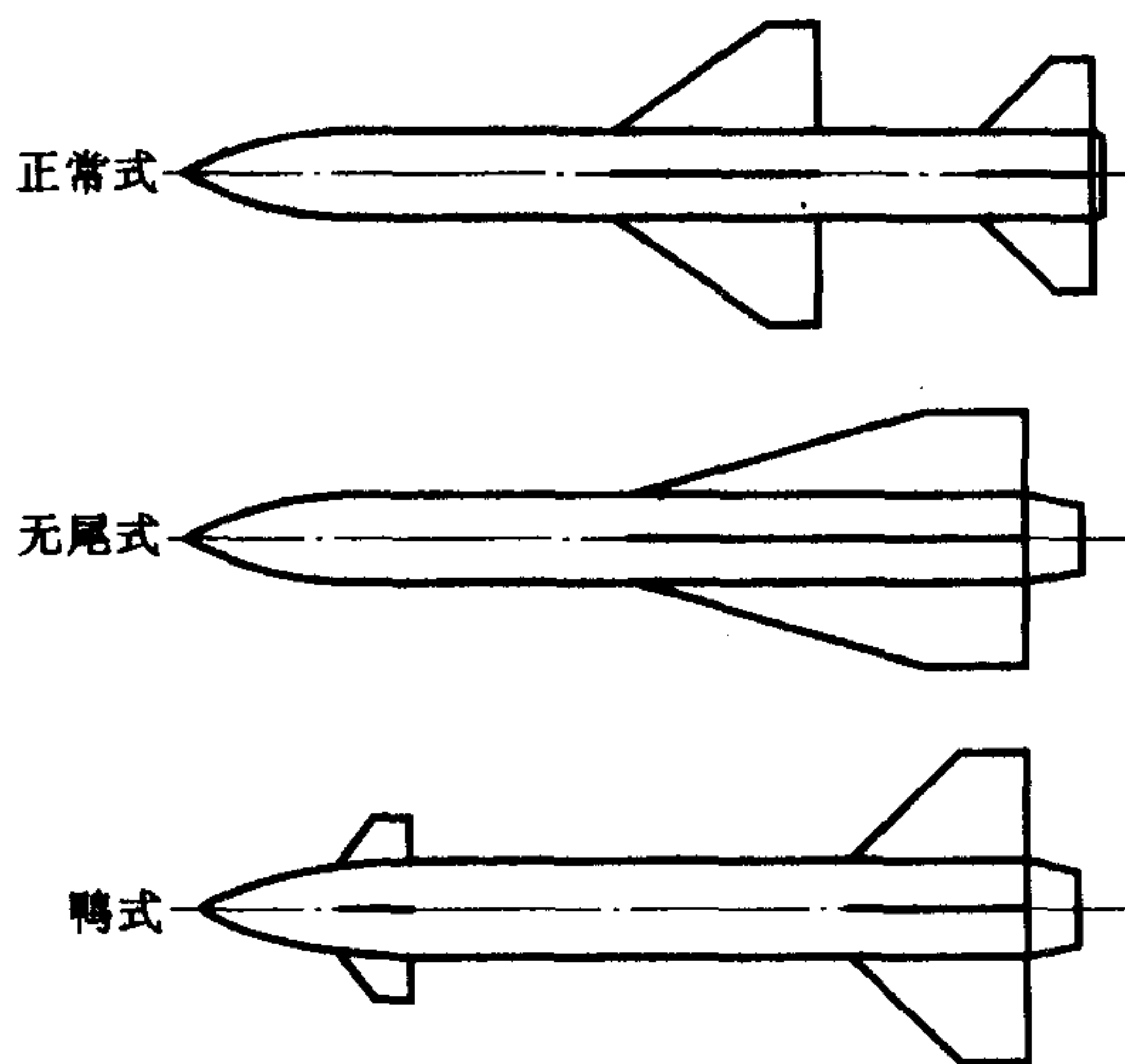


图 5.2 反飞机导弹外形示意图

正常式导弹又称普通式,其尾翼提供恢复力矩,起稳定作用,弹翼提供升力,以保证导弹机动

飞行。弹翼有可转动的,也有不能转动的,后者需要尾翼转动,这时的尾翼兼做舵面;通过舵面转动产生控制力,对弹体质心造成一个力矩来转动弹体以形成一个攻角,于是弹翼便产生必要的升力使导弹机动飞行。可见后者不及由弹翼直接转动提供升力来得迅速,无尾式是以弹翼兼行尾翼的作用。若以空气动力舵面做操纵机构时,则可将舵面装于弹翼后缘。鸭式乃将舵面移至重心前方,尾翼与弹翼合并为一。各类弹外形的气动力布局分析,可参阅有关资料。

对反坦克导弹,最常见的外形如图 5.3 所示。其弹翼的平面形状,绝大多数都是矩形,或接近矩形。这是由于其飞行速度大多是亚声速的缘故。当速度更高时,外形将相应改变。

目前在不同导弹上或同一导弹的不同弹道段上常用的制导方法有以下几种(相应的弹道也以该控制方法而命名)。

(1)自主控制(或称方案控制或预定制导)。其特点是导弹与目标无直接联系,完全依靠弹内的制导设备(参照弹内或外界某些预先固定的基准),拟制出控制信号,控制导弹按预定弹道飞行,直至命中目标。它只适用攻击固定目标,或用于地空导弹的起始段——作为很短的一段控制,使弹道按一定顺序弯曲,此即地空导弹的自主段。

(2)遥控。依靠设在地面、海上舰艇或飞机上的指挥站来测定目标和导弹的相对位置,并向导弹发出命令飞向目标。常见的有无线电波束制导、无线电指令制导等。无线电波束制导是由雷达发射出无线电波束射向目标,该波束一直跟踪目标,随目标的移动而转动。导弹永远不脱离波束,好似骑在波束轴线上,故波束制导也称之为驾束制导。无线电指令制导又叫指挥制导,乃由指挥站测出目标和导弹的运动状态,根据预定的导引方法,由计算装置算出导弹相

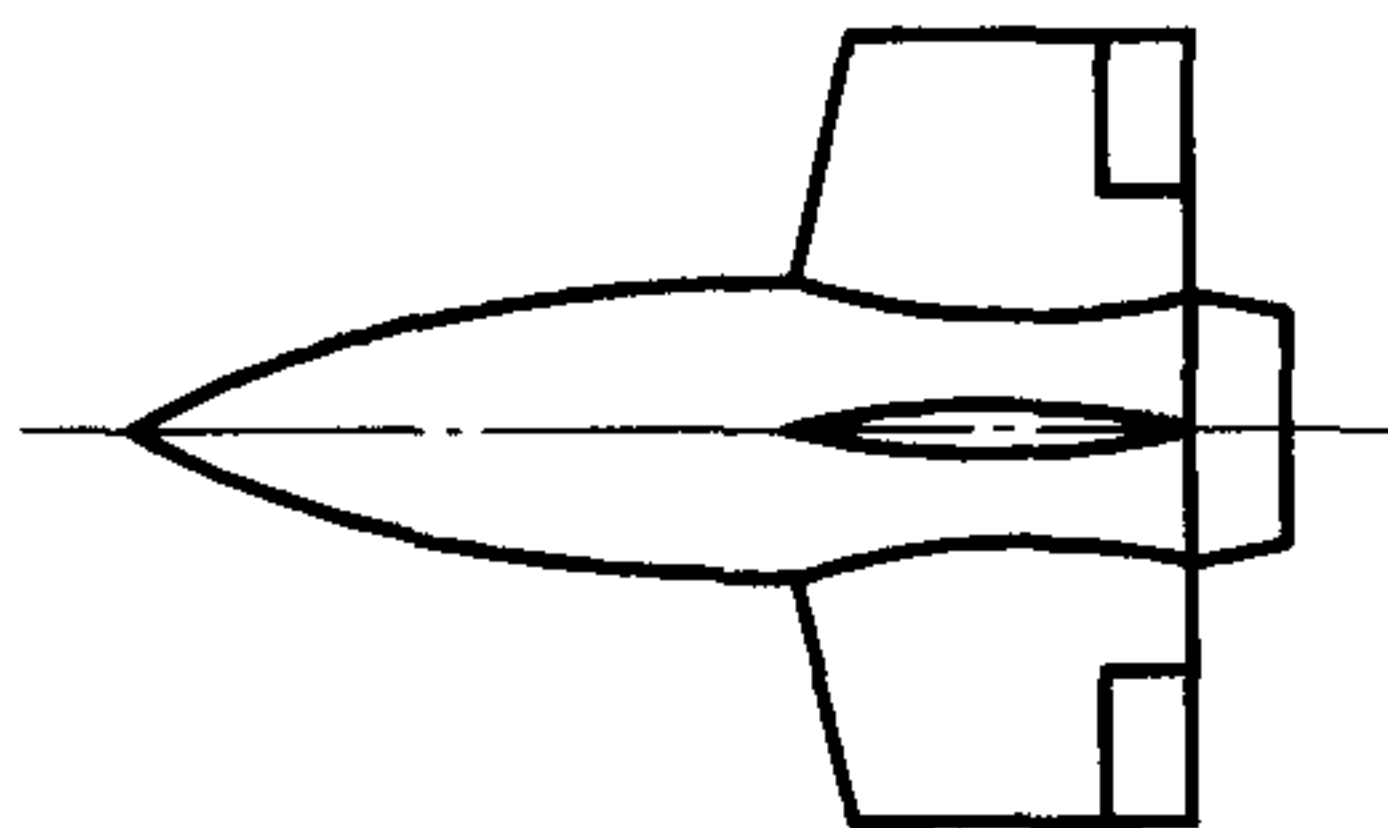


图 5.3 无尾式反坦克导弹外形示意图





对目标的偏移量,从而给导弹发出指令以便消除这种偏移。

(3)自动瞄准。自动瞄准系统也称为自寻系统。它利用目标辐射的能量或目标反射的能量,向目标自动地引导导弹,所有的制导系统均装在弹体内。其能量有的是红外线,有的为电磁波,有的为激光。此类制导多为空空导弹所采用,也有的用在地空导弹或飞航式导弹在接近目标时的末段制导上。自寻制导根据能量来源的不同,又可细分为以下三类:

①主动式自寻制导:导弹主动向目标发射能量(电波、激光等),并接收从目标反射回来的能量,从而跟踪目标;

②半主动式自寻制导:由指挥站向目标发射无线电波,由导弹接收目标反射的信号,从而跟踪目标。此种制导由于能源强,故作用距离大,被广泛采用;

③被动式自寻制导:能量发自目标,红外线制导就是其中之一。

除了上述三大类制导方式之外,还可在同一导弹的飞行过程的不同阶段上,采取不同的制导方式。如地空导弹起初用自主控制,以后用波束制导,最后又用自寻制导。若在一个导弹上装有两种以上的导引系统者,谓之复合制导。此种方式在于充分发挥不同制导方式的优点,克服各自之不足,因为自寻制导是离目标愈近愈准确,但作用范围有一定限制;遥控的作用距离大,但离指挥站愈远(导弹接近目标),则误差愈大。

导弹弹道如同无控火箭弹道一样,首先要解决的也是所谓理想弹道问题。对无控火箭的理想弹道,是建立在六条基本假设基础上的。类似的情况对于导弹来说,还把控制系统的工作看成无延滞的理想工作。就是说,人为给定的导引关系是严格保证的,不存在误差,但实际上误差是存在的。

目前,导引的方法有很多种。多年来,人们把作为拦截活动目标所采用的导引方法分为两类。一类是适用于自动瞄准制导系统的两点法(导弹和目标),有追踪法、平行接近法、比例导引法等;另一类是适用于遥控系统的三点法(导弹、目标和制导站)。前者的某些导引方法遥控也可以采用。应该指出,目前多采用最优过程理论确定最优导引律。以上这些传统的导引方法虽然显得过时,但却是学习和研究有控弹道的基本知识,况且像比例导引法和三点法仍在某些型号中采用,有关人员就有必要掌握这些制导规律。

## 5.2 自动瞄准导弹相对运动方程

自动瞄准导弹攻击活动目标时,导弹是根据它和目标之间的相对位置及相对运动而导向目标的。因此,必须研究导弹与目标之间的相对运动。在运动学研究中,通常都把导弹和目标看成为质点,并近似地认为二者始终在同一平面内。事实上,地空、空空导弹的实际弹道与平面弹道差别不大。这个平面被称之为攻击平面,它可以是水平面,也可以是铅垂面,一般为倾斜面。相对运动方程采用极坐标系。导弹相对目标的位置用极坐标 $(r, q)$ 表示。导弹与目标的相对位置如图 5.4 所示。图中:





$r$ ——导弹  $M$  与目标  $T$  的相对距离,  $MT$  线被称为目标瞄准线, 简称目标线或视线;

$q$ ——目标线与攻击平面内某一基准线  $x$  之间的夹角, 称为目标方位角或视线角, 目标线相对基准线逆时针转动为正;

$\sigma, \sigma_T$ ——导弹、目标速度矢量与基准线  $x$  之间的夹角, 速度矢量相对基准线逆时针转动为正;

$\eta, \eta_T$ ——导弹、目标速度矢量与目标线之间的夹角, 称为前置角。目标线相对速度矢量逆时针转动为正。

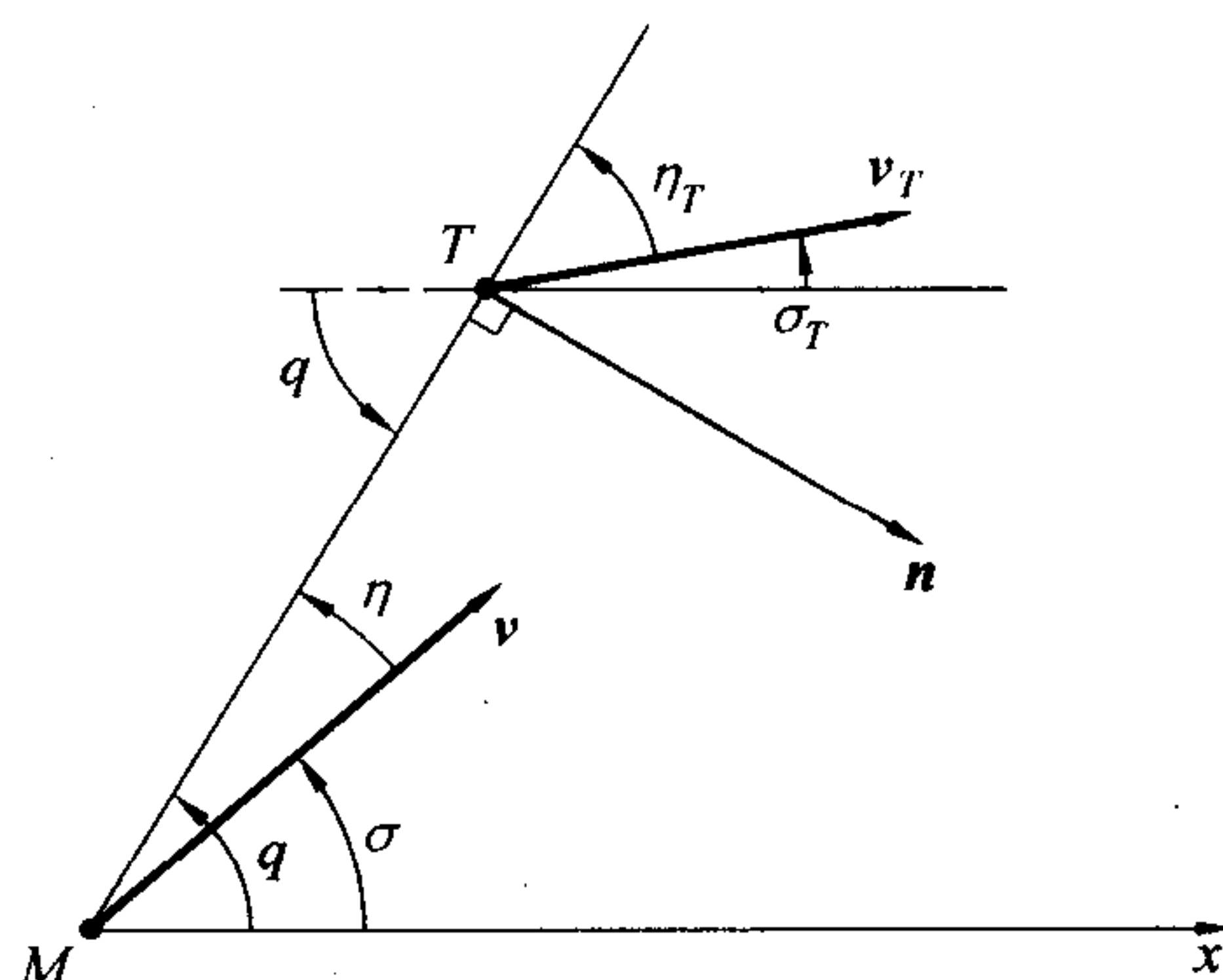


图 5.4 导弹与目标的相对位置

在建立相对运动方程时, 可把目标  $T$  看成是极坐标的原点, 而目标  $T$  到导弹  $M$  的连线为矢径, 以  $r$  表示。那么所谓相对运动, 就是研究  $r$  的大小(为  $r$ ) 和方向(以  $q$  度量)的变化规律。由理论力学得知,  $M$  点相对  $T$  点的相对速度(即  $dr/dt$ ) 等于  $M$  点的速度矢量与  $T$  点的速度矢量之差, 即

$$\frac{dr}{dt} = v - v_T \quad (5.1)$$

将式(5.1)投影到  $r$  矢量上, 就得到描述  $r$  大小变化的方程式; 将式(5.1)投影到  $r$  的垂直方向上, 并考虑到  $dr/dt$  在  $r$  垂直方向  $n$  上的投影即为法向速度, 它等于  $r$  的模数  $r$  与  $r$  的角速度  $dq/dt$  之积, 便得到描述  $r$  方向变化的方程式。于是便得到下列方程组

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -v \cos \eta + v_T \cos \eta_T \\ r \frac{dq}{dt} = v \sin \eta - v_T \sin \eta_T \\ q = \sigma + \eta \\ q = \sigma_T + \eta_T \end{cases} \quad (5.2)$$

方程组(5.2)的第三、四等式为联系方程, 若已知  $q, \sigma$  和  $\sigma_T$  三个量,  $\eta$  和  $\eta_T$  便已知了。

方程组(5.2)包含有六个独立参数:  $r, q, \sigma, \sigma_T, v, v_T$ 。它们是由目标和导弹的运动特性, 以及所采用的导引方法决定的。目标的运动特性, 包括其飞行高度、速度及机动性能, 都不能预先确定, 但可以选择几种典型的目标运动状态, 如等速直线飞行或等速盘旋等。从这种典型情况的分析中, 可以推断出目标按实际飞行的状况。这样, 目标的运动特性可视为已知的。导弹的飞行速度为  $v(t)$ , 只要导弹设计参数一经确定, 就完全可以将其速度变化规律计算出来。在研究导弹按目标导引的运动特性时, 可以把  $v(t)$  看成为已知的。

将方程组(5.2)写成下列形式



$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_T \cos(q - \sigma_T) - v \cos(q - \sigma) \\ r \frac{dq}{dt} = v \sin(q - \sigma) - v_T \sin(q - \sigma_T) \end{cases} \quad (5.2^*)$$

式中任一时刻的运动参数  $v_T$ 、 $\sigma_T$  和  $v$  均认为是已知的,剩下的未知数为  $r$ 、 $q$ 、 $\sigma$ 。但方程只有两个,故它不能确定导弹的运动学弹道。欲确定其弹道,需要增加一个与  $r$ 、 $q$ 、 $\sigma$  有关的方程,即

$$f(r, q, \sigma) = 0 \quad (5.3)$$

它表示自动瞄准导弹的导引关系。自动瞄准导弹的飞行控制一般是方向控制,即制导系统只控制导弹 - 目标线的角方位或角速度。因此,其控制的对象是目标线相对导弹速度矢量线或弹体纵轴的位置。目标线与导弹速度矢量线的夹角  $\eta$  称为前置角,可设定它为常数,也可确定为变量。当给定

$$\eta = 0 \quad (5.4)$$

时,则导弹速度矢量总是指向目标,此是追踪法或称纯追踪法。若给定

$$\eta = \text{const} \quad (5.5)$$

这种导引法叫等前置角法,又称广义追踪法。若控制目标线在空间的方向保持不变,它在空间保持平行移动,那么

$$q = q_0 = \text{const} \quad (5.6)$$

这就是平行接近法。式中,  $q_0$  为制导初始瞬间时的目标线方位角。如果导弹的速度方向变化率  $\frac{d\sigma}{dt}$  与目标线方向变化率是正比关系,即

$$\frac{d\sigma}{dt} = K \frac{dq}{dt} \quad (5.7)$$

式中  $K$  为比例系数,这种导引方法称为比例导引法。

这样,在已知目标运动规律和导弹速度  $v(t)$  的条件下,就可以由运动学方程及导引关系方程完全把运动学弹道确定下来。应该指出,如此确定的弹道是导弹在相对坐标系  $(r, q)$  中所确定的飞行路线,即所谓“相对弹道”,就是观察者在活动目标上所看到的导弹运动轨迹。如果要确定导弹的绝对弹道,即相对地面坐标系  $xoy$  的弹道,可进行下列坐标变换(图 5.5)

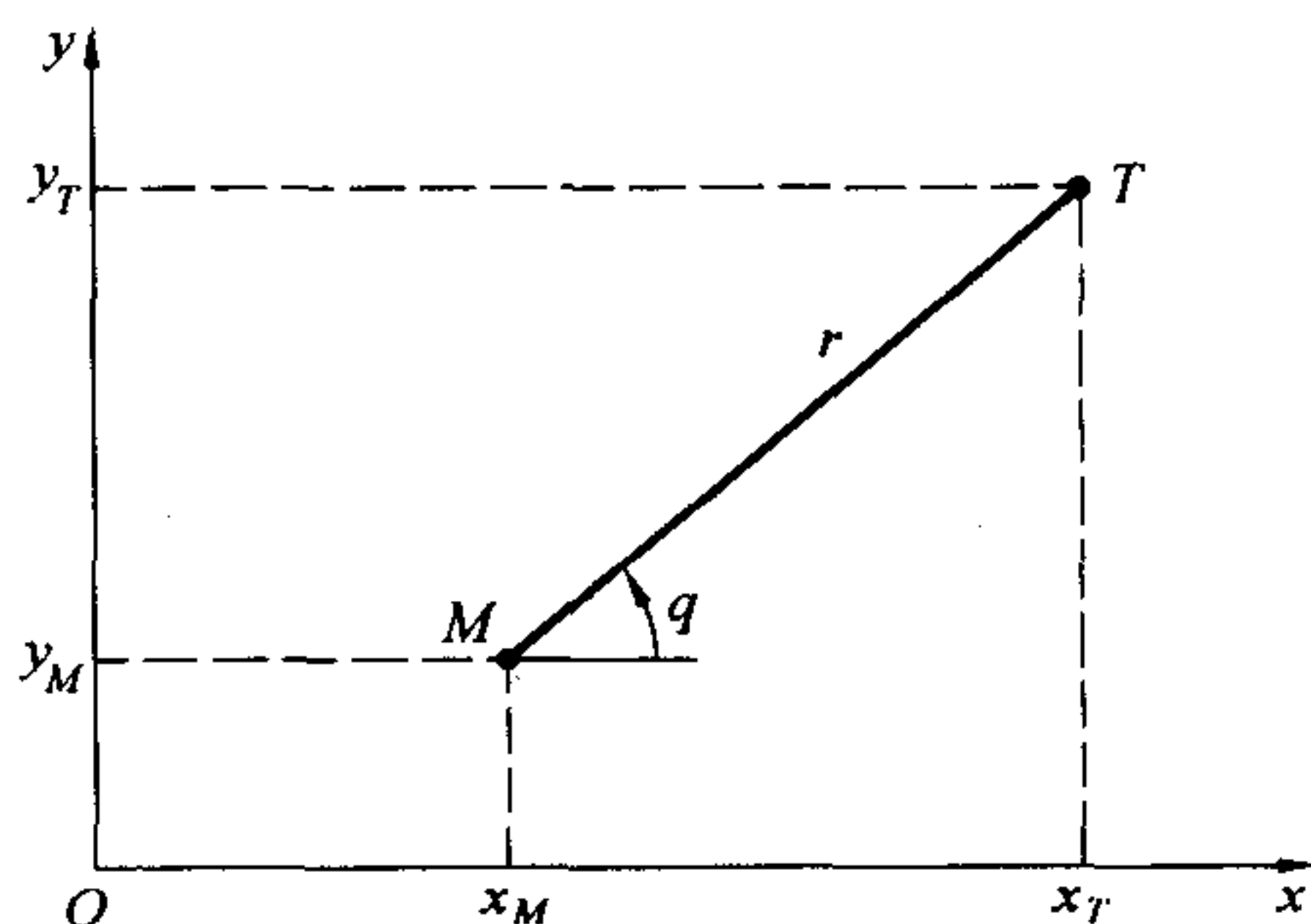


图 5.5 相对坐标系与地面坐标系间的关系

$$\begin{cases} x_M = x_T(t) - r \cos q \\ y_M = y_T(t) - r \sin q \end{cases} \quad (5.8)$$





### 5.3 追踪弹道

追踪法是最早提出的一种导引方法。这种方法目前已不大采用,但其弹道特性却有启发作用。首先研究一种最简单的情况,即目标作等速直线飞行,导弹的飞行速度大小不变,并且它的速度方向永远指向目标。取  $x$  轴与目标飞行速度方向平行,如图 5.6 所示。

导弹运动方程(5.2)简化为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_T \cos q - v \\ r \frac{dq}{dt} = -v_T \sin q \end{cases} \quad (5.9)$$

初始条件

$$r = r_0, \quad q = q_0$$

令速度比

$$p = \frac{v}{v_T} \quad (5.10)$$

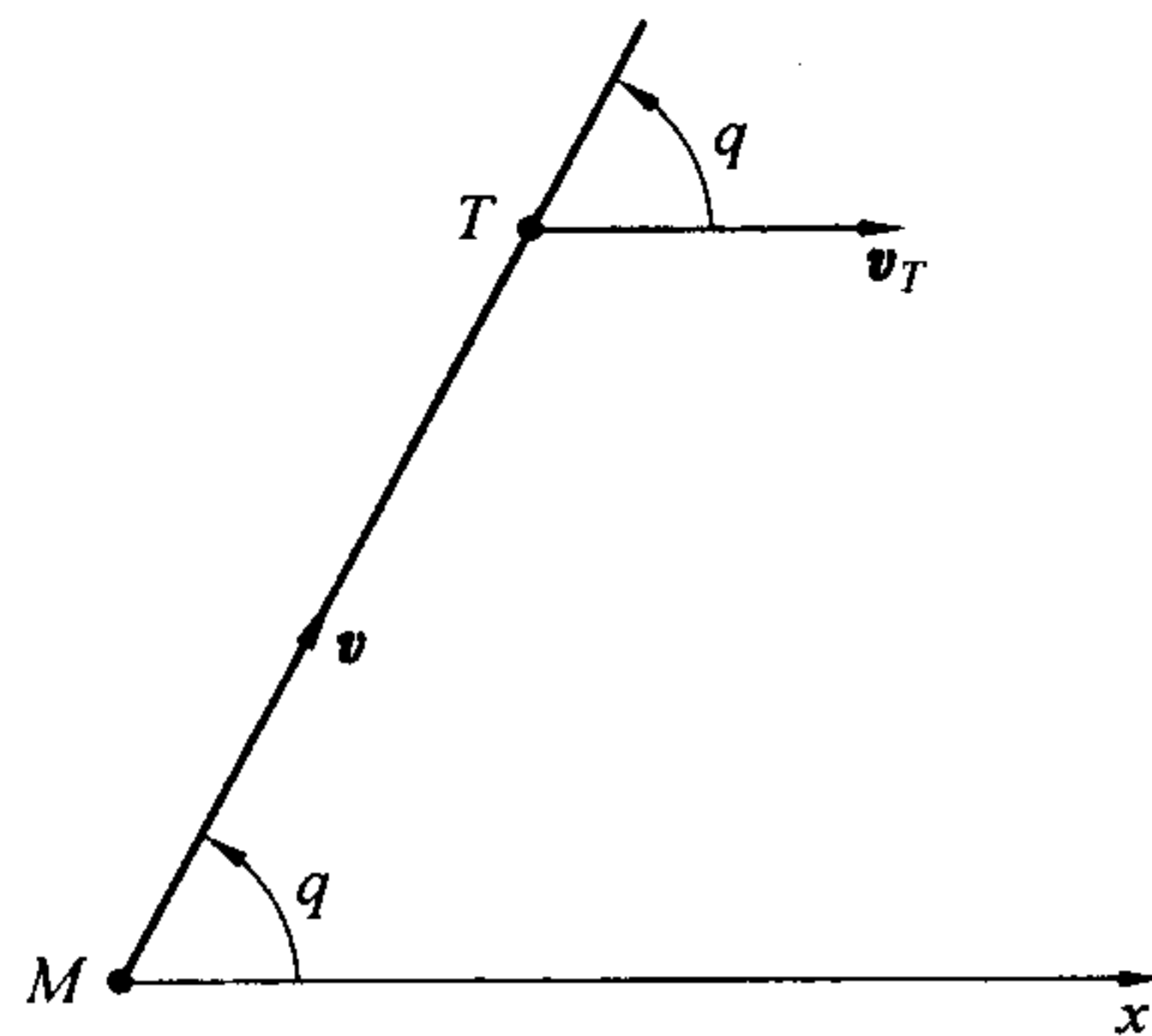


图 5.6 追踪弹道所用坐标系

将式(5.9)左右两边分别相除,并分离变量积分,得

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} &= \int_{q_0}^q \frac{(p - \cos q)}{\sin q} dq \\ \ln \frac{r}{r_0} &= p \int_{q_0}^q \csc q dq - \int_{q_0}^q \cot q dq \end{aligned}$$

查积分表,可得

$$\ln \frac{r}{r_0} = p \ln \left( \frac{\tan \frac{q}{2}}{\tan \frac{q_0}{2}} \right) - \ln \left( \frac{\sin q}{\sin q_0} \right)$$

利用三角函数关系

$$\tan \frac{q}{2} = \frac{\sin q}{1 + \cos q}$$

可得

$$r = C \frac{(\sin q)^{p-1}}{(1 + \cos q)^p} \quad (5.11)$$

式中积分常数

$$C = r_0 \frac{(1 + \cos q_0)^p}{(\sin q_0)^{p-1}}$$



它取决于速度比和初始条件。

式(5.11)就是以目标  $T$  为原点,极坐标系内的追踪曲线方程式,即相对弹道方程。由此弹道方程可知,要命中目标,就须  $r \rightarrow 0$ ,这只有  $p > 1$ ,且  $q \rightarrow 0$  时才有可能。而  $q = 0$ ,则意味着尾追,即导弹总是要从目标正后方去击中。利用式(5.11),可以作出由不同初始条件所确定的相对弹道曲线族,示于图 5.7。

为了易于控制,应该使法向加速度尽量小些,那么就希望弹道平直些,最好以直线飞行攻击目标。由式(5.9)第二式

$$r \frac{dq}{dt} = -v_T \sin q \quad (5.12)$$

可知,当以初始瞄准角  $q_0 = 0^\circ$  或  $180^\circ$  攻击目标时,则  $\dot{q} = 0$ ,目标方位角  $q$  一直不变,便得到两条而且仅有的直线弹道。但二者在稳定性和抗干扰方面迥然不同。 $q = 180^\circ$ (迎击)是一条不稳定的直线弹道。就是说,一旦由于干扰作用使导弹偏离该直线,产生了一微小的偏差  $\Delta q$ (图 5.8),那么  $|\Delta q|$  将不断增大。因为  $\Delta q$  所引起的目标线转动角速度由(5.12)得出

$$r \frac{d(180^\circ + \Delta q)}{dt} = -v_T \sin(180^\circ + \Delta q)$$

或

$$\frac{d(\Delta q)}{dt} = \frac{v_T}{r} \sin \Delta q$$

可见  $\Delta \dot{q}$  与  $\Delta q$  同号,如  $\Delta q > 0$ ,则  $\Delta \dot{q} > 0$ , $\Delta q$  将不断增大;反之,如  $\Delta q < 0$ ,则  $\Delta \dot{q} < 0$ , $\Delta q$  将不断减小而  $|\Delta q|$  继续增大。所以导弹远离  $q = 180^\circ$  的直线。

$q = 0^\circ$ (尾追)时,与此情况恰恰相反,由  $\Delta q$  所引起的角速度为

$$\Delta \dot{q} = -\frac{v_T}{r} \sin \Delta q$$

$\Delta \dot{q}$  与  $\Delta q$  反号,若  $\Delta q > 0$ ,则  $\Delta \dot{q} < 0$ , $\Delta q$  将会减小;反之若  $\Delta q < 0$ ,则  $\Delta \dot{q} > 0$ , $\Delta q$  将增大即  $|\Delta q|$  减小,最后  $q$  恢复到  $0^\circ$ 。因此  $q = 0^\circ$  是一条稳定的直线弹道。

此外,由式(5.12)可见,对绝对值小于  $180^\circ$  的任何  $q$ ,当  $q > 0$  时,则  $\dot{q} < 0$ , $q$  将不断减小,

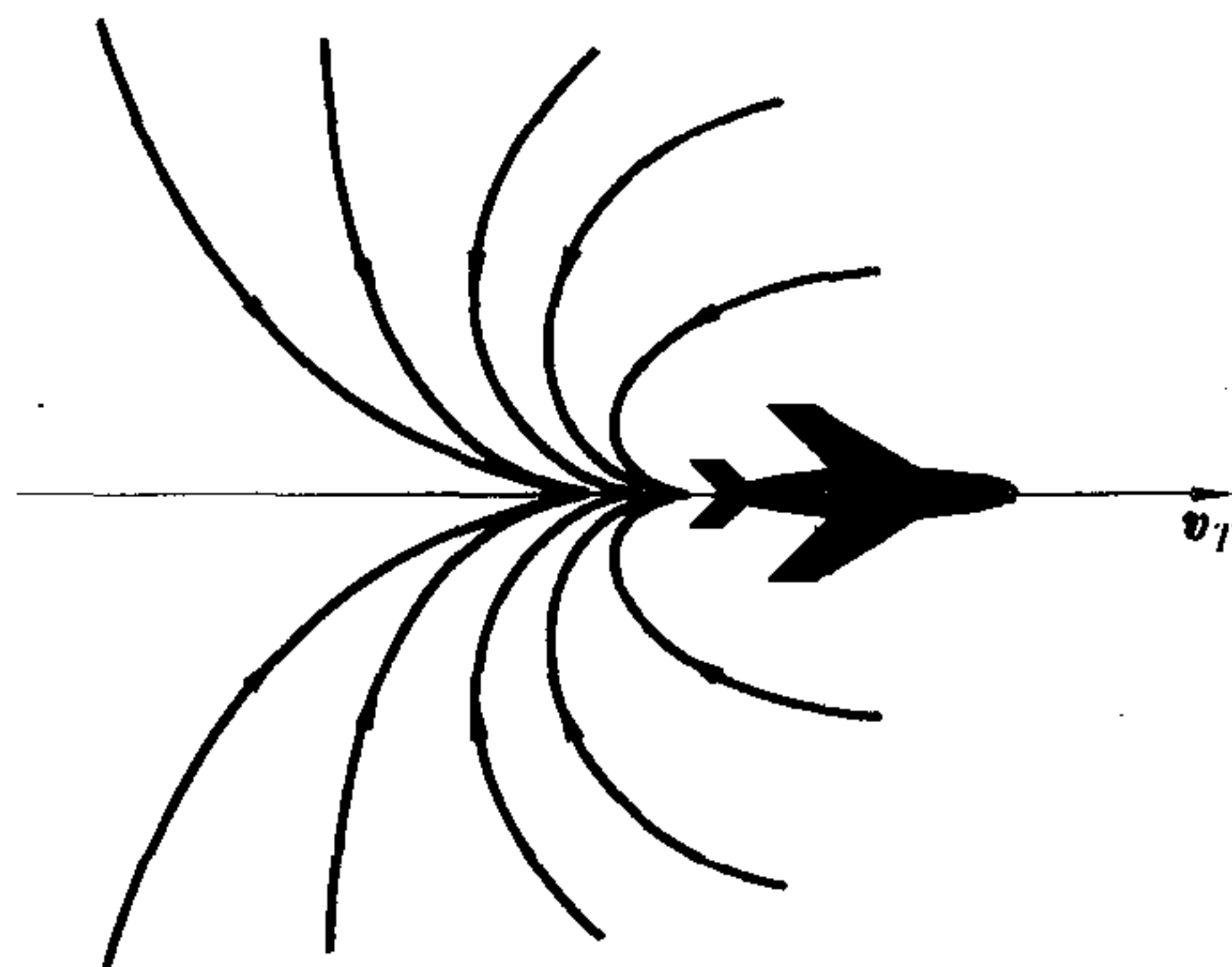


图 5.7 追踪法相对弹道曲线族 ( $p > 1$ )

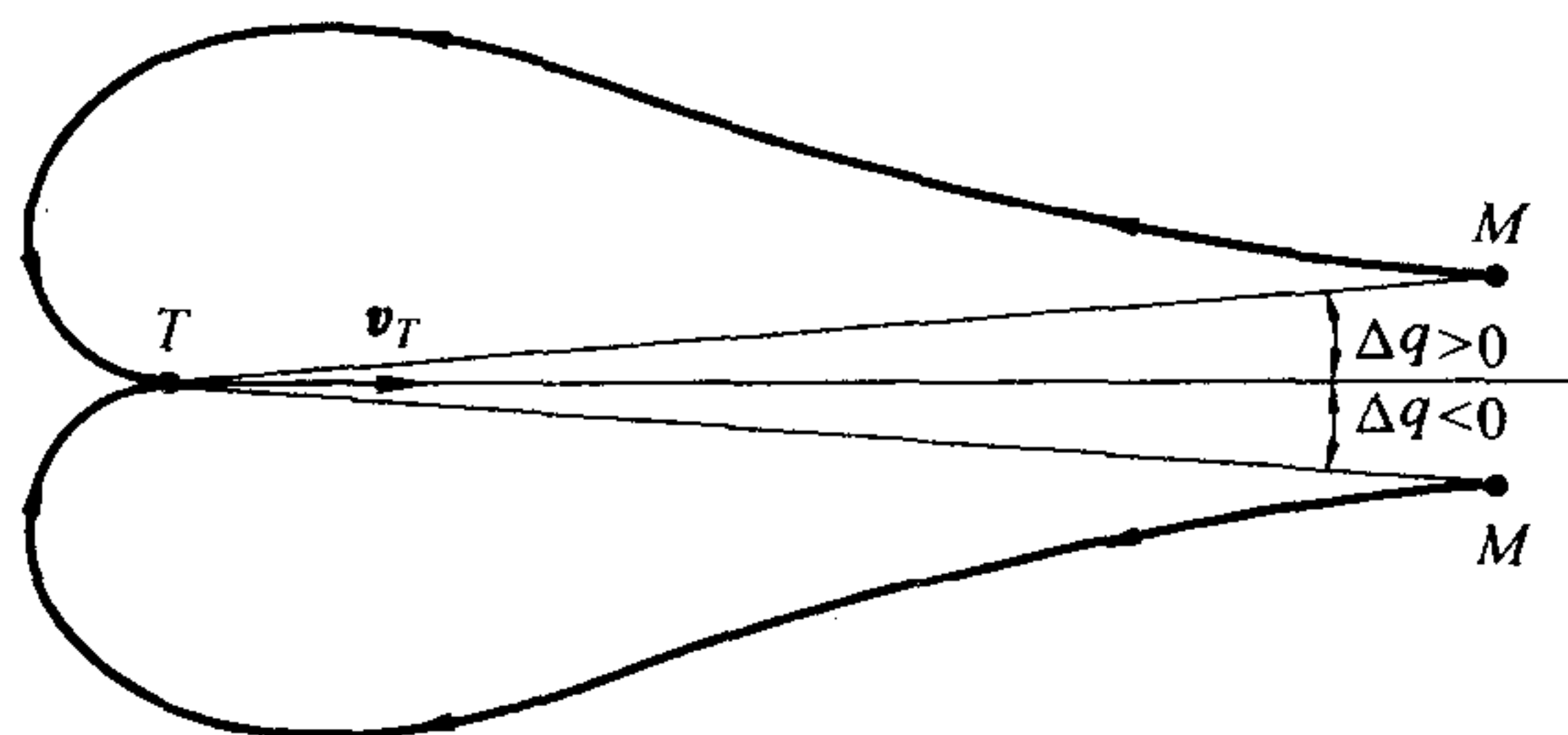


图 5.8 不稳定的直线弹道 ( $q = 180^\circ$ )





向  $q = 0^\circ$  靠近;若  $\Delta q < 0$ , 则  $\Delta \dot{q} > 0$ ,  $q$  将不断增大, 也向  $q = 0^\circ$  靠近。所以不管从哪个方向发射, 导弹都会绕到目标后面去尾追(图 5.7)。尤其在前半球( $|q_0| = 90^\circ \sim 180^\circ$ ) 攻击目标时也是如此, 此时将使弹道十分弯曲, 法向加速度过大, 这是追踪法的严重缺点。

下面来分析追踪弹道的法向加速度。事实上, 每一种导弹所提供的法向力是有限的, 因而在弹道上所允许的最大法向加速度也是有限的。如果导弹转弯过急, 致使其法向加速度  $a_n$  超过了其最大限度  $[a_n]$ , 那么导弹就会失去控制而无法击中目标。可见对弹道法向加速度的分析非常重要。

导弹法向加速度为

$$a_n = v \frac{dq}{dt}$$

将式(5.12)代入, 得

$$a_n = -\frac{vv_T}{r} \sin q \quad (5.13)$$

值得注意的是, 式(5.13)的导出, 并不是从弹道方程(5.11)出发而得到。在  $v$  和  $v_T$  一定的条件下,  $a_n$  仅是以目标为中心的坐标  $(r, q)$  所确定的函数。用数学观点来看, 这相当于一个“势”函数, 不过这里“势”的物理意义是法向加速度。为考察目标周围“势”函数的特性, 即弄清目标周围法向加速度大小的分布状况, 可以给定不同的法向加速度值  $a_{ni} (i = 1, 2, 3, \dots)$ , 从而作出等法向加速度曲线。导弹在飞行中的法向加速度大小的变化, 亦可从一族等法向加速度曲线判定。当给定一常数  $a_n$  时, 从式(5.13)可得

$$r = -\frac{vv_T}{a_n} \sin q \quad (5.14)$$

该式是极坐标系中的圆方程, 圆半径等于  $vv_T/(2|a_n|)$ , 此圆通过目标  $T$  且与目标速度矢量相切。给出不同的  $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots$ , 就得到一族半径大小不同的圆, 如图 5.9 所示。显然, 仅就数值大小而言, 法向加速度  $a_n$  对矢量  $v_T$  是对称分布的。考虑到  $a_n$  的正负号并没有多大实际意义, 因此在考察  $a_n$  的分布规律时, 往往不必计及其正负号, 下面图 5.10 及图 5.11 将是如此。

由图 5.9 还可看出, 圆半径与法向加速度是反比关系。如果依式(5.11)作出相对弹道曲线, 则它与圆的交点处的法向加速度就是该圆所相应的法向加速度值; 与弹道曲线相交的最小圆所相应的法向加速度, 就是该条弹道的最大法向加速度。如图 5.10 中的那条弹道的最大法向加速度, 就是在  $B$  点相切的一个圆所相应的法向加速度  $a_n^*$ 。

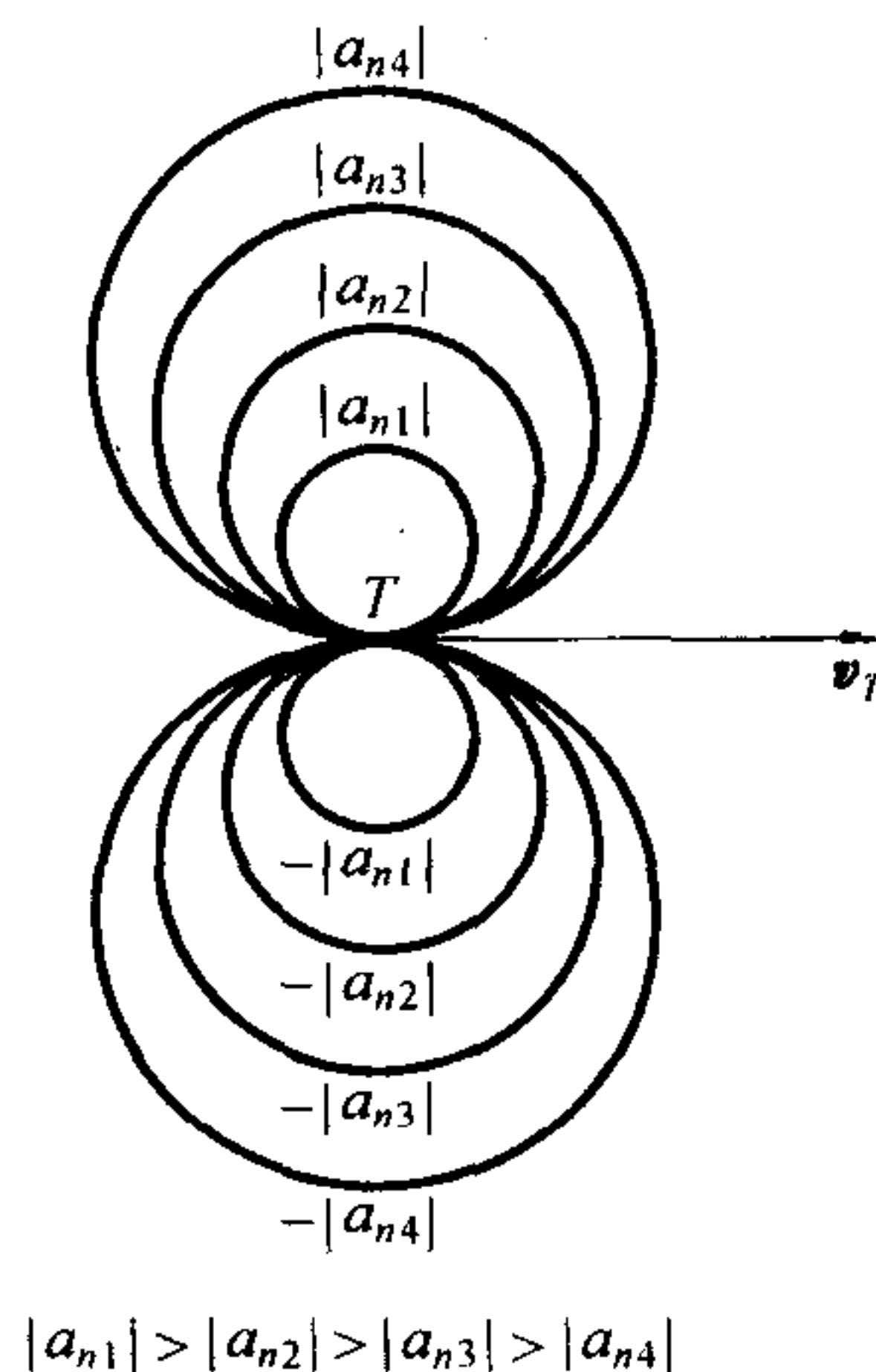


图 5.9 等法向加速度圆



从理论上可以证明,对速度比  $p = v/v_T < 2$  的弹道,在追踪过程中,  $B$  点以前的法向加速度是不断上升的,从  $B$  点到  $T$  点是减小的,直至趋于零。如果最大允许法向加速度  $[a_n] (> 0)$  给定之后,就可作出与  $[a_n]$  相应的等法向加速度圆,亦可作出与该圆相切的一条弹道。同时可作出与该弹道对  $v_T$  相对称的曲线,用斜划线表示两曲线所构成的区域,这个区域叫做攻击禁区。因为凡是初始条件在该区域之内,其弹道的最大法向加速度必将超过最大允许值而失控。只有在禁区之外,导弹飞行中的法向加速度才会小于最大允许值。

下面再看看速度比  $p$  对导弹法向加速度变化的影响。将式 (5.11) 代入式 (5.13),得

$$a_n = - \frac{v_T(1 + \cos q)^p}{C(\sin q)^{p-2}} \quad (5.15)$$

由于分母中  $\sin q$  有指数  $(p - 2)$ ,且根据前面的讨论,导弹在接近目标时的  $q \rightarrow 0$ ,故分三种情况

(1) 当  $1 < p < 2$  时,  $\lim_{q \rightarrow 0} a_n = 0$ ;

(2) 当  $p = 2$  时,  $\lim_{q \rightarrow 0} a_n = - \frac{4v_T}{C}$ ;

(3) 当  $p > 2$  时,  $\lim_{q \rightarrow 0} a_n \rightarrow -\infty$ 。

第三种情况是不容许的,故追踪法导引时的速度比  $p$  受到严格限制,其允许范围为  $1 < p \leq 2$ 。

综合上面分析,前置角为 0 的追踪法的缺点很严重:

① 导弹速度受到严格限制;② 只有一条稳定的直线弹道,而且是尾追的情况,导弹总是要绕到目标后面去攻击,使之迎面攻击的弹道非常弯曲,为限制最大法向加速度,导弹不能实施全向攻击,作战空域小。尽管追踪法的导引方法简单,但其实际意义是不大的(只在某种特殊情况下采用)。

为了扩大攻击范围,人们试图使导弹速度矢量相对于目标线超前一个常值夹角,即常值前置角  $\eta$ ,这种导引法被叫做广义追踪法。导弹相对于目标的运动方程可根据方程组 (5.2) 知

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -v \cos \eta + v_T \cos q \\ r \frac{dq}{dt} = v \sin \eta - v_T \sin q \\ q = \sigma + \eta \\ \eta = \text{const} \end{cases} \quad (5.16)$$

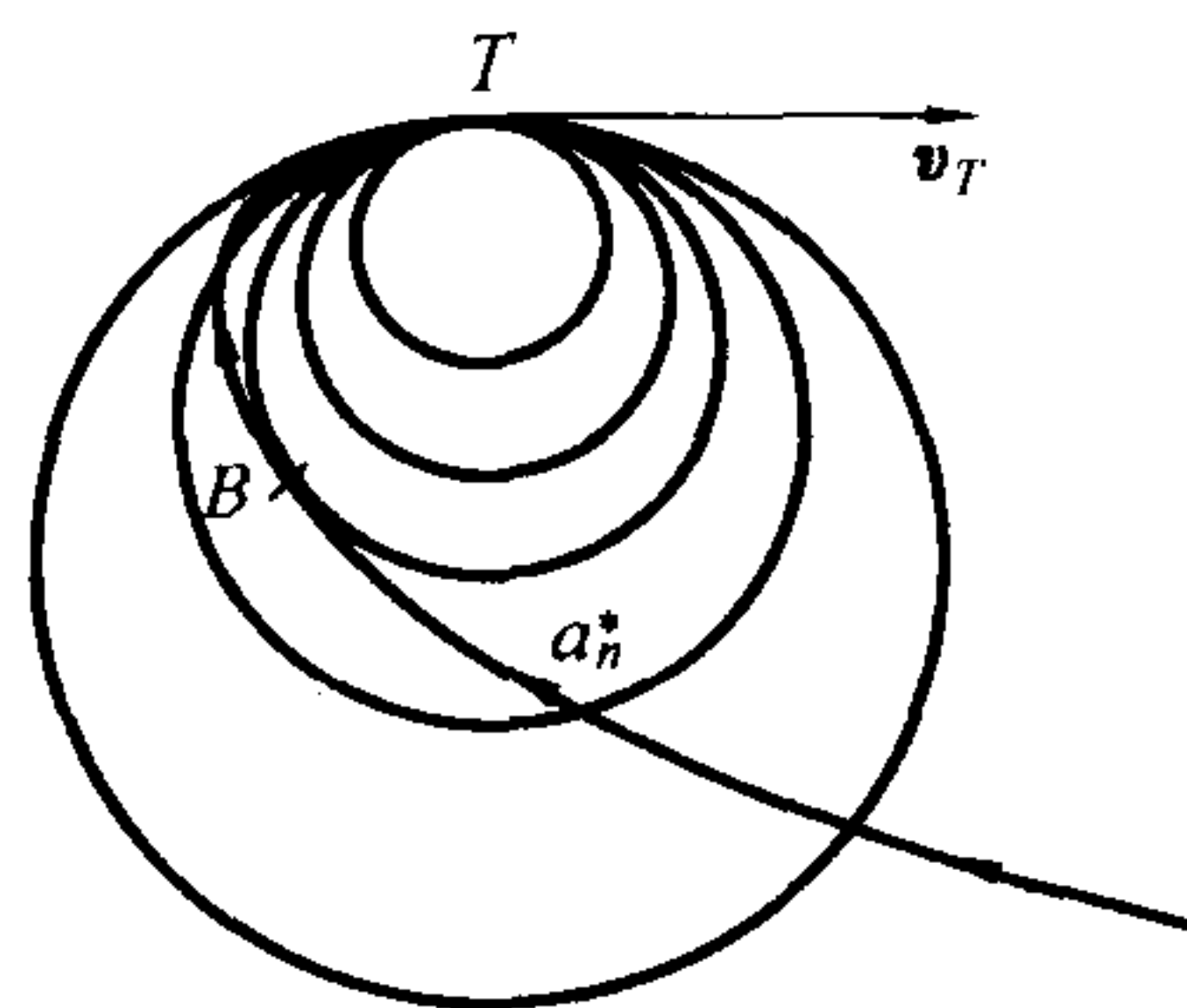


图 5.10 追踪弹道的法向加速度变化过程

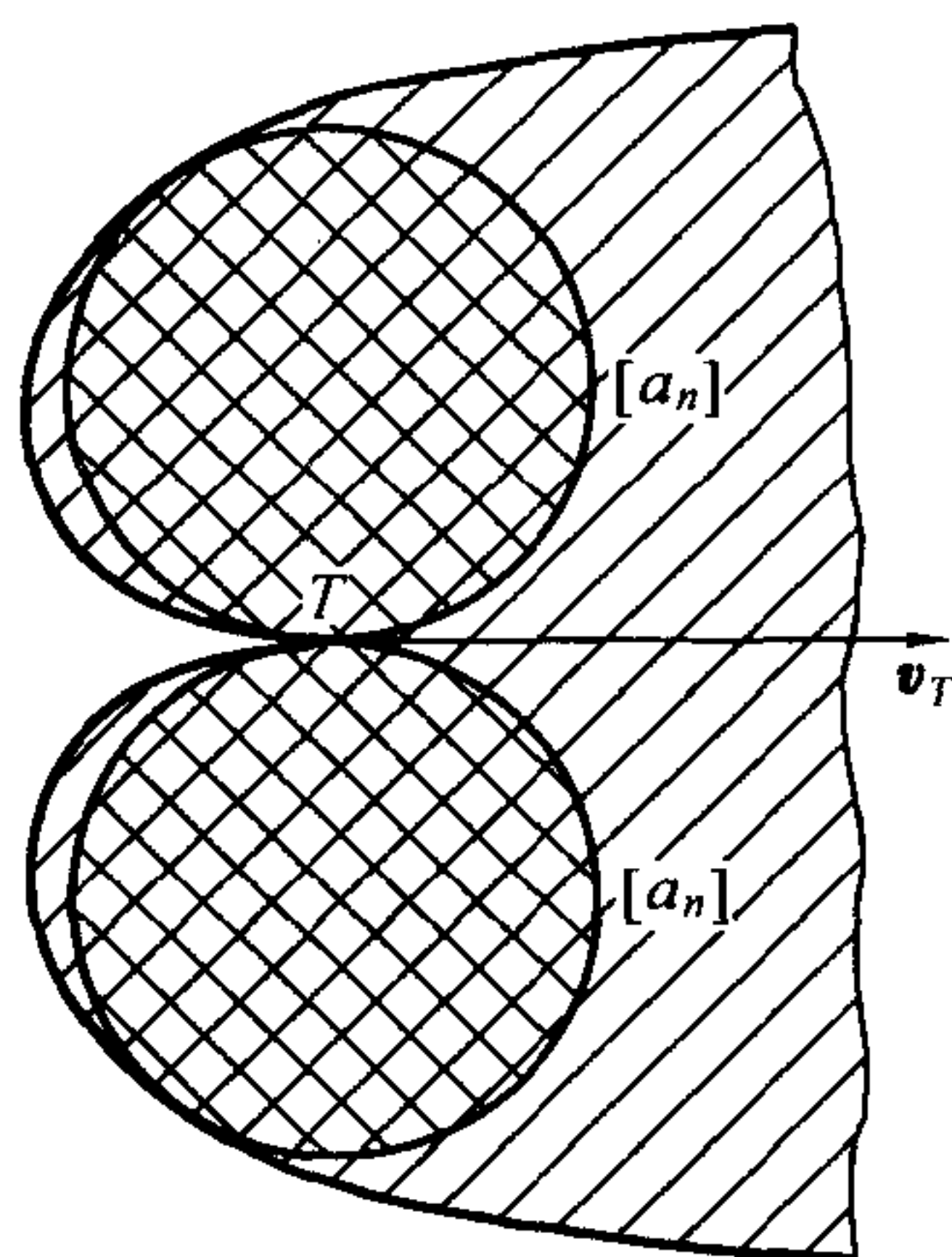


图 5.11 攻击禁区





在建立这组方程时,仍假定目标作等速直线运动,那么总可把基准坐标  $x$  轴取成与  $v_T$  方向一致。从式(5.16)的第二个方程知,当  $\frac{dq}{dt} = 0$  时的直线弹道满足

$$v \sin \eta - v_T \sin q = 0$$

这就给出了确定直线弹道方向的  $q$  角值(在  $|q \sin \eta| \leq 1$  时)

$$\begin{cases} q_1 = \arcsin(p \sin \eta) \\ q_2 = \pi - q_1 \end{cases} \quad (5.17)$$

仿照前面对直线弹道稳定性分析法,可以发现前半球的直线弹道也是不稳定的,只有一条分布在后半球的直线弹道才是稳定的。除了前半球只有理论意义的一条直线弹道外,所有广

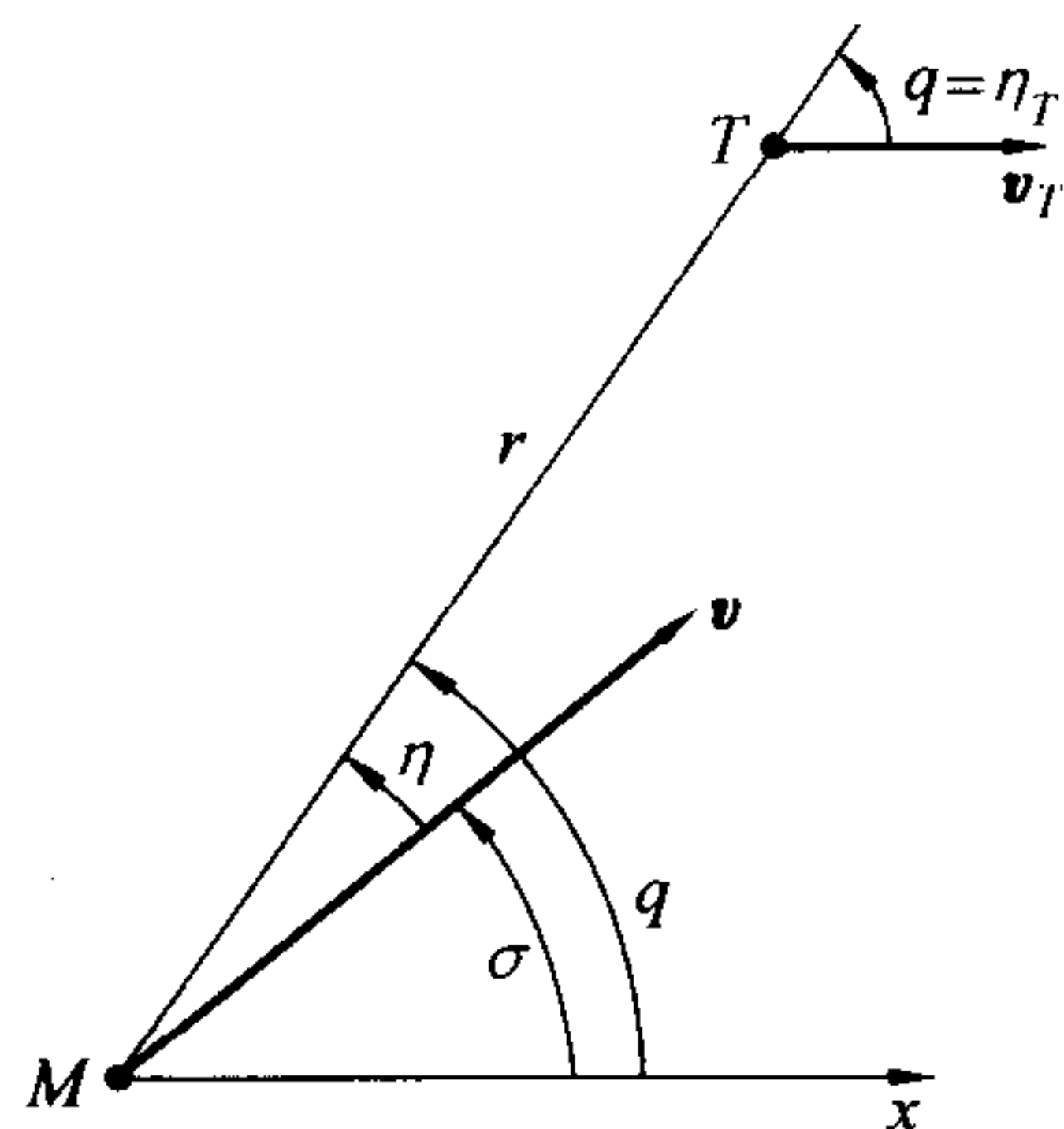


图 5.12 广义追踪法图

义追踪弹道曲线在接近目标时,都将与  $q_1$  角所确定的直线弹道相切。因而迎面攻击目标时的弹道仍将弯曲得很厉害。进一步对法向加速度分析表明,在对速度的限制方面,广义追踪法比纯追踪法并没有多少放宽。其主要优点,在于对任意起始角  $q_0$  发射导弹时,可以及时地选择前置角为  $\eta = \arcsin[(1/p) \sin q_0]$ ,使之得到近似于直线的弹道。但这种导引关系使分布在

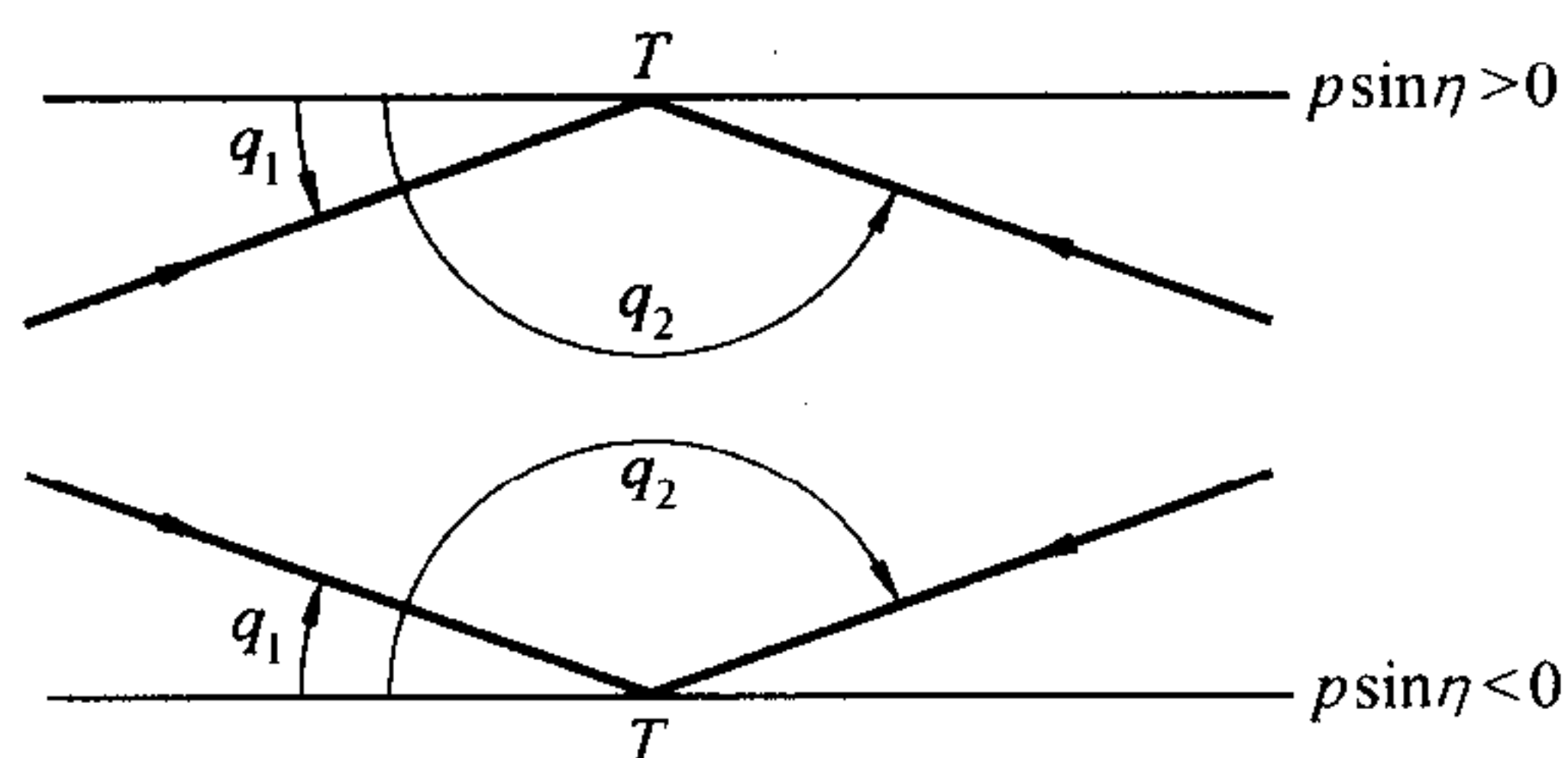


图 5.13 广义追踪法直线弹道

前半球的可能直线弹道是不稳定的。总的来讲,广义追踪法的导弹速度和攻击位置仍受到较大限制,并没有克服纯追踪法的严重缺点,因而还需寻求更好的导引方法。

## 5.4 平行接近路线

平行接近路线是按平行导引法所得到的飞行路线,基本特点是导弹在攻击目标过程中,目标线在空间保持平行移动。这一导引方法的导引关系为

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{或} \quad q = q_0 = \text{const} \quad (5.18)$$

式中,  $q_0$  为目标线在制导初始瞬间的方位角。

由式(5.18)和式(5.2)的第二式可知,这就是要求导弹速度  $v$  和目标速度  $v_T$  在目标线垂直方向上的分量相等,即(见图 5.14)

$$v \sin \eta = v_T \sin \eta_T \quad (5.19)$$

也就是说,  $v_T$  和  $v$  矢量端点的连线与目标线是平行的。导弹的前置角  $\eta$  只有满足(5.19)这一关系式,才可能沿平行接近路线飞行。式(5.19)可写为



$$\eta = \arcsin\left(\frac{\sin\eta_T}{p}\right) \quad (5.20)$$

如果目标作等速直线运动,导弹作等速运动,且按式(5.20)确定前置角,则导弹与目标二者的速度矢量的延伸线相交于某一点  $B$ (图 5.14),  $B$  将是导弹与目标的遭遇点。也就是说,当目标作等速直线飞行时,根据式(5.20)来选定前置角,就相当于导弹瞄准目标的遭遇点。如果导弹与目标之速度比  $p$  和目标前置角  $\eta_T$  是变化的,那么就必须按照式(5.20)来相应地改变导弹前置角,以保证目标线方向不变。在目标作机动飞行时的导弹弹道如图 5.15 所示,甚至目标作等速直线运动时,仅导弹飞行速度的变化也会导致弹道弯曲。可见按平行接近法飞行的全部相对弹道是直线,但绝对弹道则不一定是直线。按照平行接近导引法,当目标作机动飞行时,导弹的飞行弹道也将弯曲。然而导弹弹道的弯曲程度要比目标飞行路线的弯曲程度小。相对地说来,为了

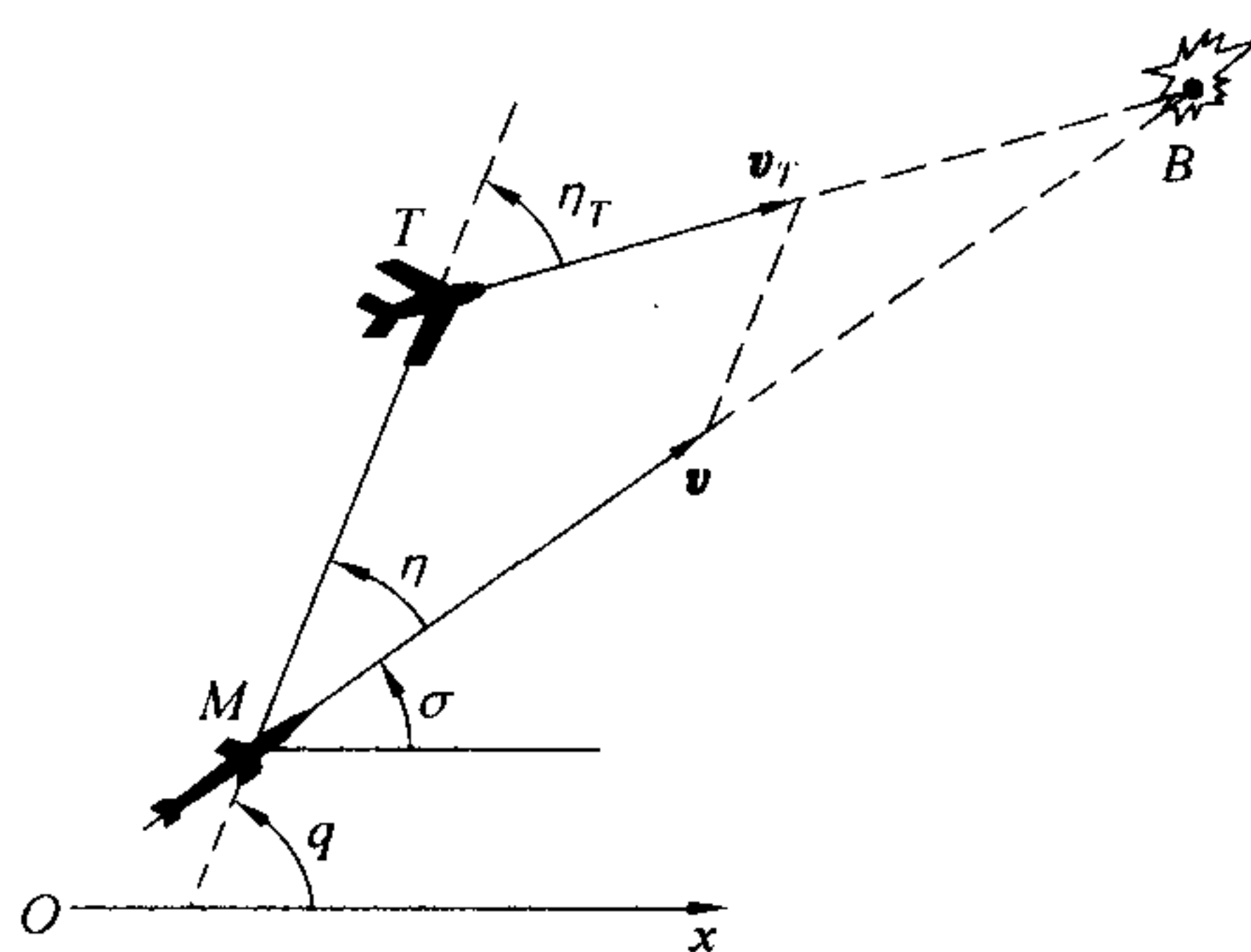


图 5.14 平行导引法

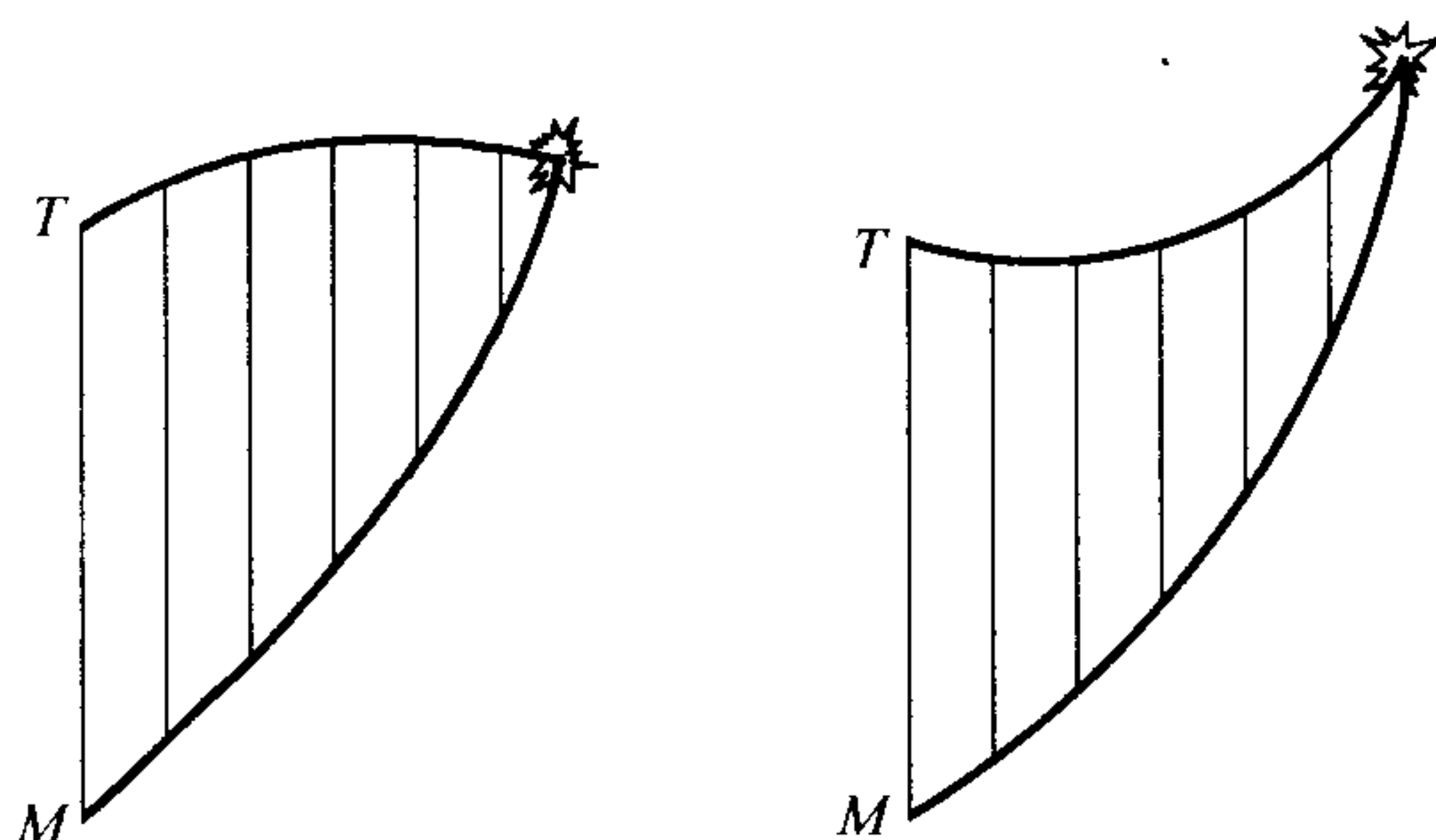


图 5.15 目标机动飞行时的导弹平行接近路线

了击中目标,导弹所作的机动比目标的机动要少。根据导引关系式(5.19),两边对时间求导数,得

$$v\dot{\eta}\cos\eta + \dot{v}\sin\eta = v_T\dot{\eta}_T\cos\eta_T + \dot{v}_T\sin\eta_T$$

由于  $q = \eta + \sigma = \eta_T + \sigma_T = \text{const}$ , 故  $\dot{\eta} = -\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\eta}_T = -\dot{\sigma}_T$ , 于是得

$$v\dot{\sigma}\cos\eta = v_T\dot{\sigma}_T\cos\eta_T + \dot{v}\sin\eta - \dot{v}_T\sin\eta_T \quad (5.21)$$

当  $v$  和  $v_T$  为常值时,式中后两项为零,则上式变为

$$\frac{v\dot{\sigma}}{v_T\dot{\sigma}_T} = \frac{\cos\eta_T}{\cos\eta} \quad (5.22)$$

式中,  $v\dot{\sigma}/(v_T\dot{\sigma}_T)$  正是导弹与目标的法向加速度之比,即  $a_n/a_{nT}$ 。由于  $p = v/v_T > 1$ , 由式(5.19)有

$$\frac{\sin\eta_T}{\sin\eta} = \frac{v}{v_T} > 1$$

则  $\eta_T > \eta$ , 从而  $\cos\eta_T < \cos\eta$ , 那么由式(5.22)知

$$\frac{a_n}{a_{nT}} < 1 \quad (5.23)$$





导弹法向加速度比目标法向加速度要小,就表明导弹的飞行弹道比目标机动飞行时的路线要平缓。这是在假定式(5.19)导引关系成立和导弹与目标速度值不变的条件下所得到的结论。然而实际中的前置角不可能绝对准确地满足式(5.20),由于控制过程中有误差,以致可能使不等式(5.23)遭到破坏;另一方面,当考虑到  $v$  和  $v_T$  之值有变化时,遭到破坏的可能性更大。但是,导弹的许可法向加速度一般都能保证作到比目标的大几倍(如2~3倍),这样,目标无论怎么机动,也难免遭到导弹击中。

总之,平行接近导引法以  $dq/dt = 0$  作为控制系统工作的基础,它保证导弹的相对速度  $v_r = dr/dt$  准确地指向目标的方向,能得到较之目标轨迹更为平缓的弹道,并且导弹的任意位置都可实施攻击,是一种较理想的导引方法。但是,为了严格保持平行接近法的导引关系[式(5.19)],对制导系统提出了很高的要求,致使制导系统的设计十分困难,因此目前并未能广泛采用。

## 5.5 比例导引法

### 5.5.1 引言

比例导引法属前置角为变量的导引方法之一。其基本原则就是让导弹速度矢量  $v$  的转动角速度与目标线的转动角速度成正比关系,即导引关系为

$$\frac{d\sigma}{dt} = K \frac{dq}{dt} \quad (5.24)$$

式中  $K$ ——比例系数,又称为导航系数。

将式(5.24)积分,代入初始条件  $\sigma_0, q_0$ , 则

$$\sigma - \sigma_0 = K(q - q_0) \quad (5.25)$$

若  $K = 1, q_0 = \sigma_0$ , 则  $\sigma = q$ , 此即导弹前置角  $\eta = 0$  的情形,就是追踪法的导引关系。若  $K = 1, q_0 = \sigma_0 + \eta_0$ , 那么  $q = \sigma + \eta_0$ , 即导弹前置角  $\eta = \eta_0$  (常值), 这就是广义追踪法的导引关系。又由式(5.24)知  $dq/dt = (1/K)d\sigma/dt$ , 当  $K \rightarrow \infty$  时,  $dq/dt = 0$ , 这就是平行接近法的导引关系。这些说明了式(5.24)这个导引关系式可以包括前面所讨论过的几种导引关系。为了区别起见,讨论比例导引法时把比例系数选定在  $1 < K < \infty$  范围内。显然,比例导引法所得到的弹道将是介乎于平行接近法与常值前置角法之间的弹道,如图5.16所示。对比例导引法来说,最关紧要的问题是如

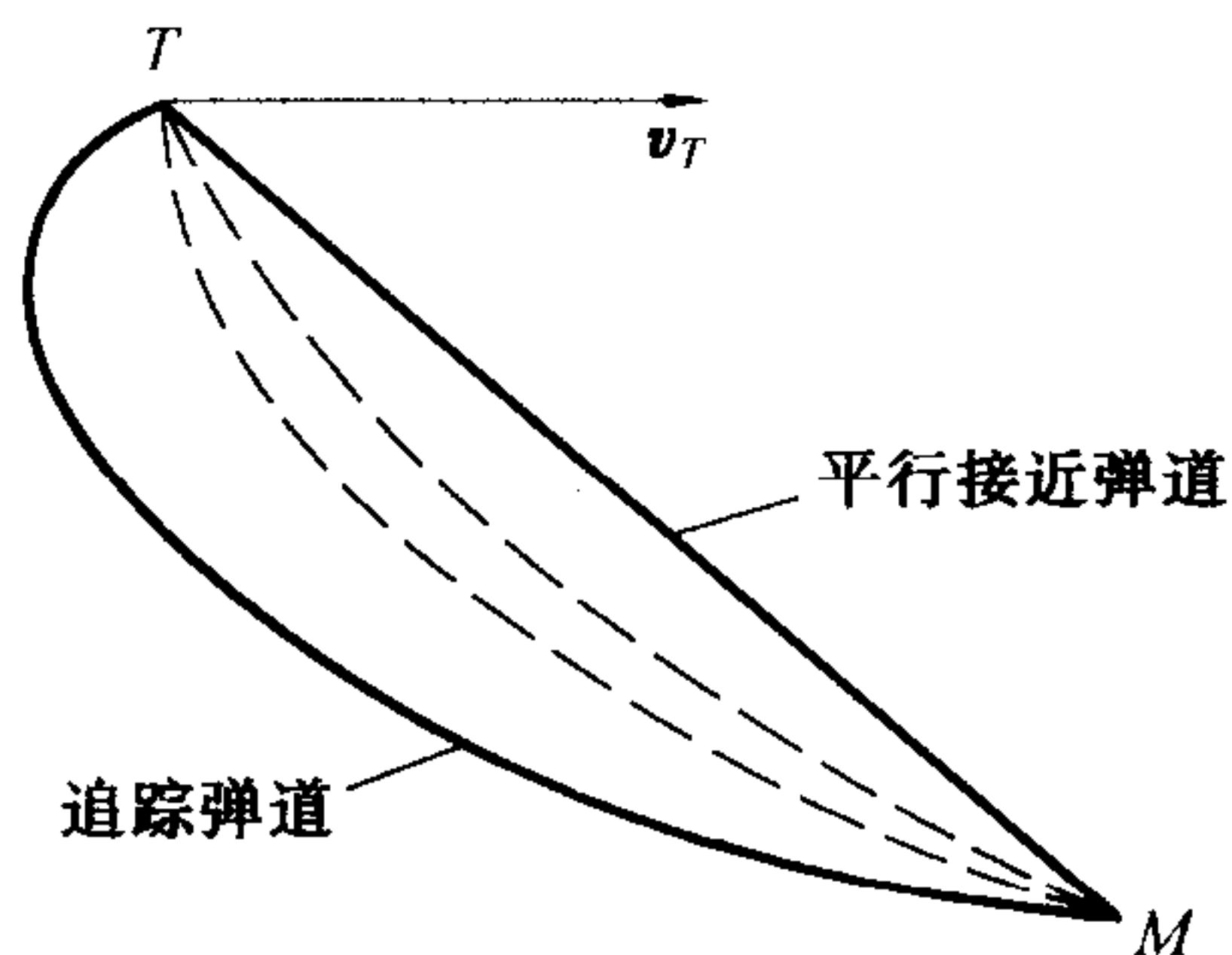


图 5.16 几类相对弹道的比较



何选取合适的比例系数  $K$  之值。在运动学分析中,其基本出发点在于,一方面保证直线弹道的稳定性;另一方面要求目标线的转动角速度的绝对值  $|\dot{q}|$  随时间变化而不断减小,从式(5.24)看出,这就等于保证弹道趋于平缓。

### 5.5.2 $K$ 值的确定

假定目标作等速直线运动,导弹速度不变,当选取基准坐标  $x$  轴平行目标飞行方向时,则  $\sigma_T = 0$ ,那么由方程组(5.2)及导引关系(5.24)可得比例导引时的导弹相对目标运动的方程组

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_T \cos q - v \cos \eta \\ r \frac{dq}{dt} = -v_T \sin q + v \sin \eta \\ q = \sigma + \eta \\ \frac{d\sigma}{dt} = K \frac{dq}{dt} \end{cases} \quad (5.26)$$

为了得到直线弹道,在导弹开始运动的瞬间,就必须使  $\dot{q} = 0$ ,即

$$v \sin \eta_0 - v_T \sin q_0 = 0 \quad (5.27)$$

而且在直线弹道上各点的  $q = q_0, \eta = \eta_0$ 。这是因为

$$\dot{\eta} = \dot{q} - \dot{\sigma} = (1 - K)\dot{q} \quad (5.28)$$

在直线弹道上  $\dot{q} = \dot{q}_0 = 0$ ,从而  $\dot{\eta} = \dot{\eta}_0 = 0$ 。式(5.27)表明,导弹相对速度在起始时就指向目标,乃是直线弹道的基本条件。一般根据  $q_0$  值来调整导弹发射装置,以确定满足式(5.27)的  $\eta_0$  值。大于  $90^\circ$  的  $\eta_0$  无实际意义,它意味着导弹背离目标飞行。但假若不能调整  $\eta_0$  时,那么就只可能有两个  $q_0$  值所相应的两条直线弹道了。

现假定导弹偏离直线弹道,出现了一个偏离量  $\Delta q$ ,那么前置角有相应的变化量,根据式(5.28)为

$$\Delta \eta = (1 - K)\Delta q$$

此时产生的目标线角速度为

$$\frac{dq}{dt} = \frac{v \sin[\eta_0 + (1 - K)\Delta q] - v_T \sin(q_0 + \Delta q)}{r} = \frac{v \sin \eta_0 \cos[(1 - K)\Delta q] + v \cos \eta_0 \sin[(1 - K)\Delta q] - v_T \sin q_0 \cos \Delta q - v_T \cos q_0 \sin \Delta q}{r}$$

由于  $\Delta q$  和  $\Delta \eta$  很小,且考虑到式(5.27)及  $q = q_0 + \Delta q$ ,则得

$$\frac{d(\Delta q)}{dt} = \frac{1}{r} [v(1 - K) \cos \eta_0 - v_T \cos q_0] \Delta q \quad (5.29)$$

显然,为使导弹在飞行中产生的偏离  $\Delta q$  逐渐消除,必须使  $d(\Delta q)/dt$  与  $\Delta q$  有不同的符号,即  $[d(\Delta q)/dt]/\Delta q < 0$  才行。所以可把直线弹道的稳定条件写为下式





$$v(1 - K)\cos\eta_0 - v_T\cos q_0 < 0 \quad (5.30)$$

则

$$K > 1 - \frac{v_T\cos q_0}{v\cos\eta_0}$$

据式(5.27) 即得

$$K > 1 - \frac{\cos q_0}{\sqrt{p^2 - \sin^2 q_0}} \quad (5.31)$$

不同速度比  $p$  的情况下,  $K_{\min} = 1 - (p^2 - \sin^2 q_0)^{-1/2}\cos q_0$  与  $q_0$  的关系曲线如图 5.17 所示。由图中曲线可见, 对后半球攻击 ( $|q_0| < 90^\circ$ ), 不管  $p$  为多少, 只要比例系数  $K > 1$ , 就保证得到稳定的直线弹道。对前半球攻击 ( $90^\circ < |q_0| < 180^\circ$ ), 只要  $K \geq 2$  就能使不等式(5.31) 满足。总的说来, 不管导弹从那里攻击, 也不管速度比  $p$  为多大, 只要选择比例系数  $K \geq 2$ , 就能得到稳定的直线弹道。

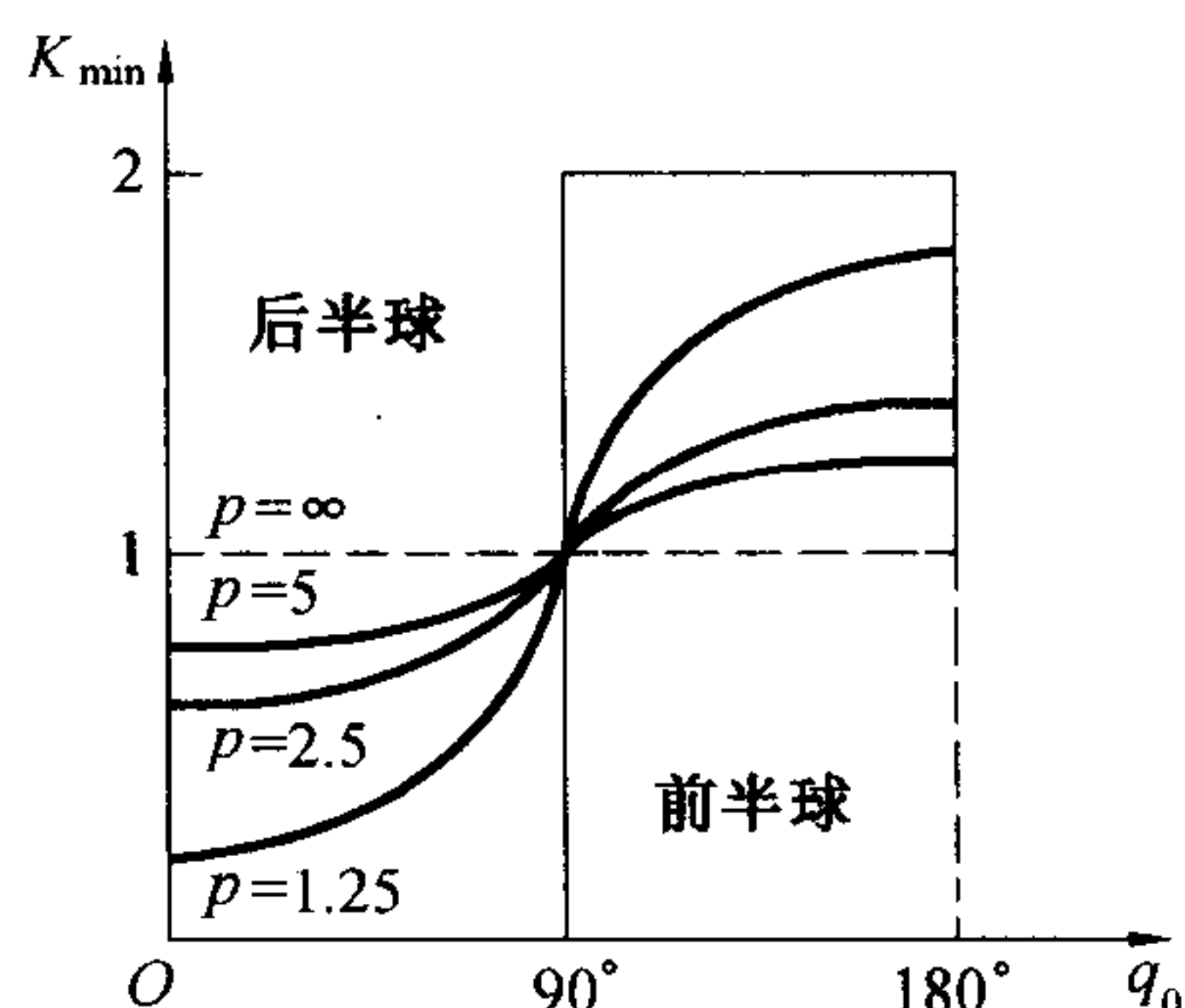


图 5.17  $K_{\min} - q_0$  曲线

应该指出, 当起始发射时不满足式(5.27) 的条件, 导弹弹道尽管不是直线弹道, 但在整个飞行过程中  $q$  的变化是比较小的, 而且对同一发射方向(相同的  $q_0$  值) 而不论  $r_0$  多大, 导弹击中目标时的  $q_f$  都是同一数值。可以说明如下。

在击中目标时,  $r_f = 0$ , 并假定  $\dot{q}_f$  为有限值, 则由式(5.26) 的第二式

$$(\dot{r}\dot{q})_f = v\sin\eta_f - v_T\sin q_f = 0$$

由式(5.28) 积分得

$$\eta_f - \eta_0 = (1 - K)(q_f - q_0) \quad (5.32)$$

则

$$v\sin[\eta_0 + (1 - K)(q_f - q_0)] - v_T\sin q_f = 0$$

得

$$q_0 - q_f = \frac{1}{K - 1} \left[ \arcsin\left(\frac{\sin q_f}{p}\right) - \eta_0 \right] \quad (5.33)$$

从式(5.33) 看出,  $q_f$  的确与  $r_0$  无关。若能使  $\eta_0$  满足式(5.27) 这个直线弹道条件, 必有  $q_0 - q_f = 0$ 。假定  $\eta_0$  不满足式(5.27), 而考虑  $\eta_0 = 0$  的情况, 式(5.33) 则变为

$$q_0 - q_f = \frac{1}{K - 1} \arcsin\left(\frac{\sin q_f}{p}\right) \quad (5.34)$$

式(5.34) 表明  $(q_0 - q_f)$  的绝对值是不大的。比如  $K$  值常取到 3 ~ 5 左右, 若取  $K = 5, p = 2$  时, 则

$$|q_0 - q_f| \leq \frac{1}{K - 1} \arcsin\left(\frac{1}{p}\right) = 7.5^\circ$$



此种情况如图 5.18 所示。

在一般情况下,  $\eta_0$  介于  $0^\circ$  与  $\eta_0^*$  之间 [这个  $\eta_0^*$  即是满足式(5.27)的  $\eta_0$ ], 那么其全弹道上的  $|q_0 - q_f|$  之值还会比式(5.34)的  $|q_0 - q_f|$  要小。显然,  $\eta_0$  与  $\eta_0^*$  越接近, 则  $|q_0 - q_f|$  越小。根据比例导引关系式便可知道, 只要  $K$  值不是很大, 那么导弹的速度方向变化就不会大, 弹道就较平直。

下面再讨论选取  $K$  值的另一个要求, 即要求  $|\dot{q}|$  随时间变化不断减小的问题。如果能够达到这个要求, 那就是说, 要求  $\dot{q}$

的变化率  $\ddot{q}$  的正负号与  $\dot{q}$  相反。根据式(5.26)的第二式两边求导, 得

$$\dot{r}\dot{q} + r\ddot{q} = v\dot{\eta}\cos\eta - v_T\dot{q}\cos q$$

而  $\dot{\eta} = (1 - K)\dot{q}$ , 代入上式, 再考虑式(5.26)的第一式, 经整理后有

$$\ddot{q} = -\frac{1}{r}(Kv\cos\eta + 2\dot{r})\dot{q} \quad (5.35)$$

显然, 使  $\ddot{q}$  与  $\dot{q}$  具有相反符号的充要条件是

$$Kv\cos\eta + 2\dot{r} > 0$$

即

$$K > \frac{2|\dot{r}|}{v\cos\eta} \quad (5.36)$$

在式(5.36)的条件下,  $|\dot{q}|$  将随时间变化而不断减小。由于导弹法向加速度  $a_n = v\dot{\sigma} = vK\dot{q}$ , 可以看出,  $|a_n|$  也将是不断减小的。这样的弹道可称为收敛弹道。对收敛弹道来说,  $|\dot{q}|$  或  $|a_n|$  的最大值将是在起始发射点, 因此应该尽量使  $\eta_0$  接近  $\eta_0^*$ , 以减小  $|\dot{q}_0|$  和  $|\dot{\sigma}_0|$  的数值。

图 5.19 表示出不同  $K$  值时收敛弹道  $\dot{q}$  和  $\dot{\sigma}$  的变化规律。

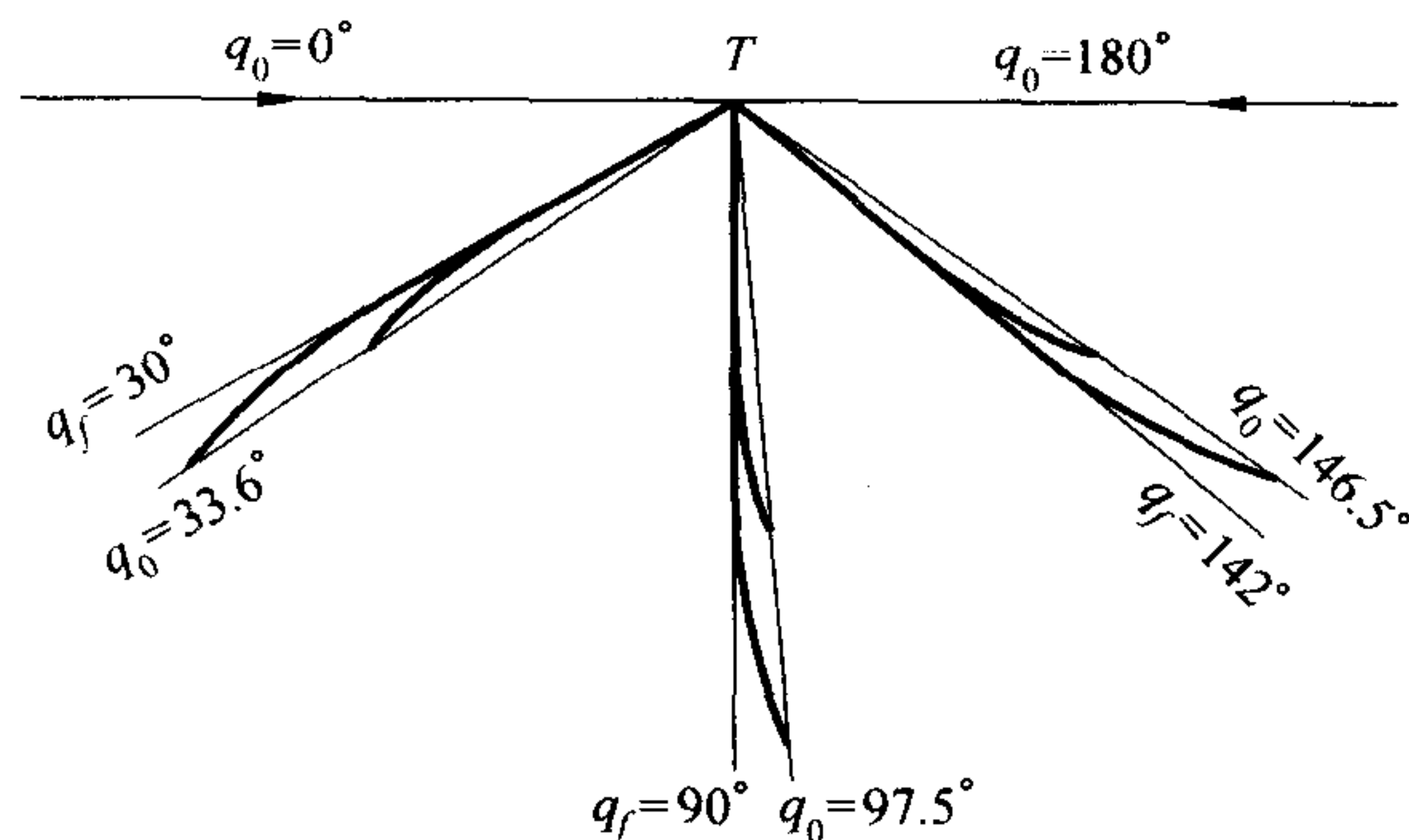


图 5.18  $\eta_0 = 0$  时的比例导引弹道 ( $K = 5, p = 2$ )

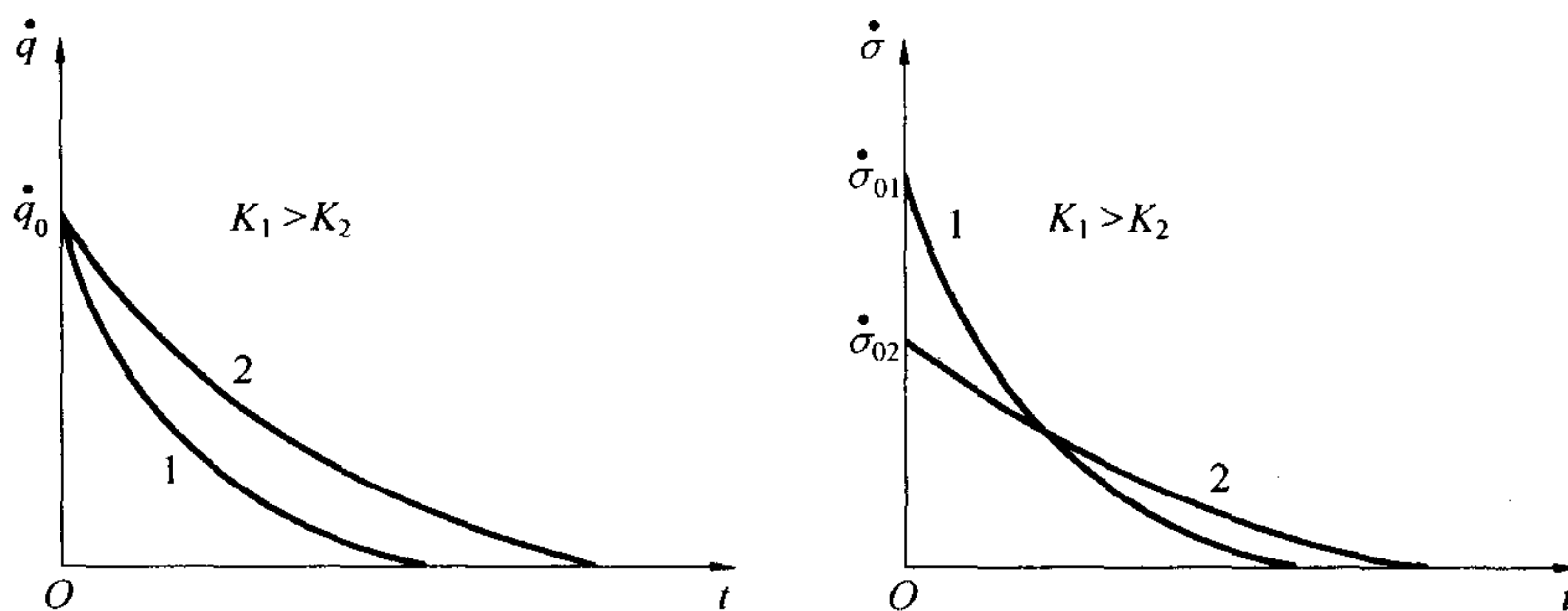


图 5.19 不同  $K$  值时收敛弹道  $\dot{q}$  和  $\dot{\sigma}$  的变化





图中 $K_1$ 和 $K_2$ 都满足式(5.36),弹道1和弹道2的其他条件相同,由于 $K_1$ 较大,导弹在初始段转弯较快。可见比例系数 $K$ 值不能过大。此外, $K$ 太大时, $\dot{q}$ 的微小变化,将引起 $\dot{\sigma}$ 的很大变化。这不仅对限制最大法向加速度的要求是不允许的,而且从保证制导系统能稳定地工作而言,也是不允许的。 $|\dot{r}|$ 是相对接近速度,导弹从不同方向发射,其 $|\dot{r}|$ 值是不同的。尾追时, $|\dot{r}| = v - v_T$ ;迎击时, $|\dot{r}| = v + v_T$ 。因而从不同方向攻击目标时所需要的 $K$ 值是不同的。如考虑到全面兼顾,并注意到最严重的情况( $|\dot{r}| = v + v_T, \eta = 0$ ),则

$$K > \frac{2(v + v_T)}{v}$$

由于 $v_T < v$ ,若取 $K \geq 4$ ,一般来讲就可以满足从任何方向命中目标的要求。

最后指出,当目标作变速机动飞行,且导弹变速飞行时,对 $K$ 值所要求的条件仍为式(5.36)。欲证明这点,可将式(5.2)第二式求导并利用其余三式及式(5.28)得

$$r\ddot{q} = -(Kv\cos\eta + 2\dot{r})(\dot{q} - \dot{q}^*) \quad (5.37)$$

式中

$$\dot{q}^* = \frac{\dot{v}\sin\eta - \dot{v}_T\sin\eta_T + v_T\dot{\sigma}_T\cos\eta_T}{Kv\cos\eta + 2\dot{r}} \quad (5.38)$$

$\dot{q}^*$ 是时间的函数,当 $Kv\cos\eta + 2\dot{r} \neq 0$ 时是有限值。由式(5.37)知,若 $Kv\cos\eta + 2\dot{r} > 0$ ,当 $\dot{q} < \dot{q}^*$ 时, $\ddot{q} > 0$ , $\dot{q}$ 将增加;当 $\dot{q} > \dot{q}^*$ 时, $\ddot{q} < 0$ , $\dot{q}$ 将减小,故 $\dot{q}$ 总是趋近于 $\dot{q}^*$ 。反之,若 $Kv\cos\eta + 2\dot{r} < 0$ ,则 $\dot{q}$ 总是有离开 $\dot{q}^*$ 之趋势。由此可见,满足弹道收敛性的条件仍然是式(5.36),不过视其右边诸参数值是变化的,在选择 $K$ 时,应通观其变化过程的最严重情况。

关于合适比例系数 $K$ 的选取问题,还可以从导弹击中目标的可靠性程度进行分析,这个问题将在弹道最优化理论中介绍。

### 5.5.3 比例导引法的其他形式

根据上面分析,正确设计导弹的 $\dot{q}$ 总是向 $\dot{q}^*$ 趋近。在接近目标时,根据式(5.38),有

$$\dot{q}_f = \left. \frac{\dot{v}\sin\eta - \dot{v}_T\sin\eta_T + v_T\dot{\sigma}_T\cos\eta_T}{Kv\cos\eta + 2\dot{r}} \right|_{t=t_f} \quad (5.39)$$

则相应的法向加速度为

$$a_{nf} = v\dot{\sigma}_f = vK\dot{q}_f = \left. \frac{\dot{v}\sin\eta - \dot{v}_T\sin\eta_T + v_T\dot{\sigma}_T\cos\eta_T}{\cos\eta - 2|\dot{r}|/(Kv)} \right|_{t=t_f}$$

从该式分母看出,按 $\dot{\sigma} = K\dot{q}$ 规律导引,在命中目标时的法向加速度与导弹的速度有直接关系。若是在弹道被动段击中目标,由于此时速度下降甚多,其法向加速度将会很大。为消除导弹速度对命中点法向加速度的影响,可采用如下比例导引关系

$$a_n = K_1\dot{q} \quad (5.40)$$

仿照式(5.39)的推导方法,并考虑到 $\dot{\sigma} = a_n/v = K_1\dot{q}/v$ ,相应得



$$a_{nf} = \frac{\dot{v}\sin\eta - \dot{v}_T\sin\eta_T + v_T\dot{\sigma}_T\cos\eta_T}{\cos\eta - 2|\dot{r}|/K_1} \Big|_{t=t_f} \quad (5.41)$$

可见按  $a_n = K_1\dot{q}$  的规律导引时的  $a_{nf}$  与  $v$  没有直接关系, 但还受到相对速度  $|\dot{r}|$  的影响。而  $|\dot{r}|$  对不同方向相差很大, 为了不致使  $a_{nf}$  随攻击方向而相差太大, 以利于实现全向攻击, 于是试图采取下列比例导引关系

$$a_n = K_2 |\dot{r}| \dot{q} \quad (5.42)$$

或

$$a_n = -K_2 \dot{r} \ddot{q} \quad (5.43)$$

仿照前述方法, 可得

$$a_{nf} = \frac{\dot{v}\sin\eta - \dot{v}_T\sin\eta_T + v_T\dot{\sigma}_T\cos\eta_T}{\cos\eta - 2/K_2} \quad (5.44)$$

可见此种导引方法之  $a_{nf}$  与  $|\dot{r}|$  无关, 有利于全向攻击。

总起来说, 比例导引法的优点是速度不受限制, 且可以得到较为平直的弹道。由于初始条件对导弹弹道有重要影响, 因而对初始发射条件提出了较严格的要求, 如能使起始前置角  $\eta_0$  接近  $\eta_0^* = \arcsin[(1/p)\sin q_0]$ , 则  $\dot{q}_0$  及  $\dot{q}$ 、 $\dot{\sigma}$  均较小。比例系数  $K$  值应保证满足  $K > 2|\dot{r}|/(v\cos\eta)$  这个条件, 但不能过大。比例导引特性受到  $\dot{v}$ 、 $\dot{v}_T$  及  $\dot{\sigma}_T$  的影响, 就命中时的法向加速度来说, 它们对几种比例导引关系的影响都是一样的。只是按式(5.42)的导引关系利于实施全向攻击。



## 第六章 遥控弹道

### 6.1 概 述

遥控类型的导引方法也是对付活动目标的方法,尤其对地空导弹和反坦克导弹更为广泛应用。其中主要有三点法和半前置量法。所谓三点法,就是导弹在攻击目标过程中,要使导弹始终位于目标和制导站的连线上。由制导站看目标,目标的影像正好被导弹的影像盖住。也就是说,制导站和导弹的连线(叫跟踪线)以及制导站和目标的连线(叫瞄准线)是重合在一起的,所以三点法又有目标覆盖法和重合法之称。在地空导弹设计中,有的赋予导弹(朝目标飞去的方向)一个“提前量”,让跟踪线超前瞄准线一个角度,称其为位置前置量。为了获得较为平直的弹道,便于实施全向攻击,并使导弹法向加速度不致受到目标机动的明显影响,必须选取比较合适的前置量,其中半前置量法就是一种较好的导引关系。而对反坦克导弹来说,目前大都采用三点法这种方式。

导弹在攻击空中目标时,其攻击平面一般为倾斜平面;在攻击坦克时,则认为是水平面。在三点法导引弹道运动学分析中。它们的本质是一样的。因此只要分析其中之一就行了。首先要弄清楚反坦克导弹在理想情况下的运动规律。在研究中,可以把控制站、导弹和目标都看作一个几何意义上的“点”,并假定控制站是静止的;目标做等速直线运动,导弹等速地飞行在一个水平面上,而方向是可控制的。这些假定虽不完全符合实际情况,但有助于从本质上弄清问题。

无论地空导弹或是反坦克导弹,其制导系统都要担负两方面任务。其一,测量导弹的实际弹道相对于理想弹道之间的偏差,并针对这个偏差产生适当的操纵指令。这一功能就是通常所说的“导引”。其二,按照操纵指令产生一定的控制力,以纠正导弹的实际弹道,使它尽量符合于理想弹道,这就是所谓“控制”。这两方面是密切联系在一起的,统称“制导”。相应的机构称为“制导系统”,或称“控制系统”。

这里介绍一下反坦克导弹的制导系统的工作过程。如图 6.1 所示,射手在阵地上,借助光学器材来瞄准运动中的坦克。从瞄准点(射手的眼睛)  $O$  到坦克正面中心  $T$  的连线  $OT$ ,就是瞄准线。瞄准点到导弹曳光管  $M$  的连线  $OM$  就是跟踪线。只要导弹不是精确地位于瞄准线上,那么瞄准线和跟踪线之间便形成一个夹角,称之为“误差角” $\Delta\epsilon$ 。由控制站来测量这个误差角  $\Delta\epsilon$ (人工地或自动地),根据它的大小和方位来形成适当的指令,然后把指令传输给导弹上的控制系统,产生一定的控制力,以改变导弹的运动方向,准确而迅速地消除这个误差角,使导弹



实际弹道逼近于三点法的理想弹道。

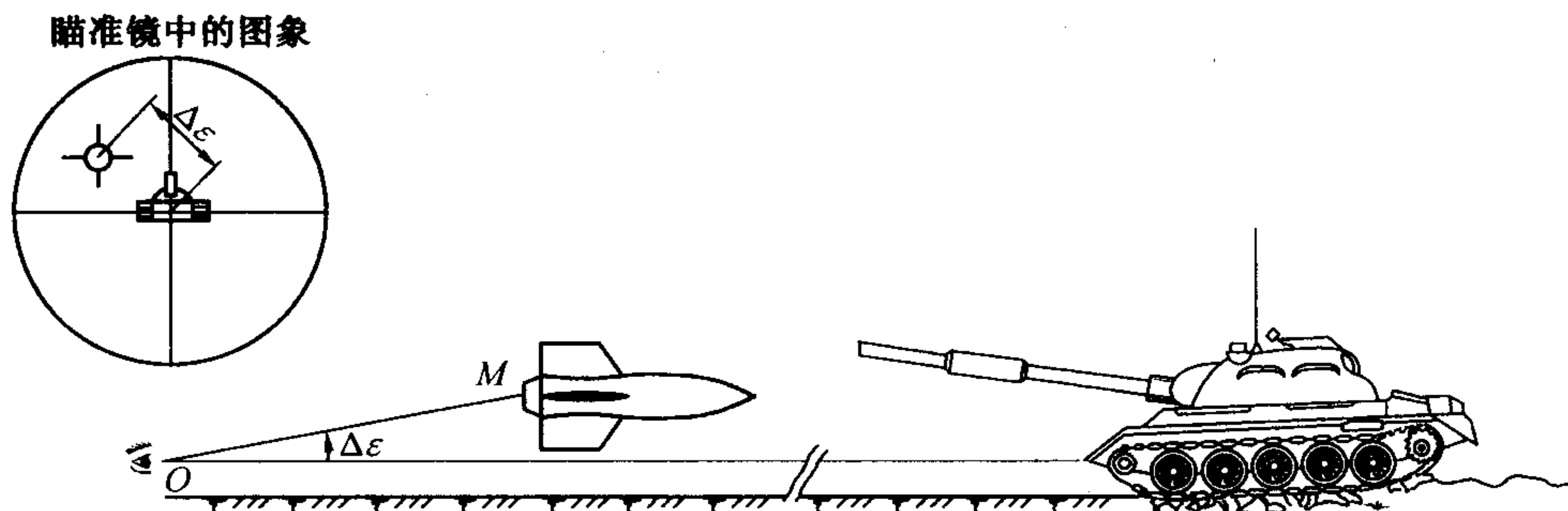


图 6.1 发射过程中的反坦克导弹

现有的各种型号反坦克导弹,就其运动误差的测量方式以及形成并传输操作指令的方式来看,是经历了几个发展阶段的。早期的反坦克导弹,现称之为“第一代导弹”,它的运动误差,是由射手借助望远镜观察导弹偏离瞄准线的程度来测量的,即估计  $\Delta\epsilon$  的大小和方位。射手根据对  $\Delta\epsilon$  的估计,适当地扳动控制手柄来操纵指令。手柄的偏斜程度决定于  $\Delta\epsilon$  的大小,手柄的偏斜方向决定于  $\Delta\epsilon$  的方位。手柄下面联结着电位器的滑臂,从而输出一个电信号,经过控制盒而转化成为操纵指令,再通过导线把操纵指令传输到导弹上去。归结起来就是:

“目力瞄准(坦克),目力跟踪(导弹),人工操纵(手柄),有线传输(指令)”。

第一代导弹的导引方案之优点是:简单,灵活,成本低,研制周期短;其缺点是:射手负担重,操作极为紧张,而且须经过严格训练。为适应射击反应能力,导弹飞行速度只能限制在 100 m/s 左右的低速,然而射弹命中率是不高的(约 70% 以下)。

针对以上严重缺点,采取了一些改进措施。一方面用红外线测角器来自动地跟踪导弹曳光管,以代替目力跟踪;另一方面直接由红外线测角器根据测得的  $\Delta\epsilon$  大小和方位,输出一个电信号,由地面计算装置将此电信号自动地转化成操纵指令,以代替人工操纵。这就是所谓“第二代导弹”。它仍然保留了第一代导弹的目力瞄准(射手用瞄准镜把目标瞄准在十字线中心)和有线传输。归结起来就是:

“目力瞄准,红外自动跟踪,自动操纵,有线传输”。

同第一代导弹相比,它已经实现了两个环节的自动化,故称之为“半自动式”的制导。它克服了第一代导弹的缺点,减轻了射手负担,使命中率有所提高,并且导弹速度可提高到 200 ~ 300 m/s。然而,仍存在着以下一些问题:如射手仍须参与导弹整个导引过程;射手与导弹发射阵地在同一点上,容易暴露;红外线测角器的中心线与光学瞄准具的中心线难以严格平行,造成测角的系统误差,影响命中率(约为 80% ~ 90%);以及仍是导线传输指令,使导弹飞行速度不能太高,否则易于断线。

为了克服尚存缺点,目前人们已研制第三代反坦克导弹。其主要途径是采用激光驾束制





导,以代替导线传输。这样,导弹飞行速度可提高到  $500 \sim 600 \text{ m/s}$  以上;射速可以提高到每分钟发射 4 枚以上。

此种导引方案的步骤是,由射手发出一束激光来照射目标,从目标反射回来的光能又被导弹上的自动导引头所接收;自动导引头根据这个信息来判定导弹相对于目标的运动情况,执行机构便据此发出相应的操纵指令。然而,新增加的激光设备,将会明显地影响到武器的机动性能。

## 6.2 反坦克导弹的三点法导引弹道

### 6.2.1 作图法

在图 6.2 中,  $O$  为制导站,  $T$  为坦克, 坦克速度为  $v_T$  (常量), 导弹速度为  $v$  (常量), 作图步骤如下。首先选取适当的时间间隔  $\Delta t$ , 把各瞬时坦克的位置  $T_0, T_1, T_2, T_3, \dots$  标注出来, 然后作出  $O$  点的连线。根据三点法的要求, 导弹总要处于制导站与目标的连线上。在初始时刻, 导弹处于  $O$  点; 经  $\Delta t$  时间后, 导弹飞经的路程为  $v \cdot \Delta t$ , 于是在各瞬时的连线上, 依次借直尺和圆规截取长度为  $v \cdot \Delta t$ , 定出各对应时刻导弹的位置  $M_1, M_2, M_3, \dots$ 。最后用光滑曲线连接各点, 就得到三点法导引时的绝对弹道。(读者可借此方法, 画出目标作变速曲线运动、导弹作变速运动的弹道曲线)。

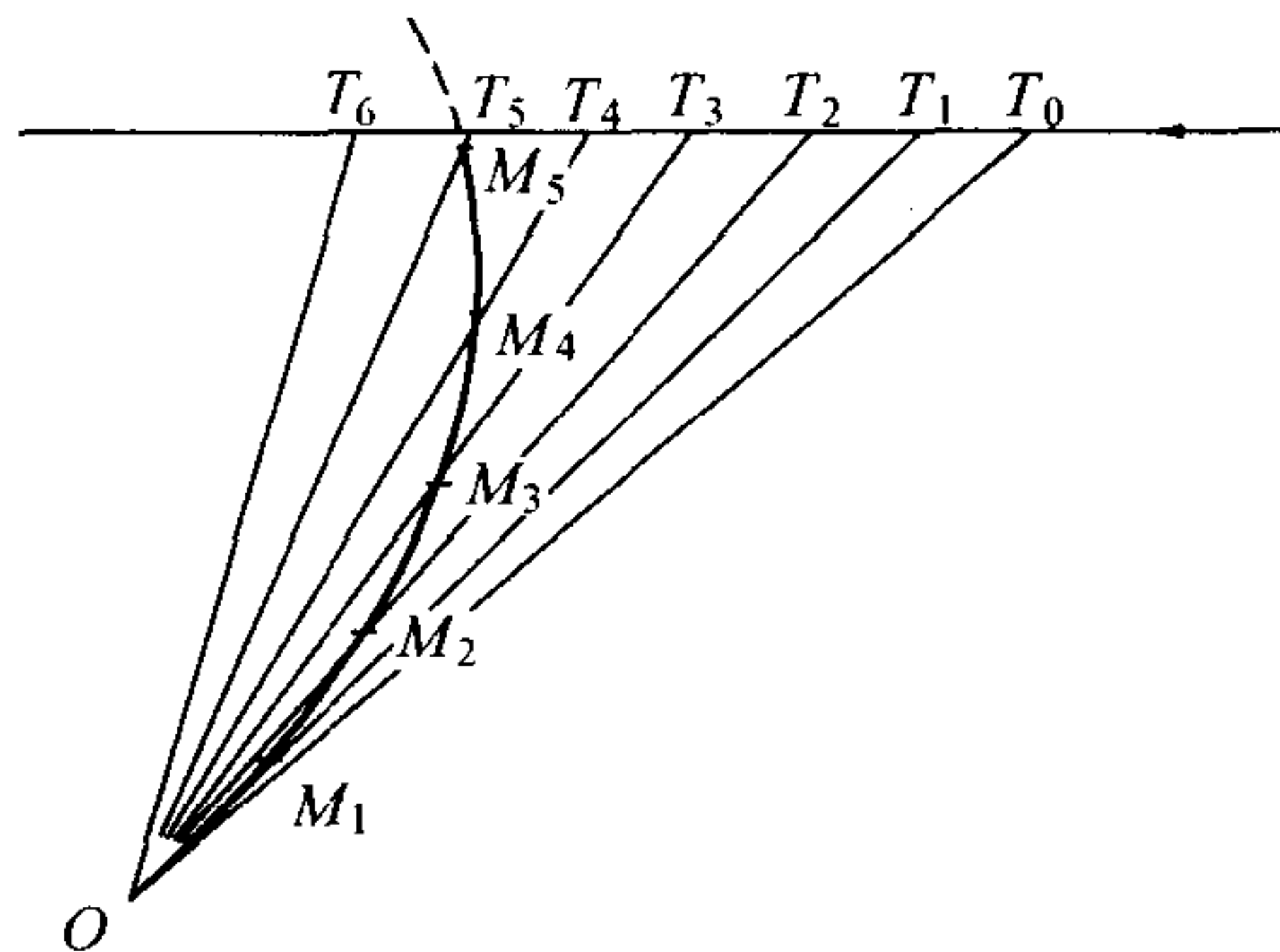


图 6.2 用作图法确定弹道

这种作图法可推广应用到其他任何导引弹道的绘制。作图法简单易行, 直观性强, 不用建立运动方程就可求出弹道曲线。但其缺点是精确性差, 在分析弹道特性时不如用解析法解决问题。

### 6.2.2 由微分方程求得弹道曲线的通用形式

设导弹和目标的速度为常值, 目标作直线运动。图 6.3 中, 坦克  $T$  是以速度  $v_T$  作等速直线运动的, 选基准方向  $Ox$  平行于  $v_T$ ;  $OT$  为瞄准线,  $OM$  为跟踪线, 它们与  $Ox$  轴的夹角分别为  $\epsilon$  和  $\epsilon_T$ , 按三点法导引关系, 有

$$\epsilon = \epsilon_T \quad (6.1)$$

图中  $H$  表示坦克  $T$  到  $Ox$  轴之垂直距离, 称之为“偏移参量”, 它和控制点  $O$  到坦克  $T$  的距离  $R_T$  之间, 存在一个简单关系

$$H = R_T \sin \epsilon \quad (6.2)$$



由图 6.3 易知导弹  $M$  在极坐标内的运动学方程为

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = v \cos \eta \\ \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{v \sin \eta}{R} \end{cases} \quad (6.3)$$

坦克  $T$  在极坐标系内的运动学方程为

$$\begin{cases} \frac{dR_T}{dt} = -v_T \cos \eta_T \\ \frac{d\epsilon_T}{dt} = \frac{v_T \sin \eta_T}{R_T} \end{cases} \quad (6.4)$$

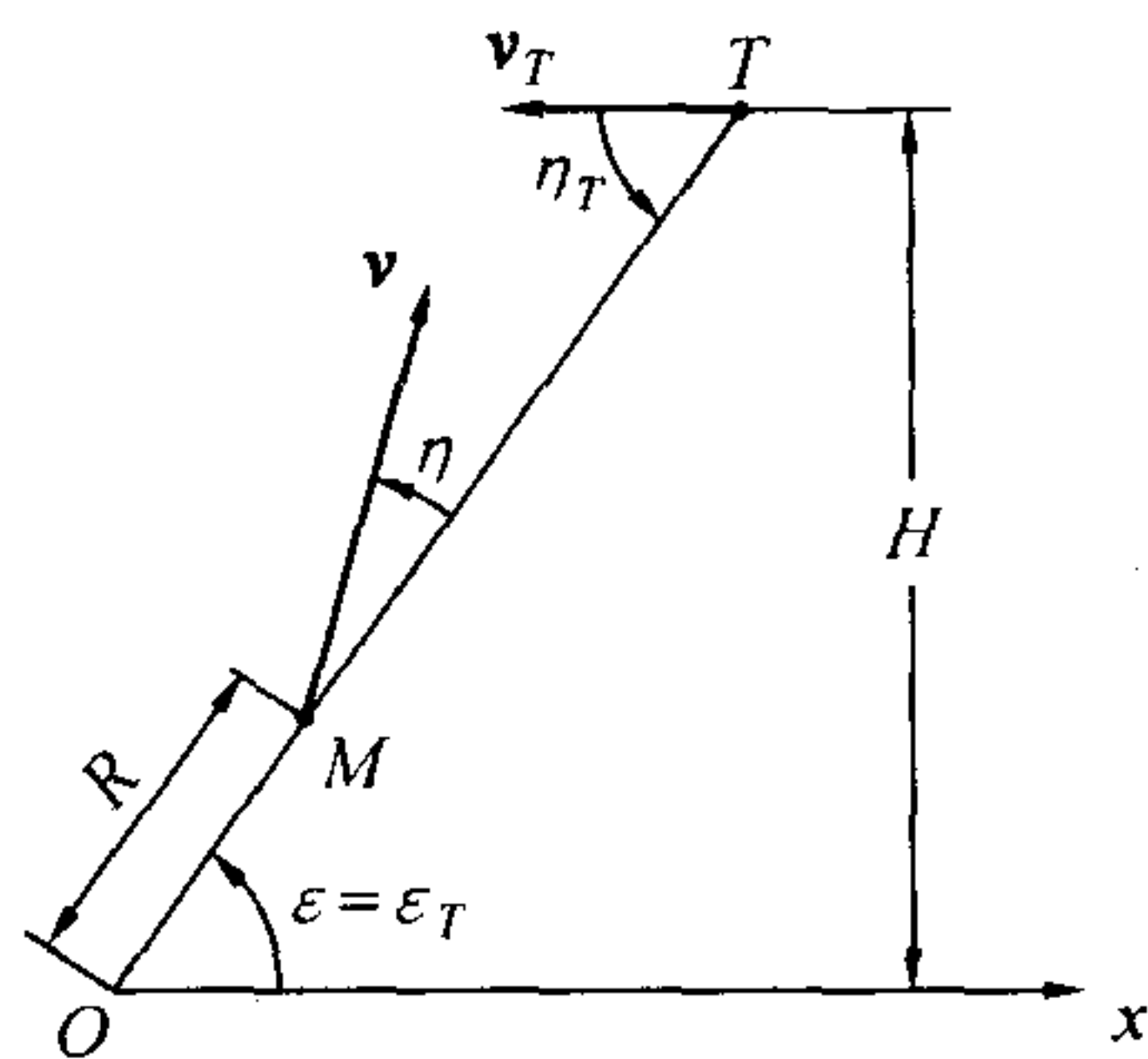


图 6.3 三点法

为求得导弹弹道方程  $R - \epsilon$  的关系,将式(6.3)两个方程相除得

$$\frac{dR}{d\epsilon} = R \cot \eta \quad (6.5)$$

此处  $\eta$  应表示成  $R$  和  $\epsilon$  的显式。由于导引关系式(6.1),可从式(6.3)和(6.4)的第二式知

$$\frac{v \sin \eta}{R} = \frac{v_T \sin \eta_T}{R_T} \quad (6.6)$$

于是

$$\sin \eta = \frac{R v_T}{R_T v} \sin \epsilon = \frac{R \sin \epsilon}{R_T p} = \frac{R \sin^2 \epsilon}{H p} \quad (6.7)$$

故

$$\cot^2 \eta = \frac{1}{\sin^2 \eta} - 1 = \left( \frac{H p}{R \sin^2 \epsilon} \right)^2 - 1 \quad (6.8)$$

对式(6.5)取平方,再将式(6.8)代入并移项,得

$$\left( \frac{dR}{d\epsilon} \right)^2 + R^2 = (p H \csc^2 \epsilon)^2 \quad (6.9)$$

这就是导弹以控制点  $O$  为原点,用极坐标表示的弹道微分方程,它是非线性方程,一般要用数值积分法(电子计算机)才能算出精确结果。除了须给出方程的初始条件外,还依赖参数  $pH$  值。由于实践中遇到的  $pH$  之值是可能很多的,如果针对每一具体的  $pH$  值都作弹道曲线,那就不胜其烦了。然而,考察一下方程(6.9),只要取变换

$$R = p H R^* \quad (6.10)$$

$R^*$  称为无量纲极径,便得一个在形式上不含任何参数(只有自变量和待求函数)的微分方程

$$\left( \frac{dR^*}{d\epsilon} \right)^2 + (R^*)^2 = \csc^4 \epsilon \quad (6.11)$$

只要按照方程(6.11)作出  $R^* - \epsilon$  曲线,那么依线性变换关系式(6.10)便得到实际的  $R - \epsilon$  曲线,这就使方程(6.9)的求解大为简化。方程(6.11)称为方程(6.9)的相似方程。在初始条件

$$\epsilon = \epsilon_0, \quad R^* = 0 \quad (6.12)$$





下,对不同的值  $\epsilon_0$  作出的  $R^* - \epsilon$  曲线,如图 6.4 所示。下面讨论如何利用  $R^* - \epsilon$  曲线族,来转换成实际的弹道曲线。

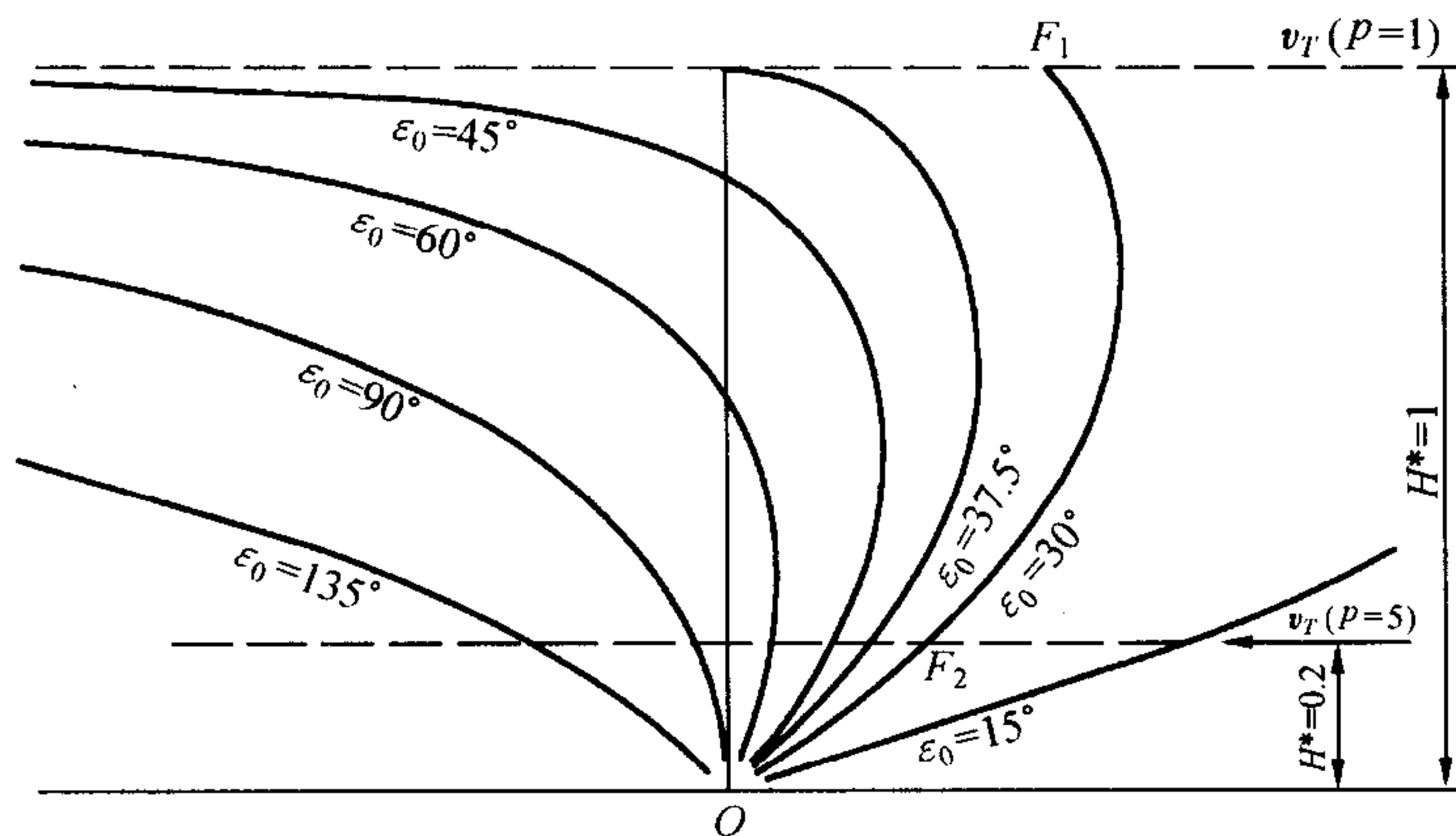


图 6.4  $R^* - \epsilon$  曲线族

从式(6.10)可看出,  $R^*$  是无因次的,它是比值  $R/(pH)$ 。如果取  $pH$  作为一个单位长度(数十米或数百米,无关紧要),那么  $R$  的数值便与  $R^*$  的数值相等了。就作图的实际情况而言,在绘制图 6.4 时,采用了  $pH$  这一比例尺,使长度变成了原有实际长度的  $1/(pH)$  倍。因此对偏移参量  $H$ ,在图 6.4 中的数值也就应该乘上  $1/(pH)$  倍,即  $H^* = H/(pH) = 1/p$ ;比如,当  $p = 1$  时,坦克在图 6.4 中的运动路线,就是  $H^* = 1$  的那条直线(该直线平行于横轴)。如果导弹的初始瞄准角  $\epsilon_0 = 30^\circ$ ,它沿  $\widehat{OF_1}$  曲线飞行,  $\widehat{OF_1}$  与  $H^* = 1$  的直线的交点  $F_1$  就是命中点。再比如  $p = 5$  时,则  $H^* = 1/5 = 0.2$ ,此时在图 6.4 上截取  $H^* = 0.2$  作平行于横轴的直线,即代表坦克的运动路线,对于  $\epsilon_0 = 30^\circ$  的弹道来说,其命中点将是  $F_2$ 。

总之,由于图 6.4 上的曲线以  $pH$  为单位,这族曲线便具有通用性。对任意速度比为  $p$  的情形,在图面上的目标沿着  $H^* = 1/p$  的直线运动,按三点法导引的导弹便沿着与初始瞄准角  $\epsilon_0$  相应的某一条曲线飞行,且两线相交处就是命中点。

一般反坦克导弹的  $p$  具有 10 的数量级,故实际用到的只是靠近原点的一部分。为使用方便,常将这一部分放大绘出,如图 6.5 所示。导弹飞行的时间,可从图 6.6 所示的关系中求出。

假定导弹速度为常数且目标为等速直线运动的情况下,当已知初始瞄准角  $\epsilon_0$  和命中时的瞄准角  $\epsilon_f$ (此值可从图 6.4 量得)时,则从发射到命中目标所需时间为

$$T = \frac{T_0 T_f}{v_T} = \frac{H}{v_T} (\cot \epsilon_0 - \cot \epsilon_f) \quad (6.13)$$

导弹所经过的全路程为

$$s = vT = pH(\cot \epsilon_0 - \cot \epsilon_f) \quad (6.14)$$

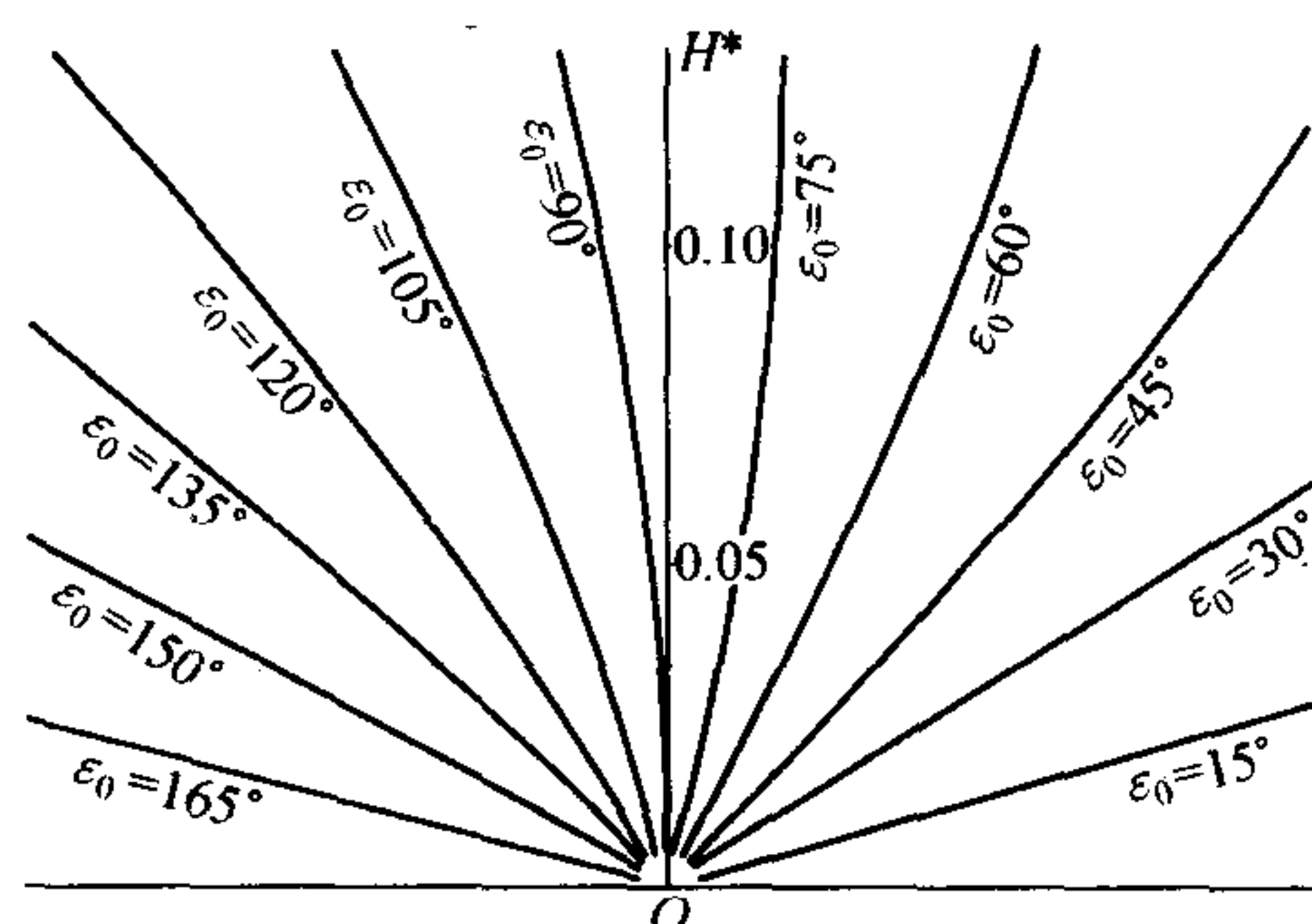
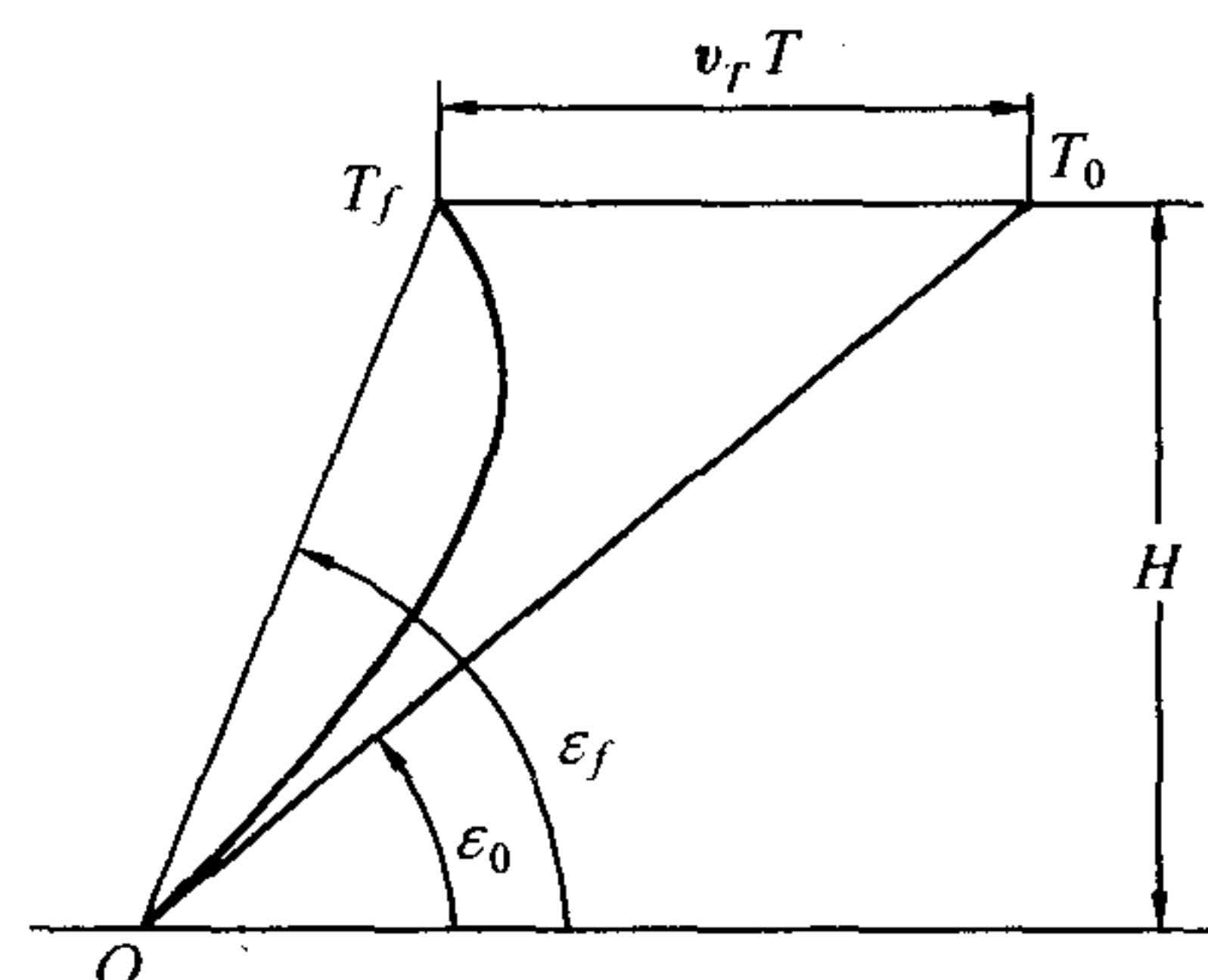
图 6.5  $R^* - \epsilon$  曲线族(局部放大)

图 6.6 导弹飞行时间的确定

### 6.3 三点法导引弹道的法向加速度

导弹的法向加速度  $a_n$  应是导弹速度  $v$  与其速度矢量  $v$  的转动角速度  $d\sigma/dt$  之积, 这个  $\sigma$  为  $\eta$  与  $\epsilon$  之和(见图 6.3), 即

$$a_n = v \frac{d\sigma}{dt} = v \left( \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\epsilon}{dt} \right) \quad (6.15)$$

下面须求出  $d\eta/dt$  及  $d\epsilon/dt$  之值。

由式(6.7)

$$\sin\eta = \frac{R}{Hp} \sin^2\epsilon$$

求导数有

$$\cos\eta \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{pH} \left( \frac{dR}{dt} \sin^2\epsilon + 2R \sin\epsilon \cos\epsilon \frac{d\epsilon}{dt} \right)$$

将式(6.3)中  $dR/dt$  和  $d\epsilon/dt$  代入后, 两边以  $\cos\eta$  除之, 再将式(6.8)的  $\cot\eta$  代入, 得

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{v_T}{H} \sin^2\epsilon \left( 1 + \frac{R \sin 2\epsilon}{\sqrt{(pH)^2 - R^2 \sin^4\epsilon}} \right) \quad (6.16)$$

而

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{v \sin\eta}{R} = \frac{v_T \sin^2\epsilon}{H} \quad (6.17)$$

将该二式代入式(6.15), 得

$$a_n = \frac{vv_T}{H} \sin^2\epsilon \left[ 2 + \frac{R^* \sin 2\epsilon}{\sqrt{1 - (R^* \sin^2\epsilon)^2}} \right] \quad (6.18)$$

式中,  $R^*$  是无量纲极径,  $R^* = R/(pH)$ , 见式(6.10)。





式(6.18)是在目标作等速直线运动并且导弹速度为常量的条件下,所得到的弹道各点上的法向加速度公式。它除了与  $R^*$  和  $\epsilon$  有关外,还依赖于参数  $vv_T/H$ 。为处理问题方便,不妨引入无量纲法向加速度  $a_n^*$ ,且

$$a_n^* = \frac{a_n}{\frac{vv_T}{H}} \quad (6.19)$$

于是由式(6.18)知

$$a_n^* = \sin^2 \epsilon \left[ 2 + \frac{R^* \sin 2\epsilon}{\sqrt{1 - (R^* \sin^2 \epsilon)^2}} \right] \quad (6.20)$$

可见  $a_n^*$  仅是  $R^*$  和  $\epsilon$  的函数,即在极坐标系  $(R^*, \epsilon)$  中,  $a_n^*$  仅是导弹位置的函数。这样便可以仿效第五章的方法,作出等无量纲法向加速度曲线族,即  $a_n^*$  的等值曲线族。当给定某一个  $a_n^*$  值时,由式(6.20)就可作出一条相应的  $R^* - \epsilon$  曲线,给定不同的  $a_n^*$  值,则有不同的  $R^* - \epsilon$  曲线与之相应。 $a_n^*$  的等值曲线族示于图 6.7 中。各条曲线上所标注的数值表示其  $a_n^*$  之值。图中虚线是各曲线中最低点的连线,它体现了  $a_n^*$  之值的变化趋势;沿着这条虚线越往上去,  $a_n^*$  之值越大。称这条虚线为主梯度线。图 6.4 和图 6.7 都以  $pH$  为单位,作图时采用同样的比例尺,如果欲知各条弹道上的法向加速度的变化过程,只要把图 6.7 与图 6.4 重叠起来,变成为一张图,在这张图上既有弹道曲线族,又有法向加速度曲线族,于是沿每条弹道的法向加速度的变化规律便一目了然。在导弹总体设计中,这是必不可少的。

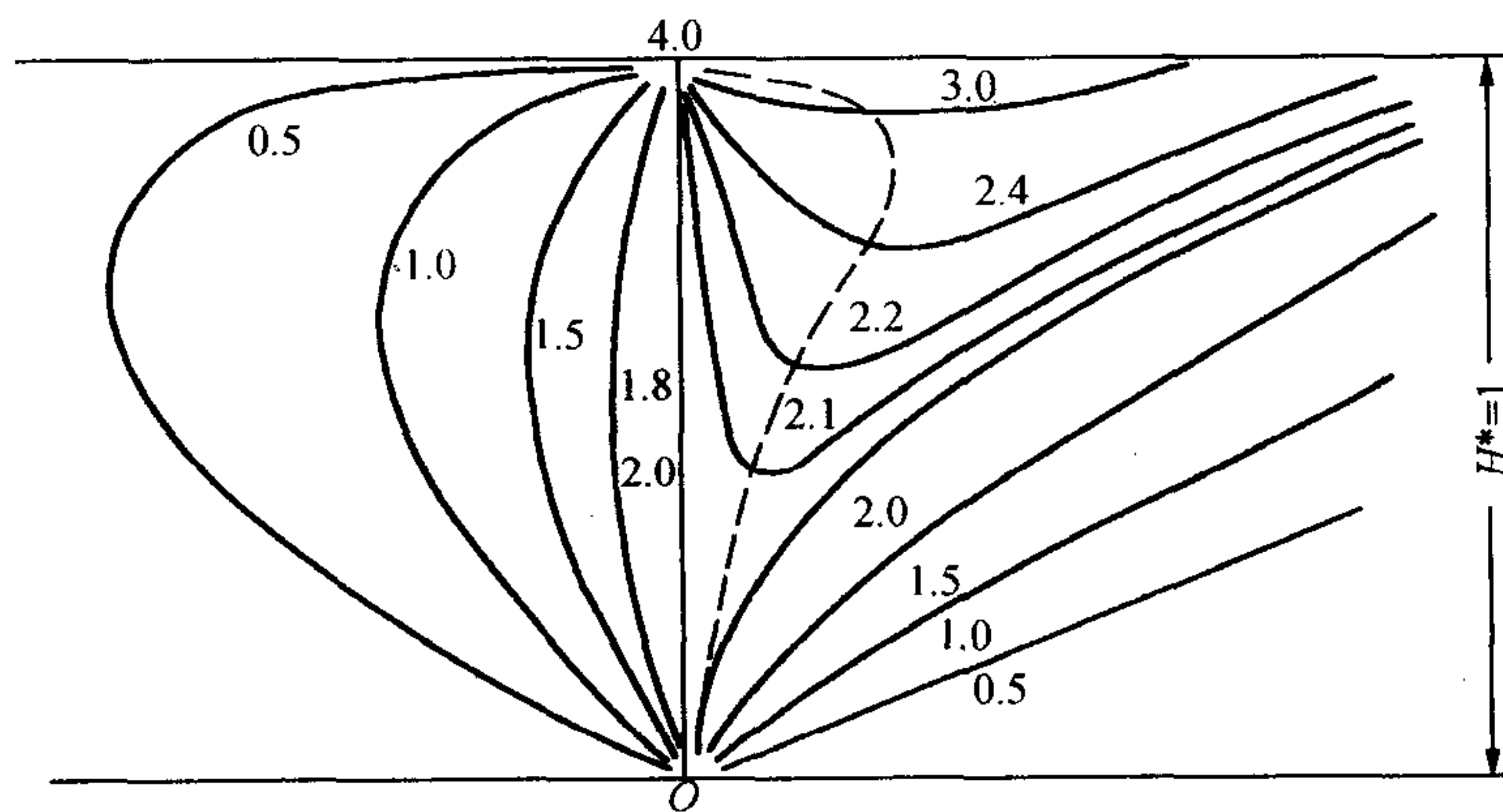


图 6.7  $a_n^*$  曲线族

从图 6.7 中发现,在  $p \geq 1$  的这个图面范围内,  $a_n^*$  之最大值为 4;并且在  $\epsilon = 90^\circ$  的垂直线与  $p = 1$  时的目标路线的交点处。若此点视为某一弹道曲线的命中点,则该条弹道所相应的初始发射角  $\epsilon_0$  大约等于  $37.5^\circ$ 。由此对照图 6.7 和图 6.4 可知,当导弹以初始发射角  $\epsilon_0 < 37.5^\circ$  发射时,其弹道上的法向加速度将愈来愈大,直到命中目标时达到最大值;换句话说,愈接近目标



时的弹道愈弯曲。再对照图 6.7 和图 6.4 可知,当  $\epsilon_0 > 90^\circ$  时,则导弹在飞行过程中的法向加速度是单调减小的。而当  $37.5^\circ < \epsilon_0 < 90^\circ$  时,弹道介于以上二者之间,最大法向加速度大致发生在它与主梯度线的交点处。

应该指出,对反坦克导弹来讲,顾及其速度比  $p$  总有 10 的数量级,且坦克沿着  $H^* = 1/p$  的直线运动,由图 6.7 可知,在如此小的范围内  $a_n^*$  的最大值  $a_{n \max}^* = 2$ ,其最大法向加速度

$$a_{n \max}^* = 2 \frac{vv_T}{H} \quad (6.21)$$

显然,反坦克导弹实际可提供的最大法向加速度必须大于这个数值,而且须有一定的“储备量”。

还得指出,以上关于反坦克导弹三点法导引的弹道特性,特别是图 6.4 和图 6.7 两组曲线族,对地空导弹都是完全适用的,只是其攻击平面异于水平面,且  $p$  值比反坦克导弹要小。

## 6.4 导弹速度变化和目標机动时对三点法导引特性的影响

在实战条件下,目标速度的大小和方向是变化的,导弹速度也是变化的,那么这对法向加速度的影响如何?

考虑到图 6.8 的情形,假定目标速度矢量逆时针方向转动了一个角度  $\sigma_T$ ,则目标的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{dR_T}{dt} = -v_T \cos(\epsilon_T - \sigma_T) \\ \frac{d\epsilon_T}{dt} = \frac{v_T \sin(\epsilon_T - \sigma_T)}{R_T} \end{cases} \quad (6.22)$$

而导弹的运动方程仍为(6.3)。为求得导弹法向加速度  $a_n = v \dot{\sigma}$ ,须将  $\eta$  用  $(\sigma - \epsilon)$  表示,根据导引关系(6.1),由方程(6.22)和(6.3)知

$$\frac{v \sin(\sigma - \epsilon)}{R} = \frac{v_T \sin(\epsilon_T - \sigma_T)}{R_T}$$

$$\text{即} \quad Rv_T \sin(\epsilon_T - \sigma_T) = R_T v \sin(\sigma - \epsilon) \quad (6.23)$$

上式两边对时间  $t$  求导数,可得

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{\epsilon} + \frac{\dot{R}v_T + R\dot{v}_T}{Rv_T} \dot{\epsilon}_T - \frac{R\dot{R}_T}{\dot{R}R_T} (\dot{\epsilon}_T - \dot{\sigma}_T) - \frac{(\dot{R}_T v + R_T \dot{v}) R}{\dot{R}R_T v} \dot{\epsilon} = \\ &= 2\dot{\epsilon}_T \left(1 - \frac{R\dot{R}_T}{\dot{R}R_T}\right) - \frac{R\dot{v}}{\dot{R}v} \dot{\epsilon} + \frac{R\dot{R}_T}{\dot{R}R_T} \dot{\sigma}_T + \frac{R\dot{v}_T}{\dot{R}v_T} \dot{\epsilon}_T \end{aligned}$$

再将方程(6.3)、(6.22)及导引关系(6.1)代入,即得

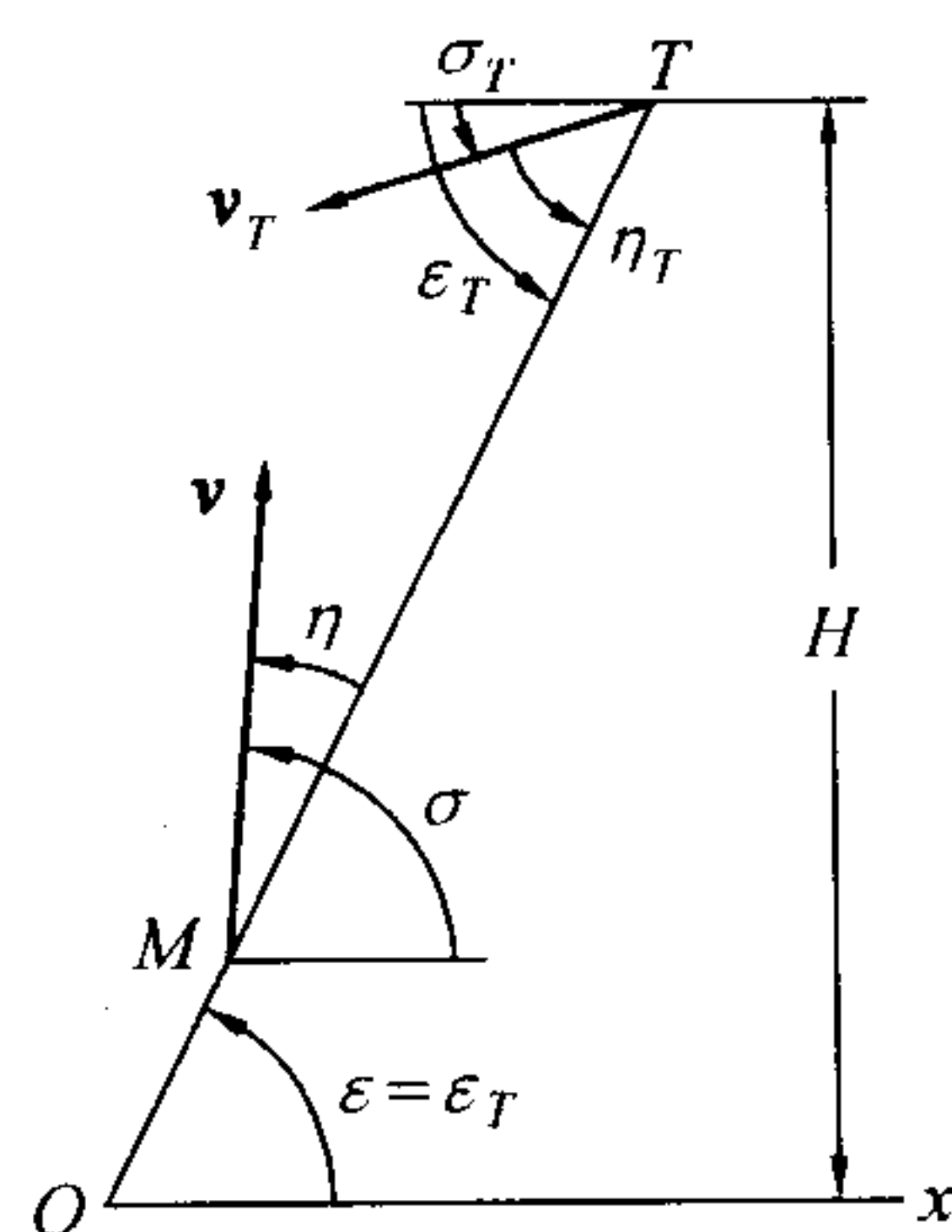


图 6.8 目标机动时三点法导引坐标系





$$a_n = v \dot{\sigma} = 2v \dot{\epsilon}_T \left( 1 - \frac{R\dot{R}_T}{\dot{R}R_T} \right) - \dot{v} \tan(\sigma - \epsilon_T) + \left[ \frac{R\dot{R}_T}{\dot{R}R_T} v \dot{\sigma}_T + \frac{v\dot{v}_T}{v_T} \tan(\sigma - \epsilon_T) \right] \quad (6.24)$$

由此可见,  $a_n$  由三项组成: 第一项与  $\dot{v}$ 、 $\dot{v}_T$  及  $\dot{\sigma}_T$  无关, 它是在导弹速度为常数且目标等速直线运动条件下的导弹法向加速度, 对此, 读者不妨利用关系式(6.2)、(6.3)、(6.4) 和(6.7) 代入, 便得到与式(6.18) 完全相同的结果。第二项与导弹加速度  $\dot{v}$  有关, 当  $\dot{v} > 0$  时使  $a_n$  减小, 故导弹采取主动段攻击, 可减小弹道曲率。第三项取决于目标的机动情况。就现代飞机而言, 其  $\dot{\sigma}_T$  可达  $(0.03 \sim 0.10) \text{ rad/s}$ , 是比较大的; 而当其装有加速器时,  $\dot{v}_T$  也是较大的, 因此, 目标机动时对  $a_n$  的影响是不可忽视的。

## 6.5 前置量法和半前置量法

根据前面对三点法弹道性能的分析, 可以看到用三点法导引地空导弹时, 由于地空导弹的  $p$  值不像反坦克导弹那么大(如将反坦克弹用于打低空飞机, 其  $p$  值可能出现接近 1 的情况), 因此它的弹道将会可能涉及到图 6.4 和图 6.7 的全部情况。尤其对高空飞机迎击时, 导弹愈接近目标, 其弹道愈弯曲, 就需要导弹提供较大的法向力。然而, 空气密度是随高度而减小的, 由空气动力所提供的法向力将相应地减小, 所提供的法向力将满足不了弹道弯曲所需要的数值, 导致有脱靶的危险。为了改善遥控导弹的导引特性, 考虑到能使弹道(尤其末段)更平直一些, 根据“常前置角”法可改善纯追踪法弹道性能的启示, 也给予遥控导弹一个提前量。在 6.1 中已说过, 这个提前量是指跟踪线超前瞄准线一个角度  $\epsilon_I$ , 需要讨论这个  $\epsilon_I$  如何确定的问题。

对远程控制的地空导弹, 一般采用雷达波束(也可用激光)制导。现取一雷达坐标系  $O-x_R y_R z_R$ , 原点  $O$  取制导站,  $ox_R$  轴指向目标  $T$ ,  $oy_R$  轴在铅垂平面内并垂直  $ox_R$  轴,  $oz_R$  轴与  $x_R$ 、 $y_R$  成右手直角坐标系, 如图 6.9 所示。 $ox_1$  为地面上的某一参考线。雷达坐标系在地面坐标系中的方位, 可由高低角  $\epsilon_T$  和方位角  $\beta_R$  完全确定。为了使讨论的问题不致过于复杂, 假定目标和导弹皆在通过  $O$  点的铅垂面内运动, 其运动关系如图 6.10 所示。图中  $\theta$  表示导弹速度矢量  $v$  与水平面夹角, 即弹道切线倾角。于是目标和导弹相对地面制导站的运动学方程组为

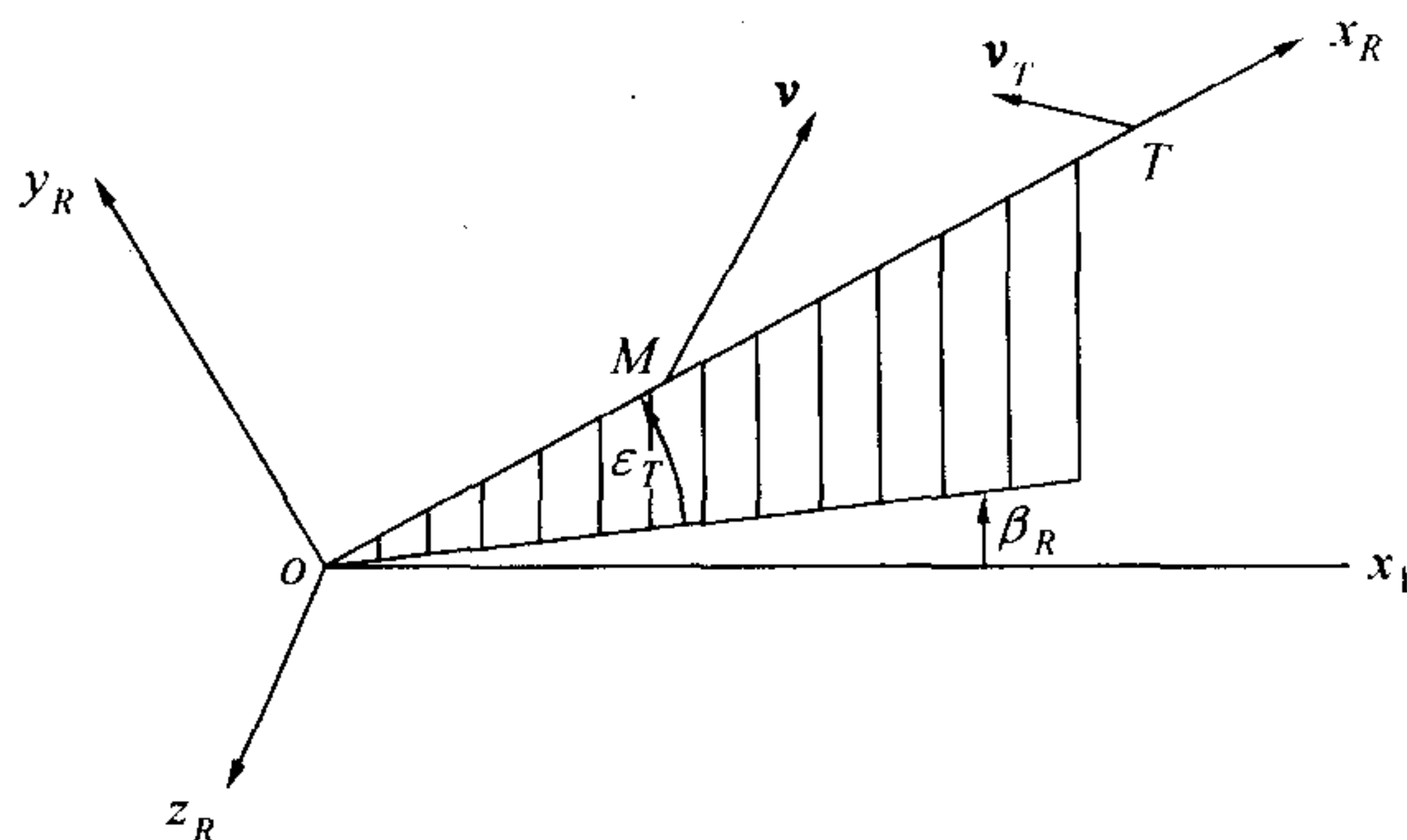


图 6.9 雷达坐标系



$$\begin{cases} \dot{R}_T = -v_T \cos \eta_T \\ R_T \dot{\epsilon}_T = v_T \sin \eta_T \\ \dot{R} = v \cos \eta \\ R \dot{\epsilon} = v \sin \eta \\ \epsilon = \epsilon_T + \epsilon_I \end{cases} \quad (6.25)$$

其中第五式表示导引关系。欲减小法向加速度,最理想的莫过于直线弹道了。然而,人们经过分析表明,要实现直线弹道是难以办到的。根据前面的分析,还是仅仅把着眼点放在弹道末段,使弹道末段比之三点法平直一些。假设  $\epsilon_I$  按下式变化

$$\epsilon_I = E(\epsilon, t) \Delta R \quad (6.26)$$

式中,  $\Delta R = R_T - R$ ;  $E(\epsilon, t)$  是与  $\epsilon$  和  $t$  有关的函数。显然,式(6.

26) 能保证导弹与目标相遇时的  $\epsilon_I = 0$ 。此外,为使弹道末段平直一些,至少要求存在下列条件

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \dot{\epsilon} = 0 \quad (6.27)$$

由于

$$\epsilon = \epsilon_T + E(\epsilon, t) \Delta R \quad (6.28)$$

两边对  $t$  求导数

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_T + \dot{E}(\epsilon, t) \Delta R + E(\epsilon, t) \Delta \dot{R}$$

根据式(6.27)得

$$\dot{\epsilon}_T + E(\epsilon, t) \Delta \dot{R} = 0$$

那么有

$$E(\epsilon, t) = - \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta \dot{R}} \quad (6.29)$$

则

$$\epsilon = \epsilon_T - \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta \dot{R}} \Delta R \quad (6.30)$$

这就是前置量法的导引关系式。根据这个导引关系,导弹在命中点的法向加速度仍受目标机动的影响。因为  $a_n = v \dot{\theta}$ ,故只要考察  $\theta$  受目标机动影响就行了。

从导弹运动方程  $R \dot{\epsilon} = v \sin(\theta - \epsilon)$ ,可求出  $\dot{\theta}$  来。事实上,有

$$\dot{R} \dot{\epsilon} + R \ddot{\epsilon} = \dot{v} \sin(\theta - \epsilon) + v(\dot{\theta} - \dot{\epsilon}) \cos(\theta - \epsilon)$$

将  $\sin(\theta - \epsilon) = R \dot{\epsilon} / v$  及  $v \cos(\theta - \epsilon) = \dot{R}$  代入,可得

$$\dot{\theta} = \left( 2 - \frac{\dot{v} R}{v \dot{R}} \right) \dot{\epsilon} + \frac{R}{\dot{R}} \ddot{\epsilon} \quad (6.31)$$

进一步分析表明,在弹道末段,根据式(6.31)算出的  $\dot{\theta}$  比用三点法导引时的要小。对命中点,根据式(6.27),有

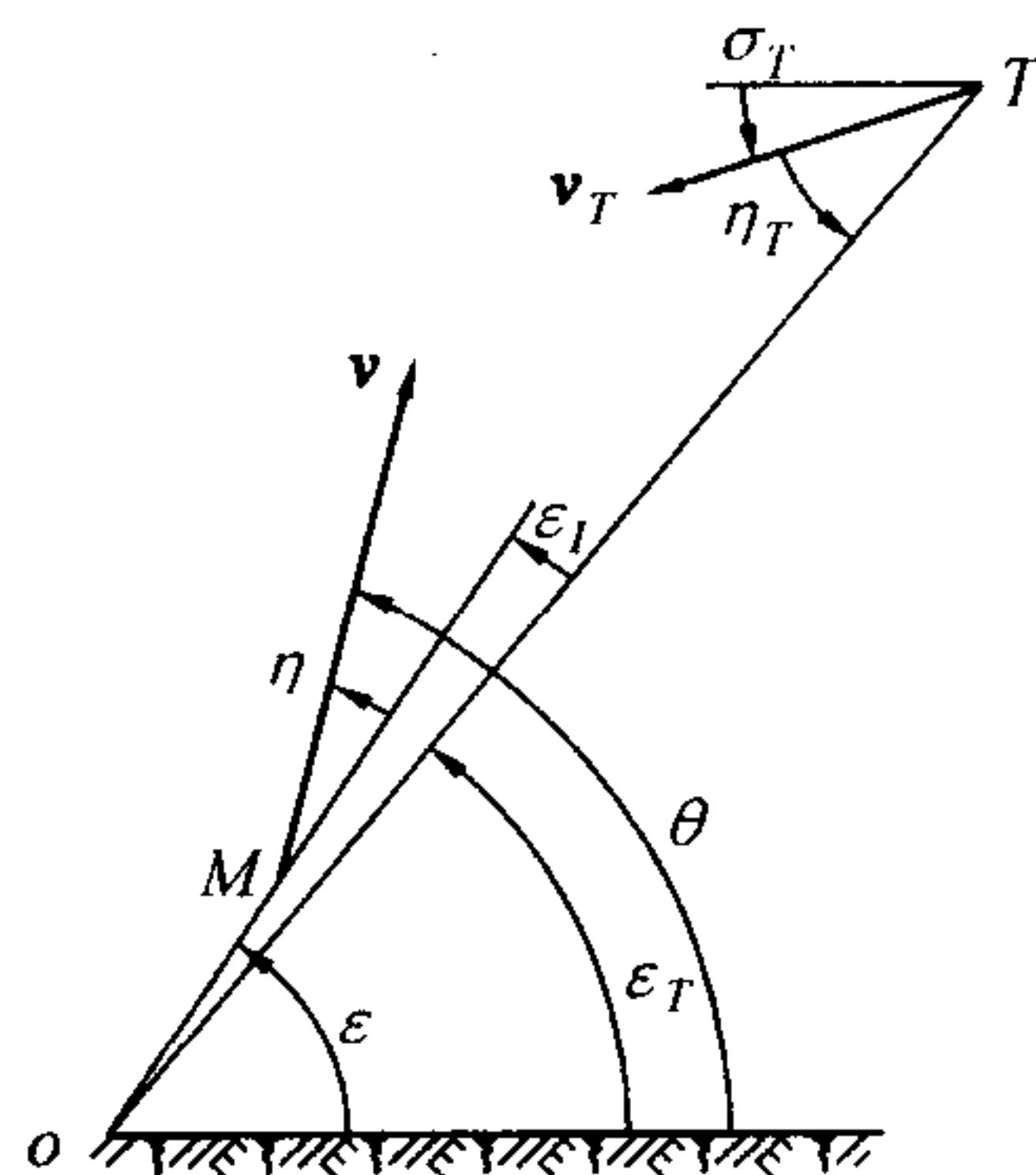


图 6.10 前置量法





$$\dot{\theta}_f = \left( \frac{R}{\dot{R}} \ddot{\epsilon} \right)_{t=t_f} \quad (6.32)$$

下面求命中点时的  $\ddot{\epsilon}$  之值。对式(6.30) 求两次导数可得

$$\ddot{\epsilon}(\Delta \dot{R})^2 + 2\dot{\epsilon} \cdot \Delta \dot{R} \cdot \Delta \ddot{R} = (\dot{\epsilon}_T \cdot \Delta \ddot{R} - \ddot{\epsilon}_T \cdot \Delta \dot{R})\Delta R + (\dot{\epsilon}_T \cdot \Delta \ddot{R} - \ddot{\epsilon}_T \cdot \Delta \dot{R})\Delta \dot{R}$$

依据命中点的条件  $\Delta R = 0$  及  $\dot{\epsilon} = 0$ , 则上式变为

$$\ddot{\epsilon}_f = \left( -\ddot{\epsilon}_T + \frac{\Delta \ddot{R}}{\Delta \dot{R}} \dot{\epsilon}_T \right)_{t=t_f} \quad (6.33)$$

下面进一步考察  $\ddot{\epsilon}_T$  与目标运动参数之间的关系。可利用方程组(6.25) 第一、二两式, 先对第二式求导数

$$\dot{R}_T \dot{\epsilon}_T + R_T \ddot{\epsilon}_T = \dot{v}_T \sin \eta_T + v_T \dot{\eta}_T \cos \eta_T$$

注意到  $\eta_T = \epsilon_T - \sigma_T$ , 再将  $\sin \eta_T$  和  $\cos \eta_T$  用第一、二两式代入, 即得

$$\ddot{\epsilon}_T = -2 \frac{\dot{R}_T}{R_T} \dot{\epsilon}_T + \frac{\dot{v}_T}{v_T} \dot{\epsilon}_T + \frac{\dot{R}_T}{R_T} \dot{\sigma}_T \quad (6.34)$$

将(6.34) 式代入式(6.33), 再将式(6.33) 代入式(6.32), 并注意命中点处  $R = R_T$ , 使得

$$\dot{\theta}_f = \left[ \left( 2 \frac{\dot{R}_T}{R_T} + \frac{R_T \cdot \Delta \ddot{R}}{\dot{R} \cdot \Delta \dot{R}} \right) \dot{\epsilon}_T - \left( \frac{\dot{v}_T}{\dot{R}} \sin \eta_T + \frac{\dot{R}_T}{\dot{R}} \dot{\sigma}_T \right) \right]_{t=t_f} \quad (6.35)$$

由此可见, 按前置量法导引时, 导弹命中点的法向加速度仍然受目标机动的影响, 其影响情况可与三点法比较一下。按三点法导引时, 根据式(6.24) 可知

$$\dot{\theta}_f = \left\{ 2 \left( 1 - \frac{\dot{R}_T}{\dot{R}} \right) \dot{\epsilon}_T - \frac{\dot{v}}{v} \tan(\theta - \epsilon_T) + \left[ \frac{\dot{R}_T}{\dot{R}} \dot{\sigma}_T + \frac{\dot{v}_T}{v_T} \tan(\theta - \epsilon_T) \right] \right\}_{t=t_f} \quad (6.36)$$

比较式(6.35) 与式(6.36) 可知, 虽然导弹在命中点的法向加速度都受到目标机动的影响, 但对同样的  $\dot{\sigma}_T$  和  $\dot{v}_T$  而言, 它们产生的效果则是相反的; 用三点法导引时若使法向加速度加大, 而前置量法则减小。如此两种相反的效果, 便促使人们考虑到一种介乎二者之间的导引关系。由于, 无论对三点法或前置量法, 都不外乎下列导引关系

$$\epsilon = \epsilon_T + \epsilon_I = \epsilon_T - C_\epsilon \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta \dot{R}} \Delta R \quad (6.37)$$

当  $C_\epsilon = 0$  时为三点法; 当  $C_\epsilon = 1$  时为前置量法。需要在 0 与 1 之间寻求一个合适的  $C_\epsilon$  值, 以使  $\dot{\theta}_f$  尽可能不受  $\dot{\sigma}_T$  和  $\dot{v}_T$  的影响。

从式(6.31) 可看出, 为求得  $\dot{\theta}_f$ , 须先把  $\dot{\epsilon}$  和  $\ddot{\epsilon}$  在命中点的表达式求出, 为此, 分别对式(6.37) 求一次和二次导数, 且注意到命中点处  $R = R_T$  (即  $\Delta R = 0$ ), 于是得

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_f = (1 - C_\epsilon) \dot{\epsilon}_{Tf} \\ \ddot{\epsilon}_f = \left[ (1 - 2C_\epsilon) \ddot{\epsilon}_T + C_\epsilon \frac{\Delta \ddot{R}}{\Delta \dot{R}} \dot{\epsilon}_T \right]_{t=t_f} \end{cases} \quad (6.38)$$



上式代入到式(6.31),得

$$\dot{\theta}_f = \left(2 - \frac{\dot{v}R}{v\dot{R}}\right)(1 - C_\epsilon)\dot{\epsilon}_T + \frac{R}{\dot{R}} \left[ (1 - 2C_\epsilon)\ddot{\epsilon}_T + C_\epsilon \frac{\Delta\ddot{R}}{\Delta\dot{R}} \dot{\epsilon}_T \right]_{t=t_f}$$

考察这个表达式的各项,发现  $\ddot{\epsilon}_T$  与目标机动参数  $\dot{\sigma}_T$  和  $\dot{v}_T$  的关系极大,这可从  $\ddot{\epsilon}_T$  的表达式(6.34)一目了然。因此必须使  $\ddot{\epsilon}_T$  所在项为零,即

$$1 - 2C_\epsilon = 0$$

那么

$$C_\epsilon = \frac{1}{2} \quad (6.39)$$

则

$$\epsilon = \epsilon_T - \frac{1}{2} \frac{\dot{\epsilon}_T}{\Delta\dot{R}} \Delta R \quad (6.40)$$

就是所寻求的导引关系。因为其前置量恰好是前置量法的一半,故称半前置量法。

半前置量法命中点的  $\dot{\theta}_f$  为

$$\dot{\theta}_f = \left(1 - \frac{R\dot{v}}{2\dot{R}v} + \frac{R \cdot \Delta\ddot{R}}{2\dot{R} \cdot \Delta\dot{R}}\right) \dot{\epsilon}_T \Big|_{t=t_f} \quad (6.41)$$

上式中仅  $\Delta\ddot{R}$  受目标机动的影响,但是  $\Delta\ddot{R}$  所在的这一项数值很小,故总的来看,由于选取了  $C_\epsilon = 1/2$ ,  $\dot{\theta}_f$  已基本上不受目标机动的影响了。因此,它是遥控地空导弹常用的一种导引方法。

采用前置量法和半前置量法导引时,可以同时用两部雷达:一道波束跟踪目标,另一道波束跟踪导弹。为了减小地面设备,一般尽量只用一部雷达,既跟踪目标,又控制导弹,在这种情况下,为使导弹不超出波束的扫描范围,就须要求前置量  $\epsilon_l$  不能大于波束扫描角的一半,否则就要失控,如图 6.11 所示。这是要注意的一个问题。

需要指出的是,尽管半前置量法是一种较好的导引方法,但是它的导引关系式(6.40)要求随时测量出目标和导弹相对于制导站的角坐标、距离及其导数,当目标进行强干扰时,制导站就无法测出这些数据,在这种情况下,就必须用三点法来导引导弹。

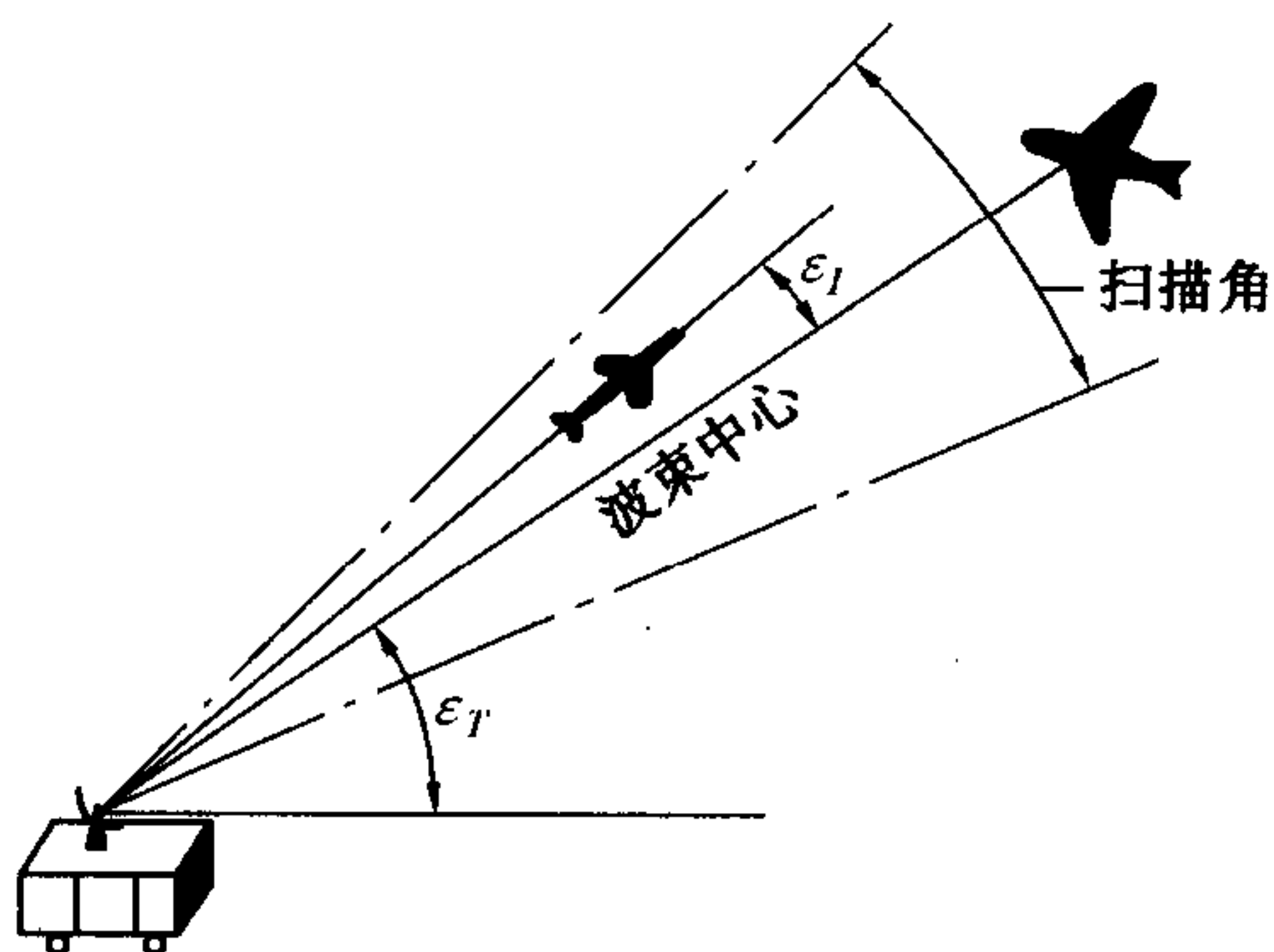


图 6.11 导弹的飞行范围



## 第七章 尾翼式火箭弹摆动理论

### 7.1 前言

在弹道计算时曾作了六条基本假设,在这些假设前提下的弹道叫理想弹道或标准弹道。假设中很重要的一条是攻角为零。攻角是弹体几何轴线与速度矢量  $v$  的夹角,实际上并不为零。在火箭飞行过程中,攻角不但存在,而且是不断变化的。由于攻角的存在而伴随着空气动力矩,便使弹轴围绕质心运动,从而推力方向也就不可能与速度  $v$  方向一致了,它将产生垂直于  $v$  方向的法向力,使火箭质心偏离理想弹道。之所以有攻角的出现,其影响因素是多方面的,主要原因有以下几个方面。

#### 1. 起始扰动

在火箭后定心部脱离发射架瞬间,火箭围绕着过其质心且垂直火箭轴线的轴作横向摆动,如以  $\varphi$  表示弹轴与理想弹道切线的夹角,则飞离发射架瞬间火箭弹轴的摆动角速度以  $\dot{\varphi}_0$  表示(脚注“0”表示飞离发射架瞬间的数值)。这个  $\dot{\varphi}_0$  是引起主动段内弹轴摆动的原因之一。称  $\dot{\varphi}_0$  为起始摆动角速度。此外,火箭后定心部离轨时的质心速度被称为离轨速度或初速,以  $v_0$  表示。弹轴的方位与此离轨瞬间的初速方向也不会一致,它们之间的夹角以  $\delta_0$  表示, $\delta_0$  叫起始攻角,如以滑轨(或叫定向器)方向为基准,则  $\delta_0$  之产生,或因弹轴偏离滑轨方向,或因  $v_0$  偏离滑轨方向一个偏角  $\psi_0$ 。后定心部离轨时的  $\psi_0$ 、 $\dot{\varphi}_0$ 、 $\varphi_0$  等,统称起始扰动。其产生的原因很复杂,有定向器振动及波纹度;还有弹体质量分布不均匀,以及弹、炮间隙的存在等。所有这些,都将影响到火箭发射过程的运动状态,在离轨时便自然而然地形成起始扰动。

#### 2. 横风

横风就是一股横向气流。对火箭来说,总的气流方向与弹轴之间的夹角,形成了附加的气动力矩,从而使火箭弹轴离开原有的理想弹道方向。

#### 3. 推力偏心

推力作用线一般离火箭质心(不管质心是否在几何纵轴上)的距离用  $L$  表示,叫推力线偏心。由此形成一个推力偏心矩,直接驱使弹轴摆动。而且推力作用线一般也不平行几何纵轴,其间有一个小的角度,以  $\beta_p$  表示,叫推力偏心角。由此可产生垂直于弹轴的推力侧向分量,它也是引起散布的因素;但对尾翼式不旋转火箭而言,这个因素可忽略不计。

此外,还有弹体外形不对称而形成气动偏心以及质量偏心等,但同前三方面比起来,它们是次要因素。

尾翼弹之所以装设尾翼,就是为了让空气动力中心居于质心之后,这样形成的静态力矩,



将力图使弹轴向速度方向靠拢,也即有使攻角减小的作用。把这种静力矩叫稳定力矩。压力中心在质心之后,是保证减小攻角的必要条件。在研究尾翼式火箭弹摆动运动时,这是一个必须具备的前提。使攻角限制在一定范围之内,并保证其变化的趋势是减小的,这就是飞行稳定性的充要条件。

目前无控火箭的散布较大,是一个突出的问题。而且由于主动段内的推力很大,即使攻角不大,也将产生一定的推力侧分量使质心速度发生变化。就全弹道而言,尽管主动段比被动段短得多,但就形成落点总散布来讲,主动段的散布占主导地位。而且由于主动段扰动因素作用,使火箭速度方向发生角偏差(实际速度方向偏离理想弹道速度方向);在主动段末的  $K$  点,实际速度  $v_K$  的方向是与理想弹道速度方向不一致的。这就相当于一门普通火炮在  $K$  点发射时射向改变一样,将直接使落点偏离预定点。如果扰动因素是随机的,比如推力偏心、阵风及起始摆动角速度,它们对每发火箭飞行过程作用的大小是不同的,而且是预先不能确定的,从而形成射弹散布。从本章起,将用较大的篇幅讲授火箭形成散布的物理过程及散布计算的具体方法;对影响散布的因素加以分析。

尾翼式火箭与涡轮式火箭弹相比,主要优点是尾翼式火箭弹的射程可以不受限制,弹体可细长些,威力也可以足够大。而涡轮式火箭弹是靠高速旋转的陀螺效应来保证飞行稳定性,其射程和威力都不会很大。但一般说来,尾翼式火箭比涡轮式火箭散布要大一些。由于目前尾翼式火箭多采用低速旋转,以使一些不对称因素(如推力偏心矩等)不致总是作用在一个方位上,从而各相反方向上的作用能尽可能抵消一部分,这就达到了减小散布的目的。不旋转的尾翼式火箭,目前只用于特殊场合,比如有的不允许有旋转的运载火箭。然而,本章所研究的不旋转式火箭弹摆动理论,仍有其实际和理论意义。

## 7.2 运动方程的建立

### 7.2.1 参考系

为了使问题不复杂化,暂且只研究火箭在铅垂面的运动。就是说,假定各扰动因素均作用在同一铅垂面内,而且假定火箭外形是对称的,并且无风。虽然这是特殊情况,但是将从中引出带有普遍规律性的知识。在有扰动因素存在下的弹道参量,自然而然地将异于理想弹道的弹道诸元。取平动坐标系作为基准参考系,其三轴与图 0.1 的地面坐标系三轴平行,只是坐标原点取弹体质心<sup>①</sup>,仍以  $o-xyz$  表示,如图 7.1 所示。 $o-xyz$  是一个平行移动了的参考系。另外,引入弹轴坐标系  $o-\xi\eta\zeta$ ,  $o\xi$  是弹

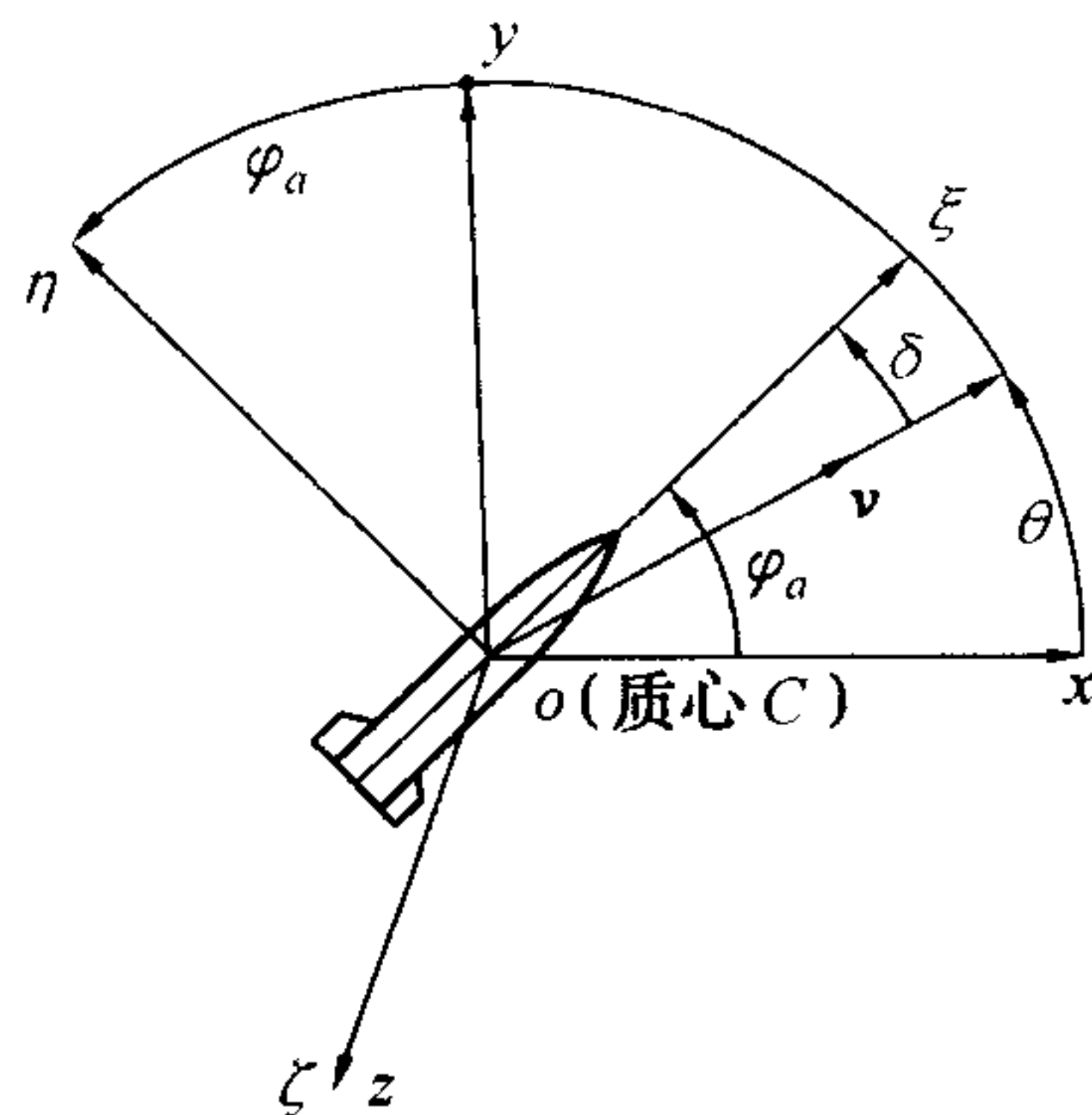


图 7.1 坐标系

① 暂假定质心在火箭几何纵轴上。





体几何纵轴,指向前方; $o\eta$ 轴垂直于 $o\xi$ 轴,指向上方; $o\zeta$ 轴依右手定则指向右方。显然,弹轴的方位由 $o\xi$ 轴与 $ox$ 轴的夹角 $\varphi_a$ 完全确定, $\varphi_a$ 叫弹轴方位角。坐标系 $o-\xi\eta\zeta$ 亦可看作坐标系 $o-xyz$ 绕 $oz$ 轴逆时针方向旋转而得到的,旋转角度是 $\varphi_a$ 。假定实际速度矢量 $\mathbf{v}$ 与 $ox$ 轴的夹角为 $\theta$ ,亦称为弹道切线倾角,向上为正。这个 $\theta$ 与理想弹道的切线倾角 $\theta_i$ (加脚注“i”,以示理想弹道诸元)是有差别的。弹道与速度矢量 $\mathbf{v}$ 的夹角用 $\delta$ 表示,叫做攻角,约定弹轴在 $\mathbf{v}$ 上方时 $\delta$ 为正。

### 7.2.2 作用在弹体上的力和力矩

所研究的力学对象是尾翼式不旋转火箭弹,作用其上的力和力矩仍不外乎是空气动力、推力及其力矩,再加之作用于质心的重力。

#### 1. 空气动力的诸分力及力矩

在有攻角 $\delta$ 时,空气动力合力 $\mathbf{R}$ 的作用点 $D$ 位于质心 $C$ 之后,如图7.2(a)所示。可在质心加上大小相等方向相反的二力 $\mathbf{R}'$ 和 $\mathbf{R}''$ ,其大小等于 $R$ ,方向与 $\mathbf{R}$ 平行。这并不改变火箭运动状态。于是可看成火箭质心受到力 $\mathbf{R}'$ ( $=\mathbf{R}$ )和由 $\mathbf{R}''$ 与 $\mathbf{R}$ 构成的力偶矩的作用,这个力偶矩以 $M_z$ 表示,它力图使攻角 $\delta$ 减小,叫做稳定力矩。将 $\mathbf{R}'$ 以速度矢量 $\mathbf{v}$ 为轴进行分解,一个投影到速度方向线上,以 $\mathbf{R}_x$ 表示,称为阻力;另一个投影到垂直速度方向上,以 $\mathbf{R}_y$ 表示,称为升力。显然, $\mathbf{R}_x$ 、 $\mathbf{R}_y$ 和 $M_z$ 的共同作用,等效于 $\mathbf{R}$ 的单独作用。它们三者对火箭运动的作用是各不相同的: $\mathbf{R}_x$ 改变速度 $\mathbf{v}$ 的大小(减小), $\mathbf{R}_y$ 改变速度 $\mathbf{v}$ 的方向, $M_z$ 使弹轴摆动。这种作用是不能互易的。

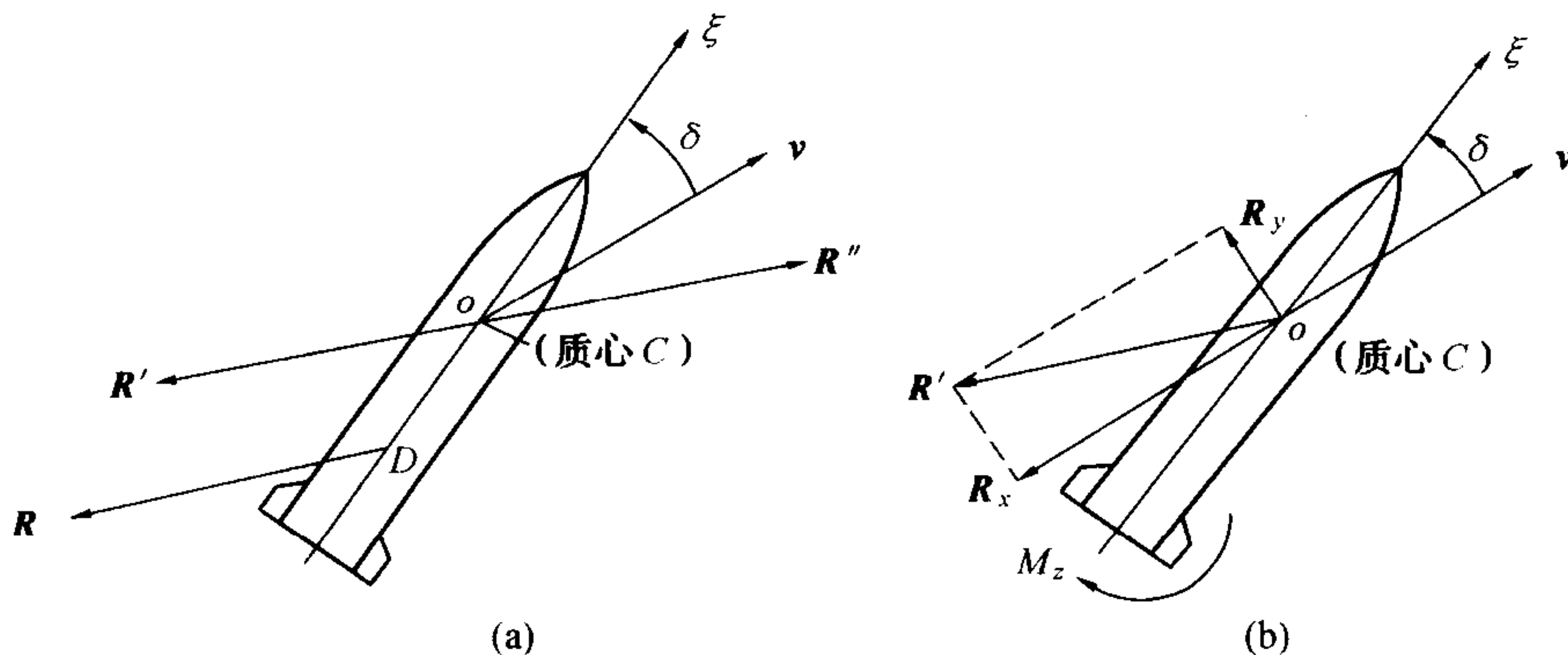


图 7.2 总空气动力及其简化

上述只考虑一种静态情况。当弹轴以某角速度 $\dot{\varphi}_a$ 摆动时,便使弹体表面压力分布略有改变;还因弹体与空气摩擦,而产生一个力矩 $M_{zd}$ ,它对弹轴的摆动起阻滞作用,称为赤道阻尼力矩。它的矢量 $\mathbf{M}_{zd}$ 总与 $\dot{\varphi}_a$ 的方向相反。还有与攻角角速度成正比的下洗延迟力矩,其作用与 $M_{zd}$ 相仿,总阻滞攻角变化,但比 $M_{zd}$ 要小,在近似计算时可不考虑。

归结上面所述各力和力矩的表达式如下

$$R_x = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_x(Ma, \delta) \quad (7.1)$$



$$R_y = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y(Ma, \delta) \quad (7.2)$$

$$M_x = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_z(Ma, \delta) \quad (7.3)$$

$$M_{zd} = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_{zd}(Ma, \delta) \quad (7.4)$$

式中,  $l$  是全弹长,  $Ma$  是马赫数。当  $\delta$  较小时, 阻力系数  $C_x(Ma, \delta)$  可表示为

$$C_x = (Ma, \delta) = C_{x0}(Ma)(1 + k_\delta \delta^2) \quad (7.5)$$

式中,  $C_{x0}(Ma)$  为  $\delta = 0$  时的阻力系数,  $k_\delta$  为一个系数, 对各类弹形  $k_\delta$  值是不同的。而升力系数  $C_y(Ma, \delta)$  和稳定力矩系数  $m_z(Ma, \delta)$  在  $\delta$  为小攻角时, 可用其对攻角  $\delta$  的导数  $C'_y(Ma)$  和  $m'_z(Ma)$  表示

$$C_y(Ma, \delta) = C'_y(Ma) \delta \quad (7.6)$$

$$m_z(Ma, \delta) = m'_z(Ma) \delta \quad (7.7)$$

赤道阻尼力矩系数  $m_{zd}(Ma, \delta)$  与其导数的关系为

$$m_{zd}(Ma, \delta) = m'_{zd} \frac{l \dot{\varphi}_a}{v} \quad (7.8)$$

而

$$m'_{zd} = \frac{\partial m_{zd}}{\partial (l \dot{\varphi}_a / v)} \quad (7.9)$$

诸导数  $C'_y$ 、 $m'_z$  和  $m'_{zd}$  在小攻角时仅是马赫数  $Ma$  的函数, 并且在  $v < 250$  m/s 时可以近似视为常数, 其数值可参看表 7.1 中的实例。

表 7.1 三种火箭的部分气动系数

弹种	M-8	M-13	M-31
系数导数			
$C'_y/\text{rad}^{-1}$	10.9	9.4	2.3
$m'_z/\text{rad}^{-1}$	3.00	2.86	1.06
$m'_{zd}/\text{rad}^{-1}$	0.868	0.870	0.492

$C'_y$ 、 $m'_z$  和  $m'_{zd}$  随  $Ma$  变化的规律, 可参阅某尾翼式火箭弹的函数曲线, 示于图 7.3、7.4、7.5 中。在小攻角时,  $m'_z$ 、 $C'_y$  和  $C_x$  之间有一定的简单关系。由图 7.6 所示, 设阻力中心  $D$  到质心的距离是  $l_d$ , 那么

$$M_z = R_y l_d \cos \delta + R_x l_d \sin \delta \approx R_y l_d + R_x l_d \delta$$

将式(7.1)、(7.2)、(7.3) 及(7.6)、(7.7) 代入, 可得

$$m'_z = \frac{l_d}{l} (C'_y + C_x) \quad (7.10)$$

比值  $l_d/l$  叫做静稳定度, 又称为“稳定储备量”。由式(7.10)

$$\frac{l_d}{l} = \frac{m'_z}{C'_y + C_x} \quad (7.11)$$





多数情况下,有  $C_x \ll C_y'$ , 得近似式

$$\frac{l_d}{l} \approx \frac{m_z'}{C_y'} \quad (7.12)$$

显而易见,比值  $l_d/l$  是马赫数的函数;超声速时,压力中心要向前移,  $l_d$  将减小。现有尾翼弹的  $l_d/l$  大致为 10% ~ 20%, 也有更小者,但也有达到 30% 以上的。

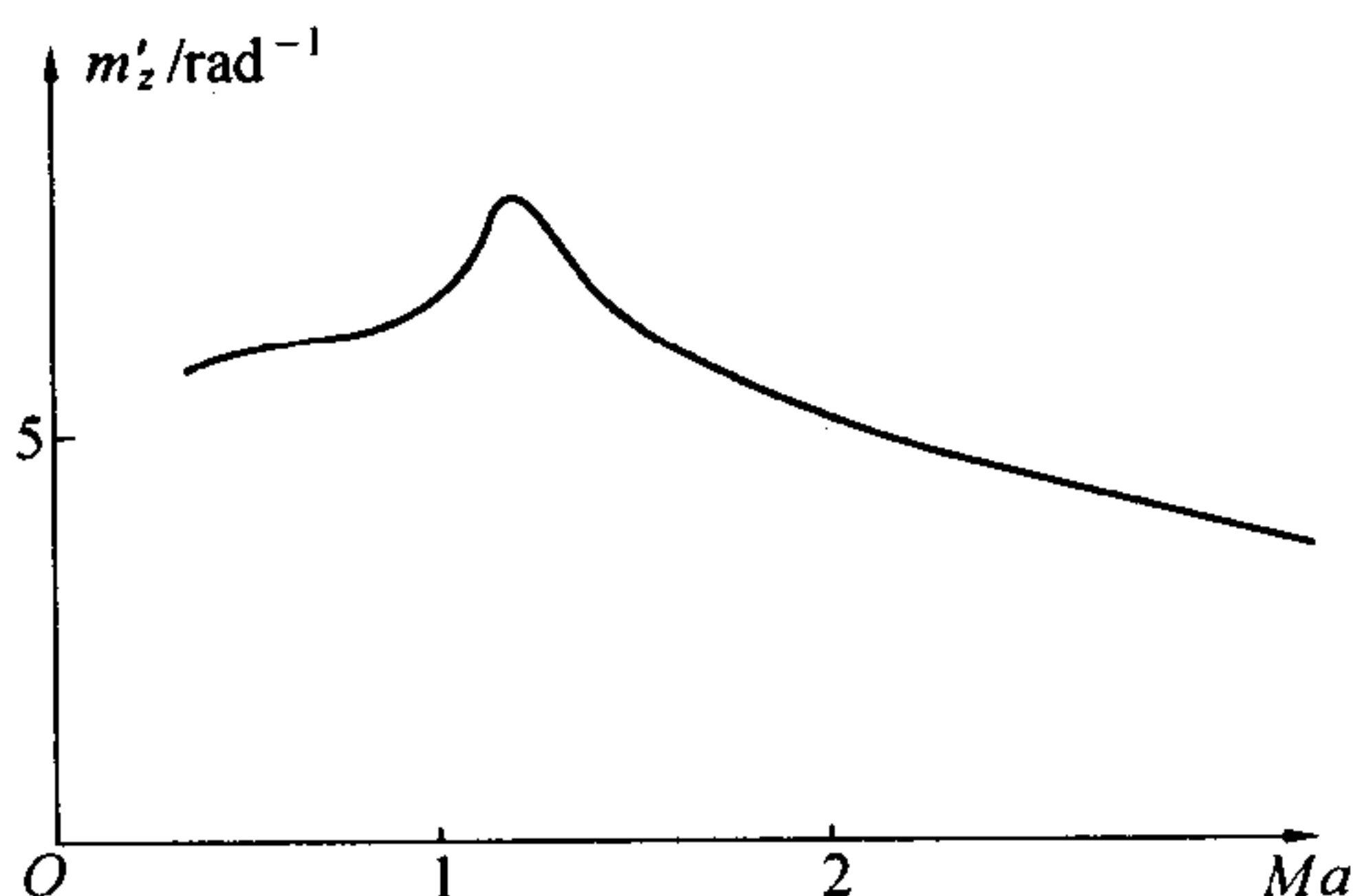


图 7.3  $m'_{zd} - Ma$  曲线

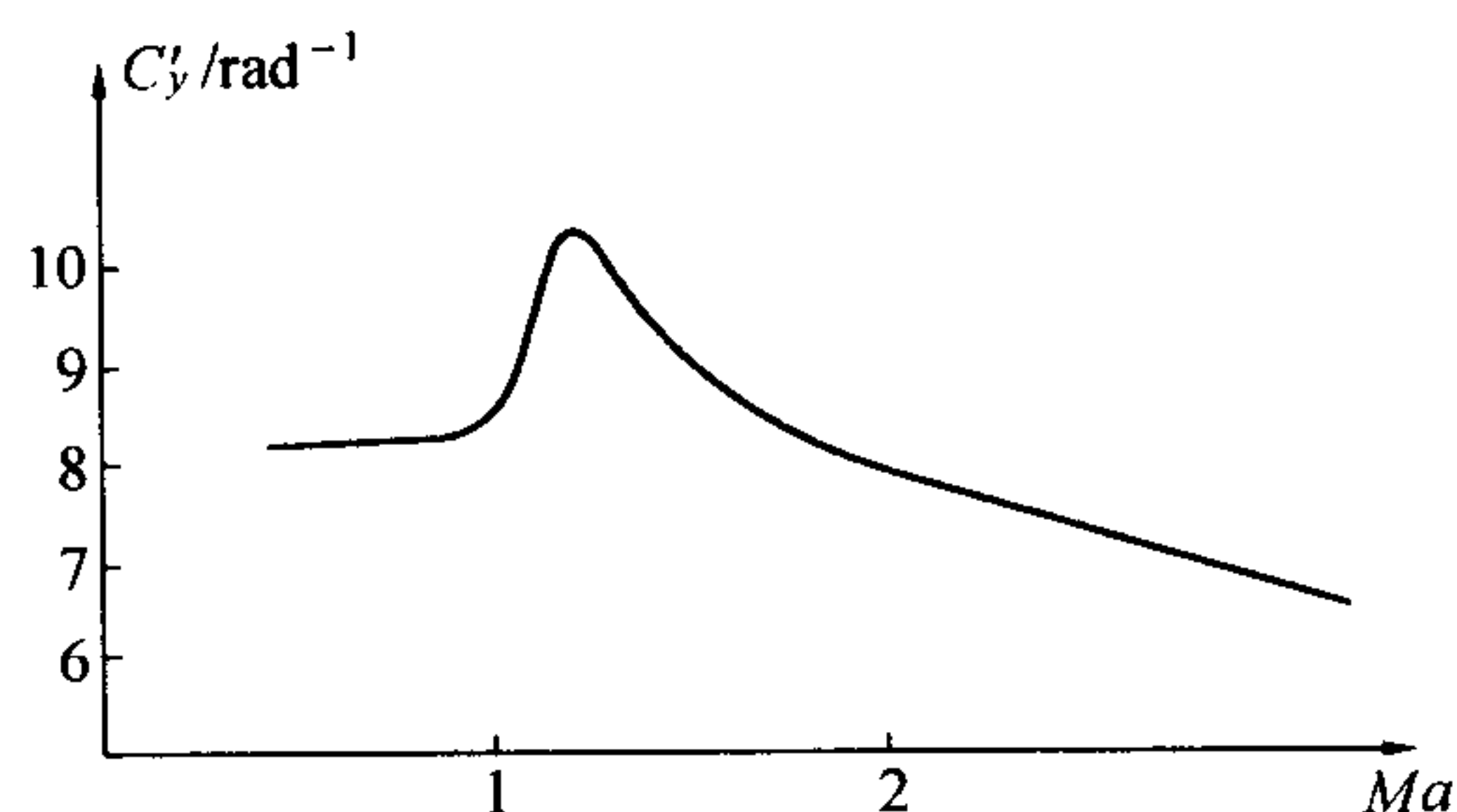


图 7.4  $C'_y - Ma$  曲线

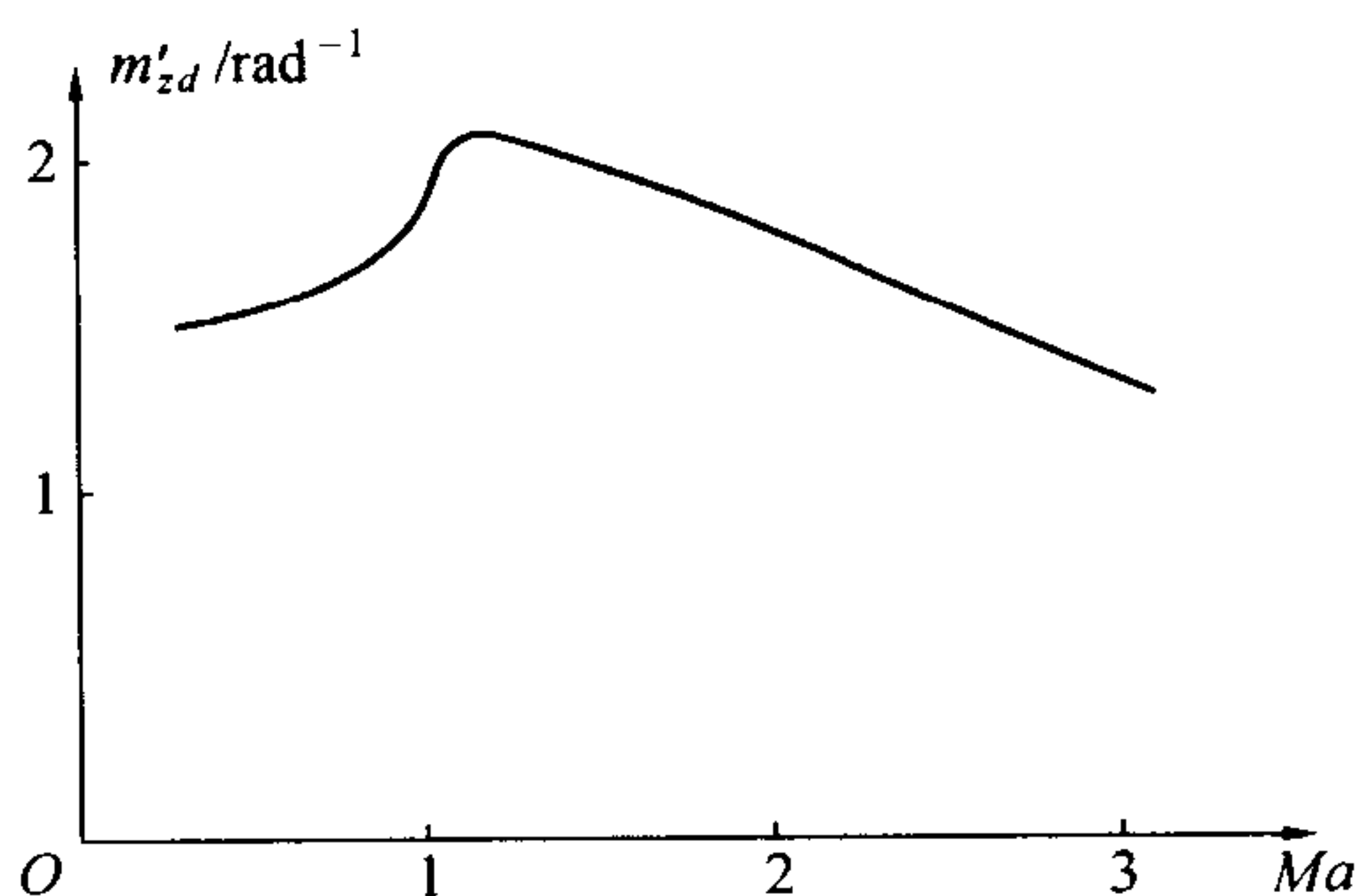


图 7.5  $m'_{zd} - Ma$  曲线

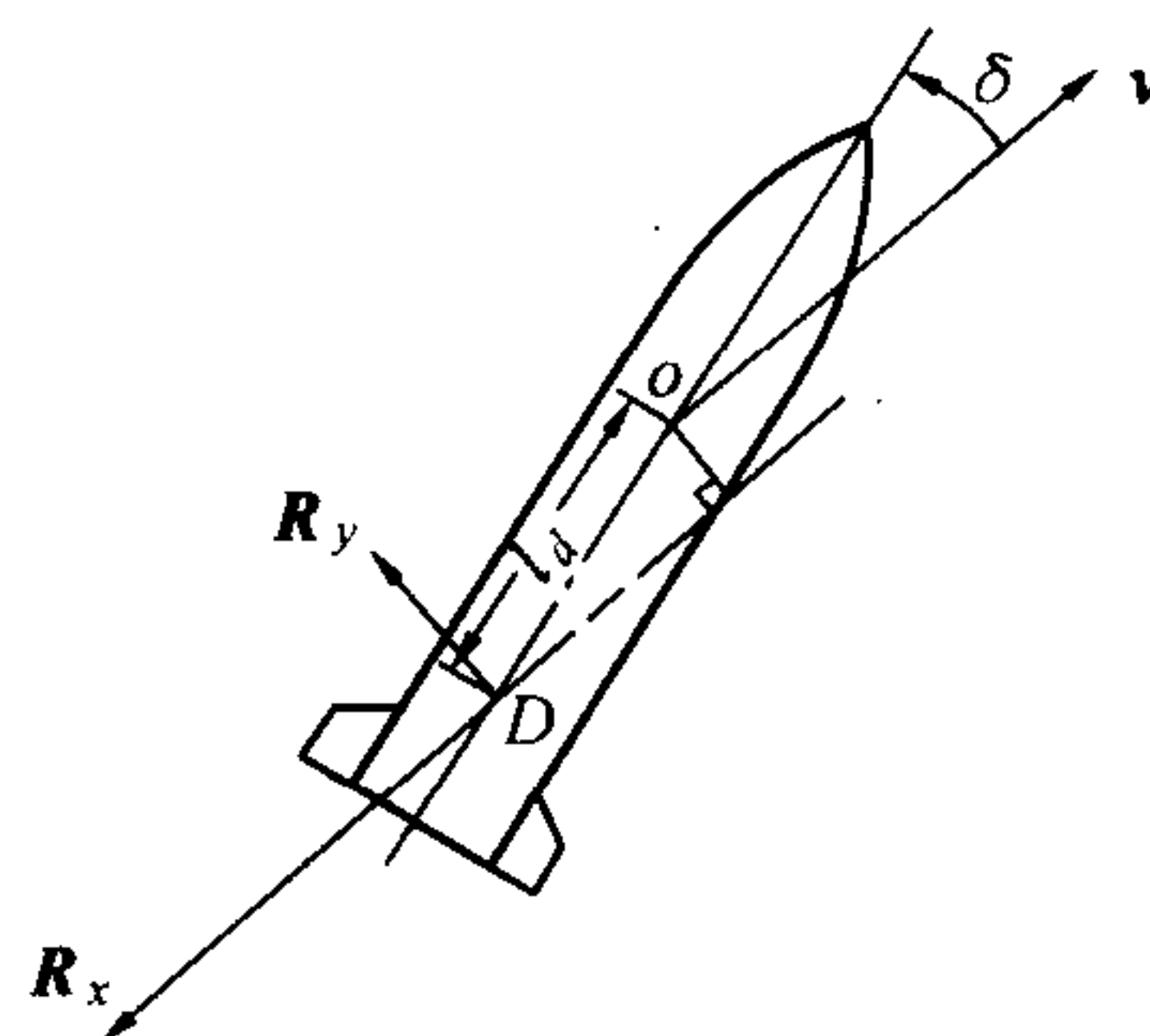


图 7.6  $R_x, R_y$  与  $Ma$  间的关系

在空气动力学中,稳定力矩系数导数  $m'_z$  和赤道阻尼力矩系数导数  $m'_{zd}$  都是负值。而本章取为正值,在建立运动方程时,须将相应二力矩带上负号。

## 2. 推力和推力偏心矩

由于制造的公差,喷管的歪斜,燃气流的不均匀性等原因,总推力矢量  $F_{P\Sigma}$  的作用线是不过火箭质心的,质心到推力作用线的距离以  $L$  表示(有些文献以  $L_P$  表示,本书省略了下角 P),称为推力线偏心,或线推力偏心[图 7.7(a)]。一般认为,对单喷管火箭弹,推力作用线是通过喷管喉部中心的,对多喷管者,则无定论。不过这个问题没有多大值得探究的价值。在六分力推力试验台上,可以直接测出推力轴向分量  $F_P$  和侧向分量  $F_{P1}$  以及推力偏心矩  $M_P$ ,见图 7.7(b)。由于



$$M_P = F_P L \quad (7.13)$$

$L$  之值就可以反求出。至于总推力  $F_{P\Sigma}$  与弹轴的夹角  $\beta_P$  便由下式确定

$$\beta_P \approx \frac{F_{Pl}}{F_P} \quad (7.14)$$

$\beta_P$  叫做推力偏心角, 有的资料称角推力偏心。

就目前生产工艺水平来看, 通过实测的  $F_{Pl}$  进行理论计算, 发现推力侧分力对总散布的影响是很小的, 一般可略而不计(其计算见本章附录)。

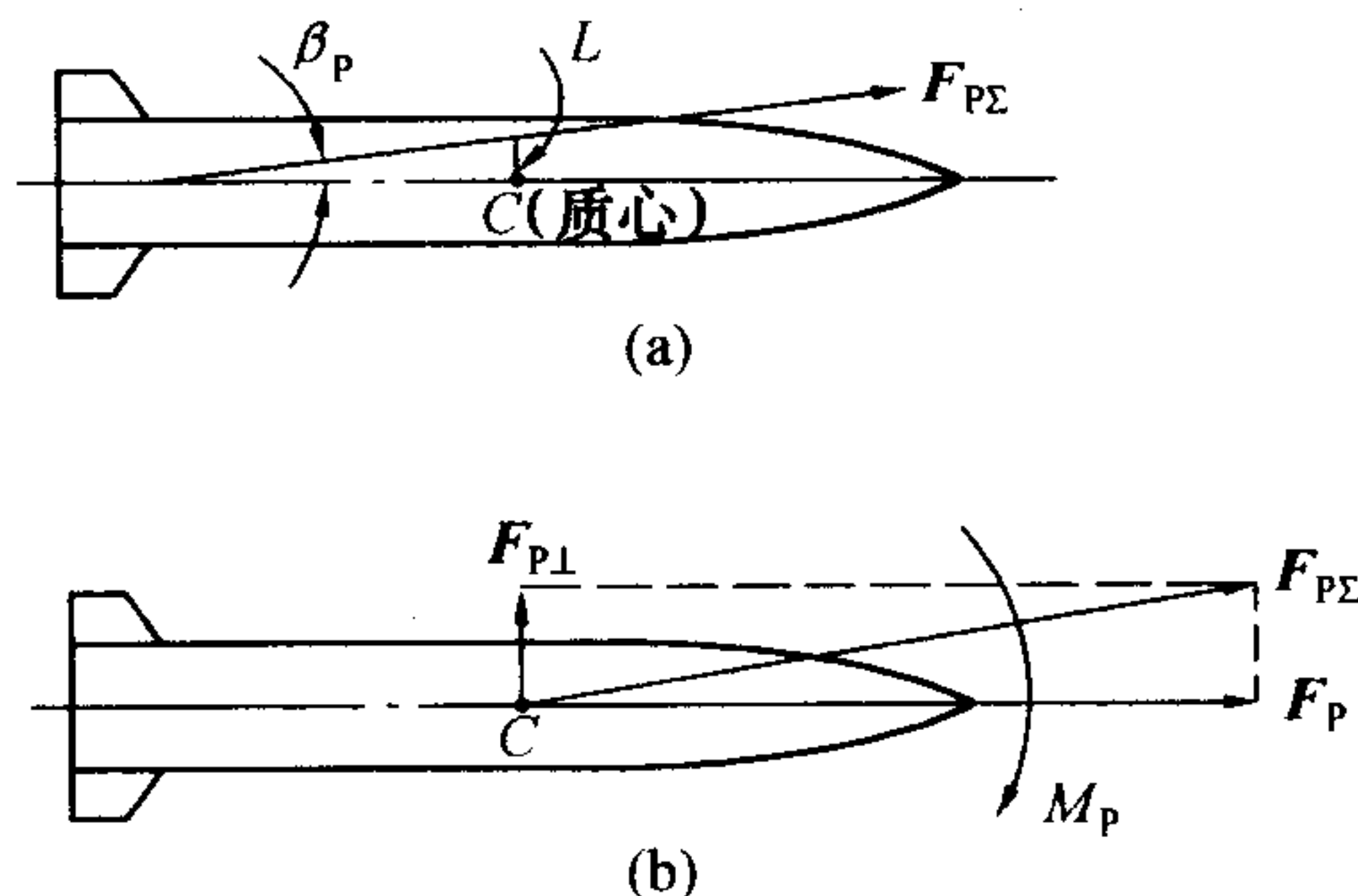


图 7.7 火箭推力及其简化

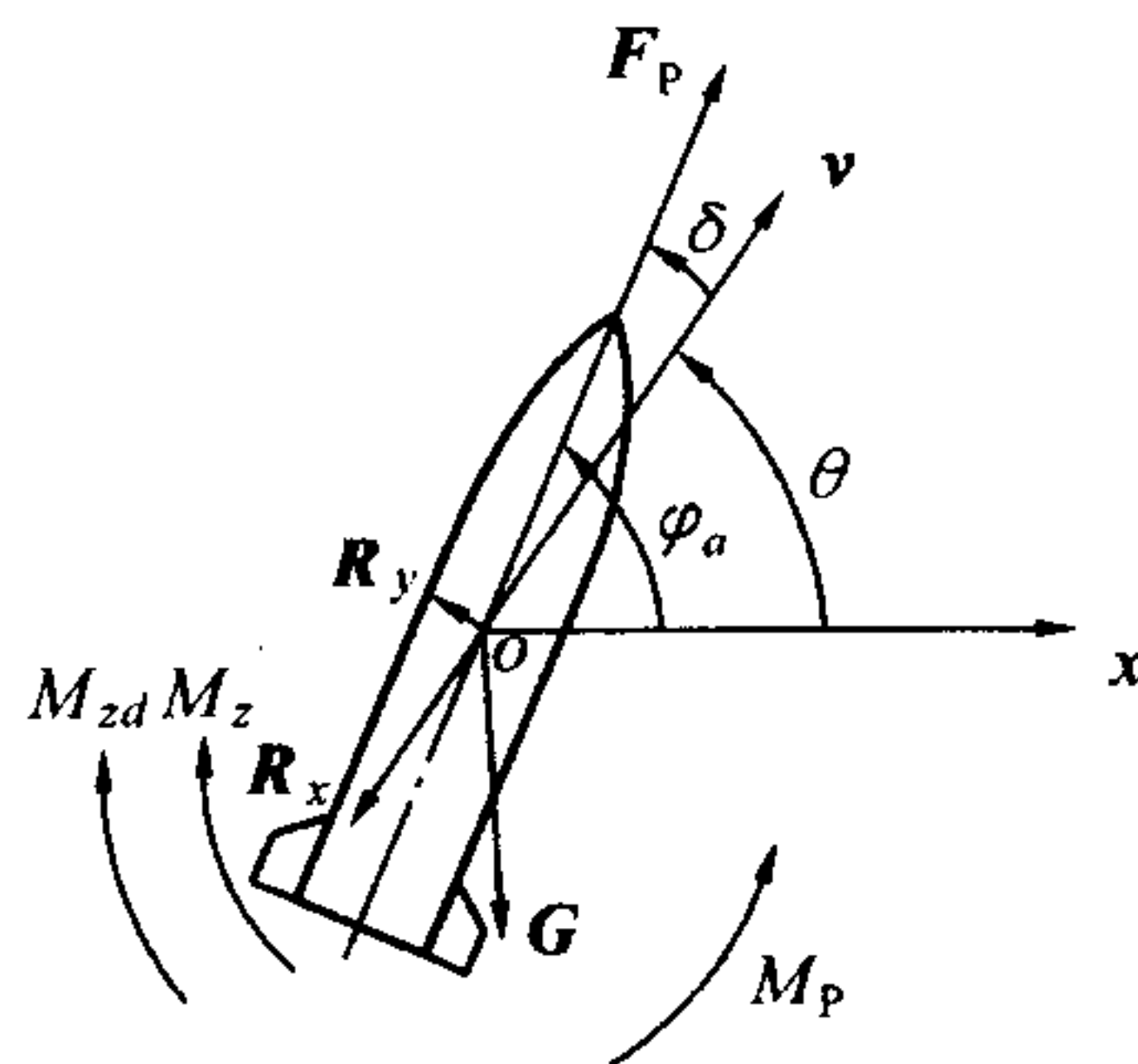


图 7.8 火箭在铅垂面内的运动

### 7.2.3 铅垂面内的运动方程式

图 7.8 表示尾翼式不旋转火箭弹在铅垂面内的运动状态及示力图。由理论力学可知, 为建立质心运动力学方程, 可将方程

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (7.15)$$

向弹道切线方向和法线方向投影。式(7.15)中的  $F$  是包括推力在内的一切外力, 因而可得

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_P \cos \delta - R_x - mg \sin \theta \\ m v \frac{d\theta}{dt} = F_P \sin \delta + R_y - mg \cos \theta \end{cases} \quad (7.16)$$

而弹体绕质心的转动方程, 可依动量矩定理

$$\frac{dK}{dt} = M \quad (7.17)$$

式中,  $K$  是动量矩矢量,  $M$  为包括推力矩在内的一切外力矩。对铅垂面的平面摆动而言, 将式(7.17)投影到与铅垂面  $xoy$  垂直的  $oz$  轴上, 则得

$$J_z \frac{d^2 \varphi_a}{dt^2} = M_P - M_z - M_{zd} \quad (7.18)$$





式中,  $J_z$  是赤道转动惯量, 即弹体绕过质心垂直于纵轴之轴的转动惯量, 常以  $A$  记之。

方程(7.16)、(7.18) 加之质心运动学方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \sin \theta \\ \frac{dx}{dt} = v \cos \theta \end{cases} \quad (7.19)$$

便构成一般运动方程组。在这里,  $m$ 、 $A$  等弹体参量是已知的, 推力  $F_P(t)$  也是时间的已知函数。所求得未知量有  $v$ 、 $\theta$ 、 $x$ 、 $y$ 、 $\delta$ 、 $\varphi_a$  六个函数值。而方程只有五个, 还需要一个方程。事实上,  $\varphi_a$ 、 $\theta$  和  $\delta$  之间只要知道其中两个, 第三个就可知道。由图 7.8 可知

$$\varphi_a = \theta + \delta \quad (7.20)$$

这是一个联系方程。

于是得火箭铅垂平面运动方程组

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_P \cos \delta - R_x - mg \sin \theta & \text{①} \\ mv \frac{d\theta}{dt} = F_P \sin \delta + R_y - mg \cos \theta & \text{②} \\ A \frac{d^2 \varphi_a}{dt^2} = M_P - M_z - M_{zd} & \text{③} \\ \frac{dy}{dt} = v \sin \theta & \text{④} \\ \frac{dx}{dt} = v \cos \theta & \text{⑤} \\ \varphi_a = \theta + \delta & \text{⑥} \end{cases} \quad (7.21)$$

在给定初始条件下, 便可解出此方程组。

#### 7.2.4 扰动运动方程组及其简化

理想弹道的运动方程组为

$$\begin{cases} m \frac{dv_i}{dt} = F_{Pi} - F_{xi} - mg \sin \theta_i & \text{①} \\ mv_i \frac{d\theta_i}{dt} = - mg \cos \theta_i & \text{②} \\ \frac{dy_i}{dt} = v_i \sin \theta_i & \text{③} \\ \frac{dx_i}{dt} = v_i \cos \theta_i & \text{④} \end{cases} \quad (7.22)$$



式中脚注“i”表示理想弹道的参数。

显然,在考虑扰动因素作用下的运动方程组(7.21)中的诸运动参数与方程(7.22)中的运动参数是有差别的。这个差值,就是运动参数偏差量。将方程组(7.21)中与理想弹道有关的参数表示如下

$$\begin{cases} v = v_i + \Delta v, \\ \theta = \theta_i + \psi, \\ \varphi_a = \theta_i + \varphi, \\ y = y_i + \Delta y, \\ x = x_i + \Delta x. \end{cases} \quad (7.23)$$

式中  $\Delta v$ ——速度值的偏差量;

$\psi$ ——速度方向相对于理想弹道切线方向的角偏差量,称为偏角;

$\varphi$ ——弹轴方向相对理想弹道切线方向的角偏差量,称为摆动角;

$\Delta x, \Delta y$ ——火箭质心坐标的偏差量。

而且由式(7.23)和(7.21)⑥便知下列关系式

$$\varphi = \psi + \delta \quad (7.24)$$

由于理想弹道的运动参数是已知的,因此将式(7.23)代入方程组(7.21)中,(7.21)便成为描述诸偏差量( $\varphi, \psi, \delta, \Delta v, \Delta x, \Delta y$ )变化规律的方程组,它即为扰动运动方程组。对此方程组的精确求解须依靠电子计算机才行。然而,为了解诸偏差量的变化规律,尤其了解各扰动因素所引起的偏差量的变化规律及其物理本质,需对扰动方程组作必要的简化,以便求得解析解。

在简化中,一方面把诸偏差量看成一阶小量,对角偏差量的正弦可用角度本身代替(以弧度为单位),对角偏差的余弦可取为1。另外,诸气动系数、空气密度及结构参数均取为常量。况且扰动弹道的速度可取理想弹道即未扰动弹道速度之值,即取  $\Delta v = 0$ ,与精确计算结果进行比较表明,这样近似处理所得  $\psi$  和  $\varphi$  的误差一般很小。

将式(7.21)②减去式(7.22)②可得近似式为

$$mv \frac{d\psi}{dt} = F_P \delta + R_y \quad (7.25)$$

将  $\varphi_a = \theta_i + \varphi$  代入式(7.21)③,得

$$A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_p - M_z - M_{zd} - A\ddot{\theta}_i \quad (7.26)$$

式中小圆点“.”表示对时间  $t$  的导数。

为了书写方便,引入下列符号:





$$\left. \begin{aligned} b_x &= \frac{\rho S C_x}{2m}; & b_y &= \frac{\rho S C_y}{2m}; \\ k_z &= \frac{\rho S l m_z'}{2A}; & k_{zd} &= \frac{\rho S l^2 m_{zd}'}{2A}; \\ R_A &= \sqrt{\frac{A}{m}}; & k &= \sqrt{k_z} \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

$R_A$  为赤道回转半径。关于  $b_x$ 、 $b_y$ 、 $k$ 、 $k_{zd}$  的数量级,可参阅表 7.2 中的数值(亚声速条件下)。

表 7.2

参量 \ 弹种	M - 8	M - 13
$k/m^{-1}$	$16.2 \times 10^{-2}$	$8.5 \times 10^{-2}$
$k_{zd}/m^{-1}$	$0.56 \times 10^{-2}$	$0.32 \times 10^{-2}$
$b_y/m^{-1}$	$0.43 \times 10^{-2}$	$0.20 \times 10^{-2}$
$b_x/m^{-1}$	$0.02 \times 10^{-2}$	$0.01 \times 10^{-2}$

利用式(7.27)的符号,便得下列形式的方程组

$$\begin{cases} v \frac{d\psi}{dt} = a_p \delta + b_y v^2 \delta \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{a_p L}{R_A^2} - k^2 v^2 \delta - k_{zd} v (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_i) - \ddot{\theta}_i \\ \varphi = \delta + \psi \end{cases} \quad (7.28)$$

这个方程组中的  $v$  可直接利用前面弹道计算的结果。求解该方程组,便可得到  $\psi$ 、 $\varphi$  和  $\delta$ 。如同本章 7.1 指出的那样,主要任务是求得主动段末  $K$  点的偏角,以求落点的偏差量,然而从式(7.28)第一方程看出,这须先求得攻角  $\delta$  之后,才便于积分得到偏角  $\psi$ 。而且为考察飞行稳定性,也得知道  $\delta$  的规律。可见,求得  $\delta$  和  $\psi$  是研究扰动运动的中心问题。至于  $\Delta x$  和  $\Delta y$  的有关方程,它与求解  $\psi$  和  $\delta$  没有什么关系,就暂且不去管它。方程组(7.28)便是扰动方程组的简化形式。

### 7.2.5 尾翼式不旋转火箭弹横向摆动运动方程组

为了研究侧向偏差量,需要知道火箭弹在过速度矢量线并且垂直射击面之平面内的摆动运动。假定诸扰动因素皆作用于此平面内,所指的平面就是垂直射击平面且过理想弹道切线的平面。图 7.9 所示火箭运动状态,表示火箭纵轴和速度矢量  $v$  皆在过图 7.1 所示  $oz$  轴的平面内,  $ox'$  是该平面与射击平面  $xoy$  的交线。约定  $v$  矢量在射击平面右侧时,它与射击平面的夹角即偏角  $\psi$  为正。弹轴与射击平面的夹角  $\varphi$  仍叫摆动角,以弹轴在射面右侧为正,并且弹轴在  $v$  右侧时的攻角  $\delta$  为正。

将式(7.15)于该平面内在  $v$  方向及垂直于  $v$  方向上投影得



$$\begin{cases} mv \frac{dv}{dt} = F_p \cos \delta - R_x - mg \sin \theta_i \cos \psi \\ mv \frac{d\psi}{dt} = F_p \sin \delta + R_y + mg \sin \theta_i \sin \psi \end{cases} \quad (7.29)$$

在投影时,要注意重力  $mg$  (在图中未标出) 是先投影到交线  $ox'$  上,然后再投影到  $v$  方向及  $v$  的垂直方向。

将式(7.17)投影到与  $x'oz$  平面垂直的  $o\eta$  轴上,得

$$A \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_P - M_z - M_{zd}$$

仿前述方法,可得简化的扰动方程组如下

$$\begin{cases} v \frac{d\psi}{dt} = a_p \delta + b_y v^2 \delta \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{a_p L}{R_A^2} - k^2 v^2 \delta - k_{zd} v \dot{\varphi} \\ \varphi = \delta + \psi \end{cases} \quad (7.30)$$

比较方程组(7.28)和(7.30)易见,这两个方程组的齐次方程及推力偏心矩的非齐次项完全一样,而且都是线性微分方程。线性微分方程的解具有叠加的性质。起始扰动将作为方程组的初始条件。这样,无论是起始扰动,或是推力偏心,对铅垂平面与横向平面内的扰动运动的影响是一样的,只要解一个方程组就行了。而(7.28)中与  $\dot{\theta}_i$ 、 $\ddot{\theta}_i$  有关项,称为重力扰动项,是由于在重力作用下使速度  $v$  不断向下偏转引起的,它不造成射弹散布,在散布分析中,可不管它。应该指出,在通常情况下的扰动因素的作用方位,并非一定在铅垂面内或垂直于射面,而是空间任意方位。这样便可对它沿两个方向进行分解。

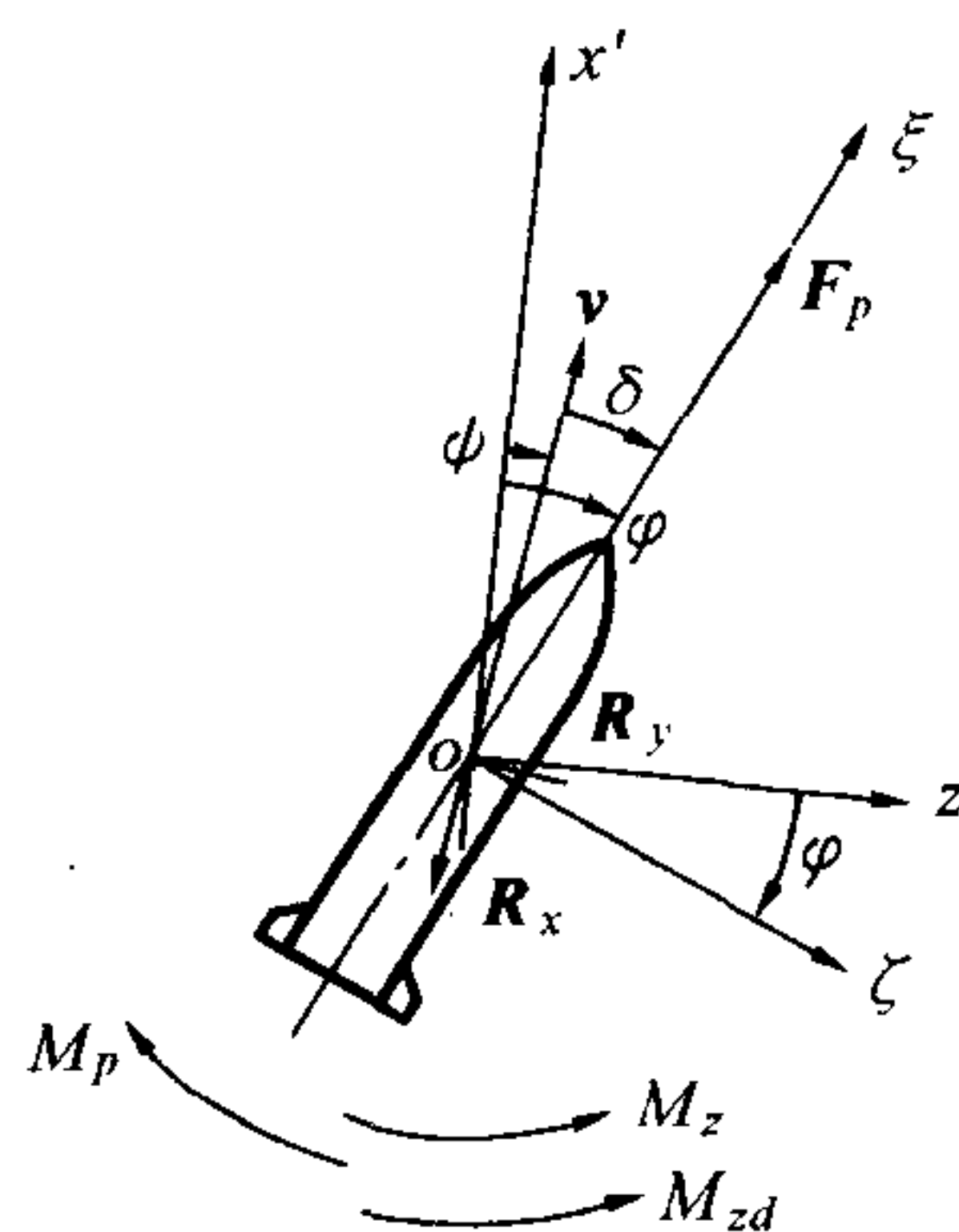


图 7.9 火箭的横向运动

### 7.3 扰动方程组的变量变换

对上述两个平面内的摆动运动方程采用统一形式

$$\begin{cases} v \frac{d\psi}{dt} = a_p \delta + b_y v^2 \delta \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k^2 v^2 \delta + k_{zd} v \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a_p L}{R_A^2} \\ \varphi = \delta + \psi \end{cases} \quad (7.31)$$

初始条件为

$$t = t_0 \text{ 时, } \psi = \psi_0, \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$$

为了使解的结果便于分析,并使方程组(7.31)形式简单,特引入无因次自变量  $u$ ,以替换自变量  $t$ ,  $u$  定义为





$$u = ks \quad (7.32)$$

式中,  $s$  为火箭运动的弹道弧长。则

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{du} \frac{du}{dt} = kv\psi' \quad (7.33)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dt} = kv\varphi' \quad (7.34)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = kv \frac{d\varphi'}{dt} + k \frac{dv}{dt} \varphi' = (kv)^2 \varphi'' + k \frac{dv}{dt} \varphi'$$

至于  $dv/dt$ , 可由式(7.21)① 知

$$\frac{dv}{dt} = a_P - b_x v^2 - g \sin \theta \quad (7.35)$$

则 
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = (kv)^2 \varphi'' + k(a_P - b_x v^2 - g \sin \theta) \varphi' \quad (7.36)$$

上面各式中量右上角“'”表示对  $u$  的导数。将式(7.33)代入式(7.31)第一式, 将式(7.34)、(7.36)代入式(7.31)第二式, 可得下列联立方程组

$$\begin{cases} \psi' = \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \delta & \text{①} \\ \varphi'' + \frac{1}{k} \left( \frac{a_P - g \sin \theta}{v^2} - b_x + k_{zd} \right) \varphi' + \delta = \frac{a_P L}{R_A^2} \frac{1}{(kv)^2} & \text{②} \\ \varphi = \psi + \delta & \text{③} \end{cases} \quad (7.37)$$

这个方程组还不便求解, 需要进一步变换。根据经验, 引入新的函数

$$W = v\delta \quad (7.38)$$

将式(7.38)对  $u$  取导数, 得

$$W' = v'\delta + v\delta'$$

则 
$$\delta' = \frac{W'}{v} - \frac{v'}{v} \delta = \frac{W'}{v} - \frac{v'}{v} \frac{W}{v} \quad (7.39)$$

由式(7.37)③ 得

$$\varphi' = \psi' + \delta'$$

将式(7.37)① 和式(7.39) 代入得

$$\varphi' = \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \delta + \frac{W'}{v} - \frac{v'}{v} \frac{W}{v} = \frac{W'}{v} + \left( \frac{a_P}{kv^2} + \frac{b_y}{k} - \frac{v'}{v} \right) \frac{W}{v}$$

又 
$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{v} \frac{dv}{du} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} = (a_P - b_x v^2 - g \sin \theta) \frac{1}{kv^2}$$

则 
$$\varphi' = \frac{W'}{v} + b^* \frac{W}{v} \quad (7.40)$$

式中 
$$b^* = \frac{1}{k} \left( b_x + b_y + \frac{g \sin \theta}{v^2} \right) \quad (7.41)$$



据表 7.2 中的数量级,可知  $b^*$  是远小于 1 的数,可视为常量。

将式(7.40)再对  $u$  求导一次得

$$\varphi'' = \frac{W''}{v} - \frac{v'}{v} \frac{W'}{v} + b^* \frac{W''}{v} - b^* \frac{v'}{v} \frac{W'}{v} = \frac{W''}{v} + \left( b^* - \frac{v'}{v} \right) \frac{W'}{v} - b^* \frac{v'}{v} \frac{W'}{v} \quad (7.42)$$

将式(7.40)、(7.42)一并代入式(7.37)②,并略去二阶以上小量,经整理得

$$W'' + 2bW' + W = \frac{a_p L}{R_A^2 k^2 v} \quad (7.43)$$

式中

$$b = \frac{1}{2k} \left( b_x + b_y + k_{zd} + \frac{g \sin \theta}{v^2} \right) \quad (7.44)$$

$b$  是一个无因次的数,只有 0.1 的数量级,或更小些。在微分方程求解过程中,通常把它看作常数。很明显,式(7.43)是一个标准振动型方程, $b$  是阻尼系数,强迫项由推力矩产生。将此方程积分便得攻角  $\delta$ ,有了攻角后,积分式(7.37)①可得偏角  $\psi$

$$\psi = \psi_0 + \int_{u_0}^u \frac{1}{k} \left( \frac{a_p}{v^2} + b_y \right) \delta du \quad (7.45)$$

式(7.43)和式(7.45)便是求得角偏差量  $\delta$  和  $\psi$  的两个重要方程。值得注意的是,在推导方程(7.43)过程中,对火箭质心加速度  $dv/dt$  并没有特殊要求(比如常量)。因此,该方程具有普遍性;不但对尾翼式火箭主动段,而且对被动段也是适用的。不言而喻,对被动段应取  $a_p = 0$ 。

## 7.4 起始扰动所引起的攻角和偏角

### 7.4.1 攻角和偏角公式推导

要得到起始扰动引起的攻角和偏角,须先求出方程(7.43)的齐次解,以得攻角,然后代入式(7.45)得偏角。现所论齐次方程为

$$W'' + 2bW' + W = 0 \quad (7.46)$$

其初始条件,可将方程组(7.31)的初始条件变为

$$u = u_0 \text{ 时, } W = W_0 = v_0 \delta_0 = v_0 (\varphi_0 - \psi_0); W' = W'_0 \quad (7.47)$$

$W'_0$  之值可根据式(7.40)和式(7.34)求得,由式(7.40)知,  $W' = v\varphi' - b^* W$ ,而  $\varphi' = \dot{\varphi}/(kv)$  故

$$W' = \frac{\dot{\varphi}}{k} - b^* W \quad (7.48)$$

则

$$W'_0 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} - b^* W_0 \approx \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \quad (7.49)$$

方程(7.46)的二特征根  $r_1$  和  $r_2$  为

$$r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

由于  $b^2 \ll 1$ ,并记虚数  $i = \sqrt{-1}$ ,则





$$r_{1,2} = -b \pm i$$

于是方程(7.46)的通解为

$$W = e^{-b(u-u_0)} [C_1 \cos(u-u_0) + C_2 \sin(u-u_0)] \quad (7.50)$$

将初始条件(7.47)代入上式,可得

$$\begin{aligned} C_1 &= W_0 = v_0(\varphi_0 - \psi_0) \\ C_2 &= W'_0 + bW_0 \approx W'_0 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \end{aligned} \quad (7.51)$$

将  $C_1$  和  $C_2$  代入式(7.50),便得攻角  $\delta$  的表达式

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\dot{\varphi}_0}{kv} e^{-b(u-u_0)} \sin(u-u_0) + \varphi_0 \frac{v_0}{v} e^{-b(u-u_0)} \cos(u-u_0) - \\ &\quad \psi_0 \frac{v_0}{v} e^{-b(u-u_0)} \cos(u-u_0) \end{aligned} \quad (7.52)$$

这就是起始扰动  $\dot{\varphi}_0$ 、 $\varphi_0$  和  $\psi_0$  所引起攻角的综合表达式。在火箭外弹道学中,通常引入特征函数概念,它表示单位扰动量所引起的偏差量。将  $\dot{\varphi}_0$ 、 $\varphi_0$  和  $\psi_0$  分别为一个单位时引起的攻角,即攻角特征函数用  $\delta_{\dot{\varphi}_0}^*$ 、 $\delta_{\varphi_0}^*$  和  $\delta_{\psi_0}^*$  表示,即

$$\delta_{\dot{\varphi}_0}^* = \frac{1}{kv} e^{-b(u-u_0)} \sin(u-u_0) \quad (7.53)$$

$$\delta_{\varphi_0}^* = \frac{v_0}{v} e^{-b(u-u_0)} \cos(u-u_0) \quad (7.54)$$

$$\delta_{\psi_0}^* = -\delta_{\varphi_0}^* \quad (7.55)$$

那么式(7.52)成为下式

$$\delta = \dot{\varphi}_0 \delta_{\dot{\varphi}_0}^* + \varphi_0 \delta_{\varphi_0}^* + \psi_0 \delta_{\psi_0}^* \quad (7.56)$$

从式(7.56)看出,  $\delta$  由三部分合成:第一部分由  $\dot{\varphi}_0$  引起;第二部分由  $\varphi_0$  引起;第三部分由  $\psi_0$  引起。显然起始扰动引起的总  $\delta$ , 可视为由  $\dot{\varphi}_0$ 、 $\varphi_0$ 、 $\psi_0$  单独作用产生的攻角叠加而成。

事实上,它们分别是下列初始条件的解

$$\left. \begin{aligned} (1) & u = u_0 \text{ 时, } \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \varphi_0 = 0, \psi_0 = 0 \\ (2) & u = u_0 \text{ 时, } \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi}_0 = 0, \psi_0 = 0 \\ (3) & u = u_0 \text{ 时, } \psi = \psi_0, \dot{\varphi}_0 = 0, \varphi_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.57)$$

式(7.56)正是三种初始条件下解的叠加,这是由于齐次方程(7.46)是线性的,其解具有叠加性。

下面求偏角,考虑到第一种初始条件,将式(7.53)代入式(7.45),取  $\psi_0 = 0$ , 得  $\dot{\varphi}_0$  所引起的偏角  $\psi_{\dot{\varphi}_0}$  的特征函数  $\psi_{\dot{\varphi}_0}^*$  为

$$\psi_{\dot{\varphi}_0}^* = \frac{1}{k} \int_{u_0}^u \left( \frac{a_p}{v^2} + b_y \right) \frac{1}{kv} e^{-b(u-u_0)} \sin(u-u_0) du \quad (7.58)$$



现在碰到的问题是如何积分,因为还不知道  $v$  是  $u$  的什么函数。一般野战火箭弹道主动段是加速过程,在飞离滑轨之后的相当一段弹道上,大都可视为等加速过程,如以  $\bar{a}$  表示其平均加速度,  $s_a$  表示火箭后定心部离轨时开始计量的弹道弧长,则

$$v^2 = v_0^2 + 2\bar{a}s_a \quad (7.59)$$

对初速不大的野战火箭弹,在离轨后一段弹道上的推力远大于阻力和重力分量,可近似取推力加速度  $a_p$  的平均值作为  $\bar{a}$  值,对其他类型的弹,则视具体情况而定。另外,式(7.58)中的  $u_0$  所相应的离轨时弹道弧长  $s_0$  还不知道,这个  $s_0$  值应该具备什么条件?首先它必须与  $v_0$  的真实值相对应。我们不妨选取这样的  $s_0$ ,使

$$s_{0\text{eff}} = \frac{v_0^2}{2\bar{a}} \quad (7.60)$$

显然,这个  $s_{0\text{eff}}$  并不等于真实的滑轨长度,叫它为“有效滑轨长度”或“有效定向器长度”。将式(7.60)代入式(7.59),则

$$v^2 = 2\bar{a}(s_{0\text{eff}} + s_a) \quad (7.61)$$

记

$$s_{\text{eff}} = s_{0\text{eff}} + s_a \quad (7.61)$$

则

$$v^2 = 2\bar{a}s_{\text{eff}}$$

$s_{\text{eff}}$  叫做弹道弧长有效值,它实际上就是另选量度弹道弧长的起点罢了(为简化书写,今后省略脚注“eff”),则

$$v^2 = 2\bar{a}s \quad (7.62)$$

将式(7.62)代入式(7.58),得

$$\psi_{\varphi_0}^* = \frac{1}{\sqrt{2\bar{a}k}} \int_{u_0}^u \frac{\left(\frac{a_p}{\bar{a}} + 2b_y s\right)}{2u\sqrt{u}} e^{-b(u-u_0)} \sin(u-u_0) du \quad (7.63)$$

被积函数中,  $(a_p/\bar{a} + 2b_y s)\exp[-b(u-u_0)]$  是一个变化很缓的函数,积分时,可取  $u_0$  处的值,并不会影响结果的准确性。且令

$$C_3 = \frac{a_p}{\bar{a}} + 2b_y s_0 \quad (7.64)$$

则式(7.63)为

$$\psi_{\varphi_0}^* = \frac{C_3}{\sqrt{2\bar{a}k}} \int_{u_0}^u \frac{\sin(u-u_0)}{2u\sqrt{u}} du \quad (7.65)$$

定义函数

$$B_I(y_0, y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{2y} \sqrt{\frac{y_0}{y}} \sin(y_0, y) dy \quad (7.66)$$





则

$$\psi_{\varphi_0}^* = \frac{C_3}{kv_0} B_I(u_0, u) \quad (7.67)$$

现在有些外弹道书上也常使用函数  $R_{\dot{\varphi}_0}(u_0, u)$ , 它与  $B_I$  函数的关系为

$$R_{\dot{\varphi}_0}(u_0, u) = \frac{B_I(u_0, u)}{\sqrt{2\pi u_0}} \quad (7.68)$$

那么式(7.67)也可表示为下列形式

$$\psi_{\varphi_0}^* = C_3 \sqrt{\frac{\pi}{ka}} R_{\dot{\varphi}_0}(u_0, u) \quad (7.69)$$

同样方法, 将式(7.54)代入式(7.45), 并取  $\psi = 0$ , 则得  $\varphi_0$  引起偏角  $\psi_{\varphi_0}$  的特征函数  $\psi_{\varphi_0}^*$  为

$$\psi_{\varphi_0}^* = \int_{u_0}^u \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \frac{v_0}{v} e^{-b(u-u_0)} \cos(u - u_0) du \quad (7.70)$$

利用式(7.62)和(7.64)得

$$\psi_{\varphi_0}^* = C_3 \int_{u_0}^u \frac{1}{2u} \sqrt{\frac{u_0}{u}} \cos(u - u_0) du$$

定义函数

$$B_R(\gamma_0, \gamma) = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{1}{2y} \sqrt{\frac{\gamma_0}{y}} \cos(\gamma - \gamma_0) dy \quad (7.71)$$

则

$$\psi_{\varphi_0}^* = C_3 B_R(u_0, u) \quad (7.72)$$

$B_R(u_0, u)$  和  $B_I(u_0, u)$  均已编成了表(见附表 14), 分别是函数  $B(u_0, u)$  的实部和虚部, 函数  $B(u_0, u)$  为

$$B(u_0, u) = \int_{u_0}^u \frac{1}{2u} \sqrt{\frac{u_0}{u}} e^{i(u-u_0)} du \quad (7.73)$$

再看  $\psi_0$  所引起偏角  $\psi_{\psi_0}$  的特征函数  $\psi_{\psi_0}^*$ 。将式(7.55)代入式(7.45), 得(注意取  $\psi_0 = 1$ )

$$\psi_{\psi_0}^* = 1 - C_3 \int_{u_0}^u \frac{1}{2u} \sqrt{\frac{u_0}{u}} \cos(u - u_0) du$$

即

$$\psi_{\psi_0}^* = 1 - C_3 B_R(u_0, u) \quad (7.74)$$

或

$$\psi_{\psi_0}^* = 1 - \psi_{\varphi_0}^* \quad (7.75)$$

#### 7.4.2 攻角和偏角的性质

知道了各起始扰动的攻角和偏角特征函数公式, 便可制作函数曲线。这些曲线示于图 7.10、7.11、7.12 中, 图中  $x_N$  表示发射架滑轨方向(发射前的射向); 角度的单位是 rad, 各特征函数的单位则不一定是 rad。

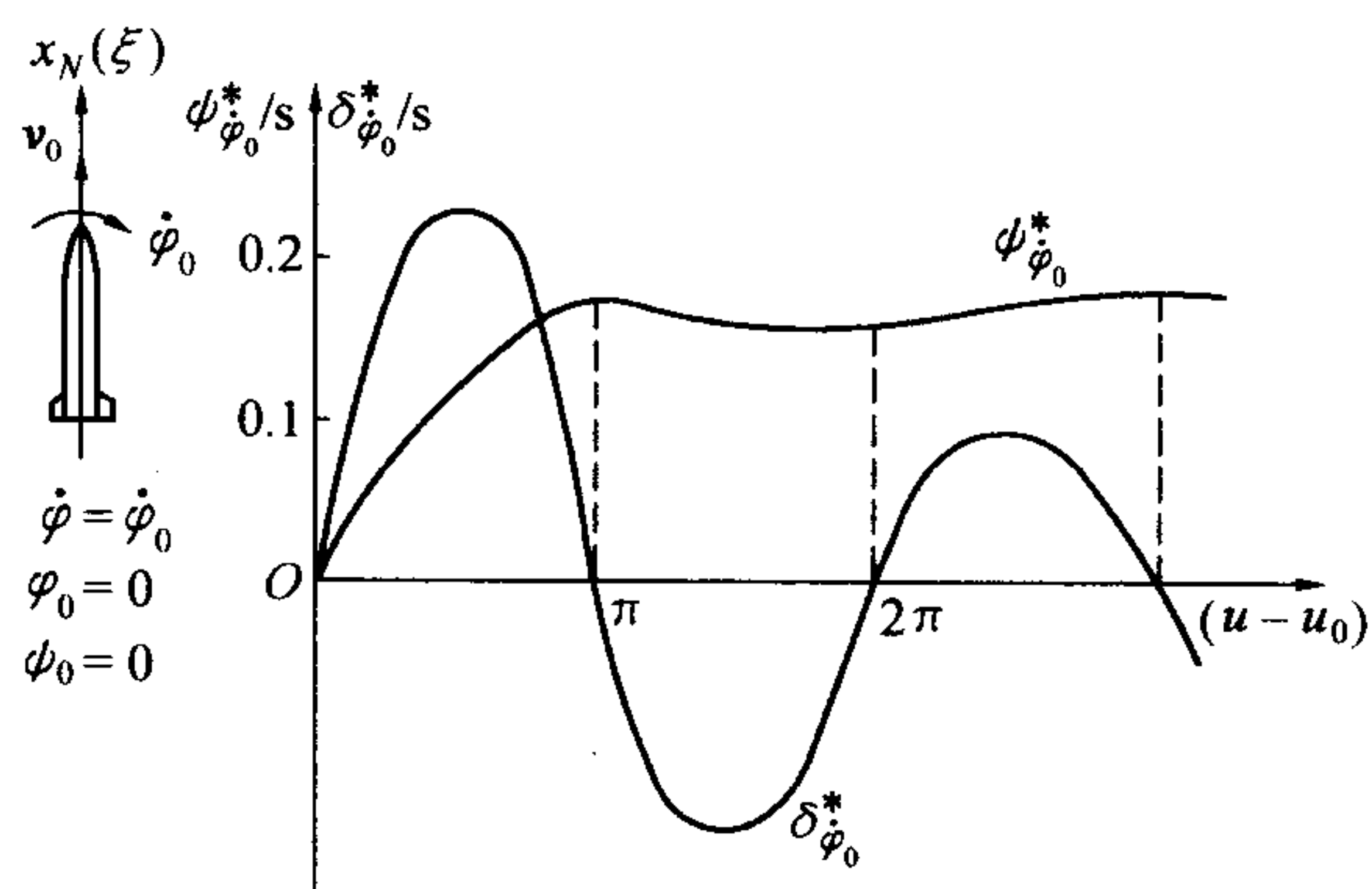


图 7.10  $\delta_{\dot{\varphi}_0}^*$  和  $\psi_{\dot{\varphi}_0}^*$  曲线

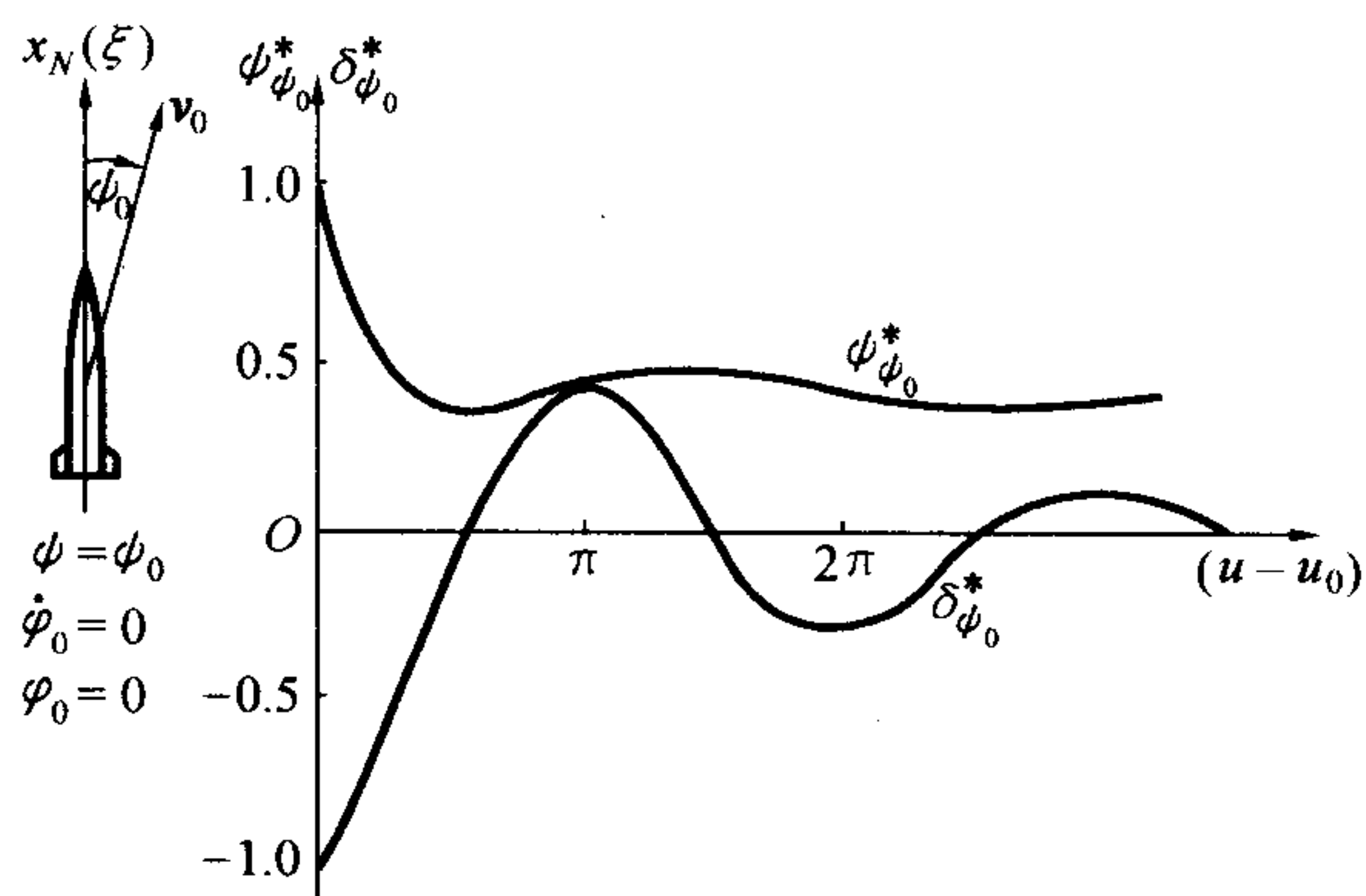


图 7.11  $\delta_{\psi_0}^*$  和  $\psi_{\psi_0}^*$  曲线

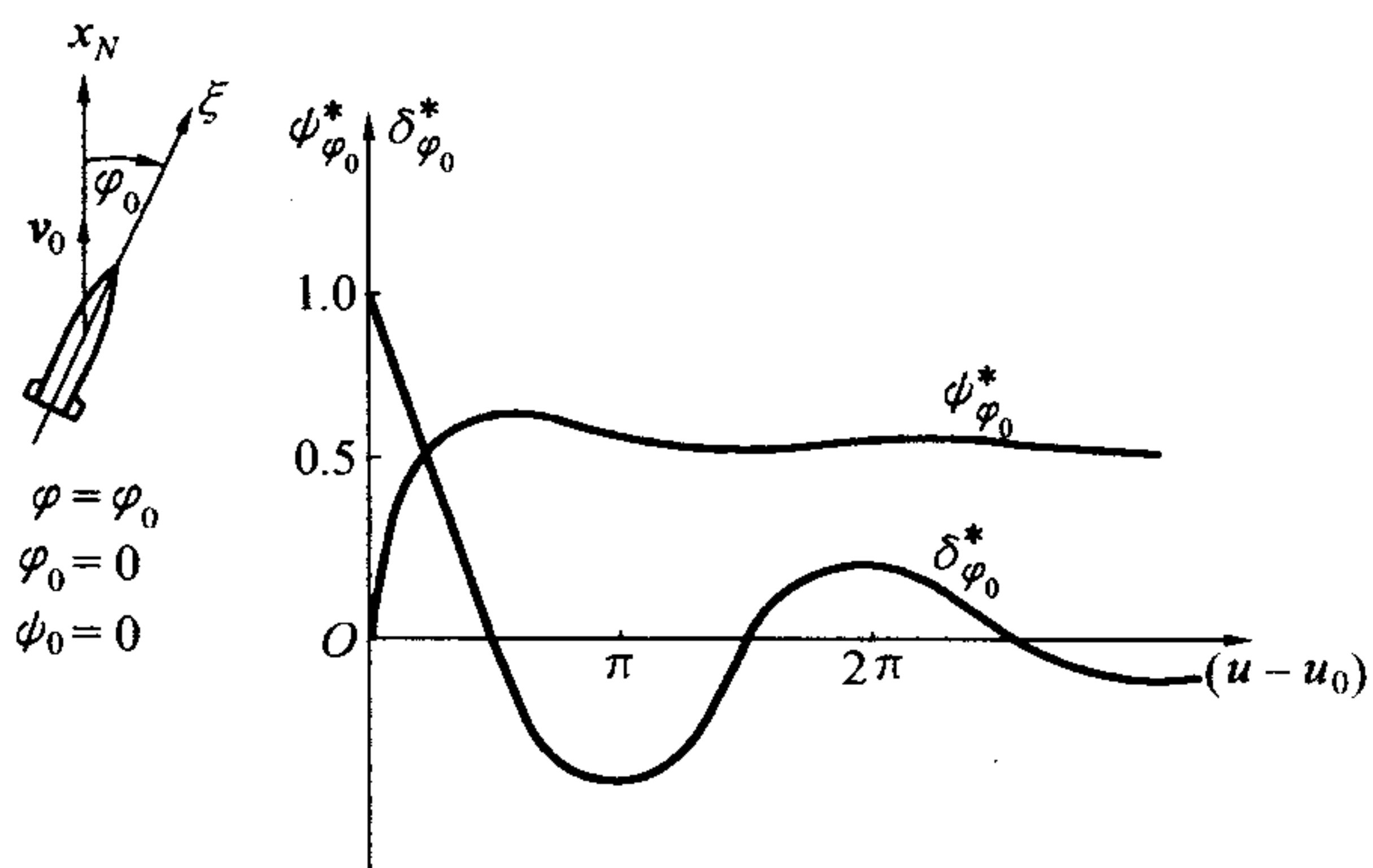


图 7.12  $\delta_{\varphi_0}^*$  和  $\psi_{\varphi_0}^*$  曲线





现以  $\delta_{\varphi_0}^*$  和  $\psi_{\varphi_0}^*$  为例进行分析。由图 7.10 和式(7.53) 知,攻角为一衰减的正弦函数,就是说,弹轴相对速度矢量的摆动是衰减的正弦摆动。这个摆动过程和单摆在重力作用下的摆动有些相似,如图 7.13 所示。为了定性地说摆动物理过程,暂且不考虑速度方向的变化。当火箭受到起始摆动角速度  $\dot{\varphi}_0$  作用时,在惯性作用下,弹轴将摆动而产生攻角。攻角出现后,伴随着稳定力矩  $M_z$  而使摆动减速。经过一定时间后,摆动角速度衰减为零[图 7.13(c)],此时攻角达最大值。在稳定力矩作用下,弹轴又往回摆动,使攻角减小[图 7.13(d)],当攻角减小到零时[图 7.13(e)],由于弹轴具有一定的角速度,故在惯性作用下,将继续摆动,因而攻角将出现负值。此时又出现新的  $M_z$  使弹轴摆动减速,并向回摆动。如此循环,往复不止。

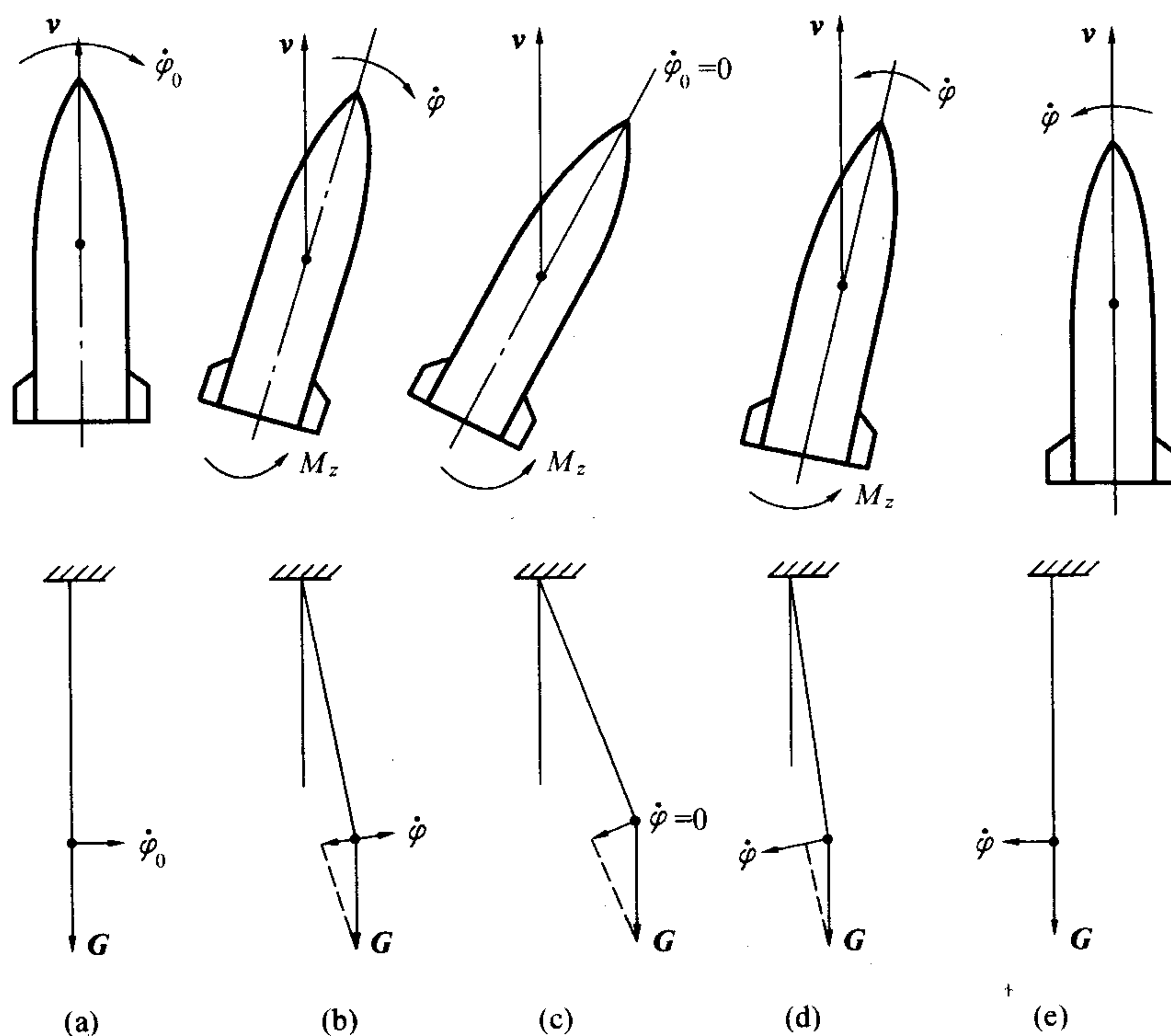


图 7.13 弹轴摆动过程与单摆相似

弹轴摆幅逐渐减小的原因,主要是由于主动段内速度不断增大的缘故。由于稳定力矩随速度增大而增大,将越来越有效地克服弹轴的惯性,因而使攻角幅值越来越小。随  $v$  的增大,摆动的摆幅和时间周期都将逐渐减小。但从  $\delta_{\varphi_0}^*$  的表达式看出,弹轴摆动一个周期内,质心所经过的弹道弧长——即波长  $\lambda$  是不变的。因为  $\delta_{\varphi_0}^*$  变化一个周期,  $u$  的变化为  $2\pi$ , 故

$$\Delta u = k\lambda = 2\pi$$

则



$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (7.76)$$

波长  $\lambda$  是一个很重要的参量,它可通过飞行试验测出攻角曲线得到。由此便可反求出参数  $k$ ,从而得出稳定力矩系数  $m_z'$ 。按  $u = ks$ ,将式(7.76)代入,得

$$u = 2\pi \frac{s}{\lambda} \quad (7.77)$$

可见  $u$  意味着相对弧长,体现着摆动的相位。

偏角  $\psi_{\varphi_0}^* - (u - u_0)$  曲线在刚出炮口前半波长内增加很快,以后虽有些起伏,但变化就不大了。可以把偏角变化很快的一段弹道称为弹道临界段,其弹道弧长记为  $s_{KP} - s_0$ ,就  $\psi_{\varphi_0}^*$  而言,

$$s_{KP} - s_0 = \frac{\lambda}{2} \quad (7.78)$$

临界段是偏角  $\psi$  形成的主要区域,它反映了火箭弹在弹道初始段上抗干扰能力较弱。因此要增强抗干扰能力,以减小射弹散布,就须在临界段内采取措施。

引起偏角的根本原因是推力的法向分量,次要的力还有升力,这可从图 7.8 或图 7.9 看出。在临界段内(比如 M-13 火箭波长为 74 m,则  $\psi_{\varphi_0}^*$  的临界段为 37 m),火箭攻角较大,推力法向分量较大;又此时火箭速度不大,动量甚小,故而速度方向易于改变。此后随着攻角幅值的减小和火箭速度的增大,则速度方向就难以改变,偏角的变化也就不大了。

还有一点也是值得注意的,就是偏角的变化趋势取决于攻角:当  $\delta > 0$  时,  $\psi$  增大;  $\delta < 0$  时,  $\psi$  减小;  $\delta = 0$  时,  $\psi$  有极值。这个由图中体现出来的性质,也可以从式(7.37)①得到证明。从物理意义上也是比较清楚的,因为推力的法向分量与弹轴( $\xi$ )总处于速度矢量的同一侧。从图 7.8(或图 7.9)易见,当  $\delta$  为正时,推力法向分量指向上方(或右方)速度矢量  $\mathbf{v}$  向上(或向右)偏转,即  $\psi$  增加;反之,  $\delta$  为负时,推力法向分量指向下方(或左方),则  $\mathbf{v}$  向下(或向左)偏转,  $\psi$  将减小;当  $\delta = 0$  时,法向力为零,偏角也就暂时不变。

关于  $\varphi_0$  和  $\psi_0$  引起的攻角和偏角的性质,在许多方面都与上述相似,读者可自行分析,但它们也有自己的临界段,只在刚出炮口的四分之一波长的一段弹道上。

由于存在临界段这一概念,故计算偏角时,所取参量如  $A$ 、 $\rho$ 、 $m_z'$  等,都取临界段内平均值即可,在此段内一般属亚声速,故气动系数可取为常数。这也是前面对方程组进行简化的理论依据之一。

### 7.4.3 影响偏角的因素

由  $\dot{\varphi}_0$  引起的偏角为

$$\psi_{\dot{\varphi}_0} = \dot{\varphi}_0 \psi_{\dot{\varphi}_0}^*$$

而





$$\dot{\psi}_{\varphi_0}^* = C_3 \sqrt{\frac{\pi}{k \bar{a}}} R_{\dot{\varphi}_0}(u_0, u)$$

$\dot{\varphi}_0$  的理论计算问题目前还没有完全解决,暂时只好不管它。在此只分析一下影响特征函数  $\dot{\psi}_{\varphi_0}^*$  的因素。显然,对  $\dot{\psi}_{\varphi_0}^*$  有直接影响的因素有  $s_0$ 、 $k$ 、 $\bar{a}$ 、 $C_3$  等。为最终考察落点偏差量,这里将分析诸因素对主动段末  $K$  点之  $\dot{\psi}_{\varphi_0}^*(u_0, u_K)$  的影响

### 1. 有效滑轨长度 $s_0$ 对 $\dot{\psi}_{\varphi_0}^*(u_0, u_K)$ 的影响

$s_0$  是通过  $u_0$  来影响  $R_{\dot{\varphi}_0}(u_0, u_K)$  的。 $R_{\dot{\varphi}_0}$  随  $u_0$  增加而减小,见图 7.14 和图 7.15,且在  $u_0$  较小时,变化的斜率越大。当加速度  $\bar{a}$  一定时,有效滑轨长度  $s_0$  增加,意味着初速  $v_0$  的增加,使稳定力矩增加、攻角减小,因而减小了法向力;另外增加了初始动量,使抗干扰能力增强。这都对减小偏角有利。

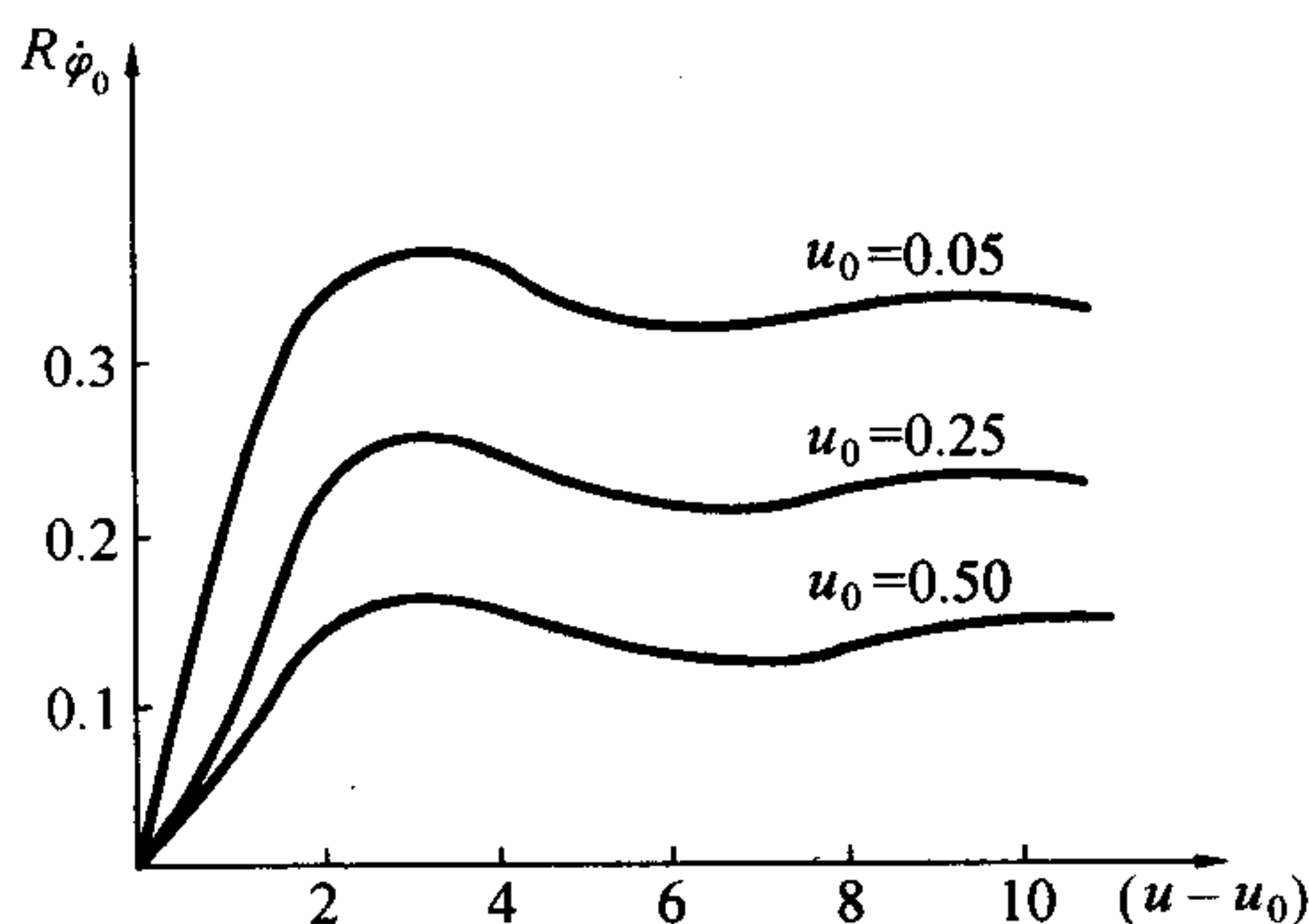


图 7.14  $R_{\dot{\varphi}_0} - (u, u_0)$  曲线

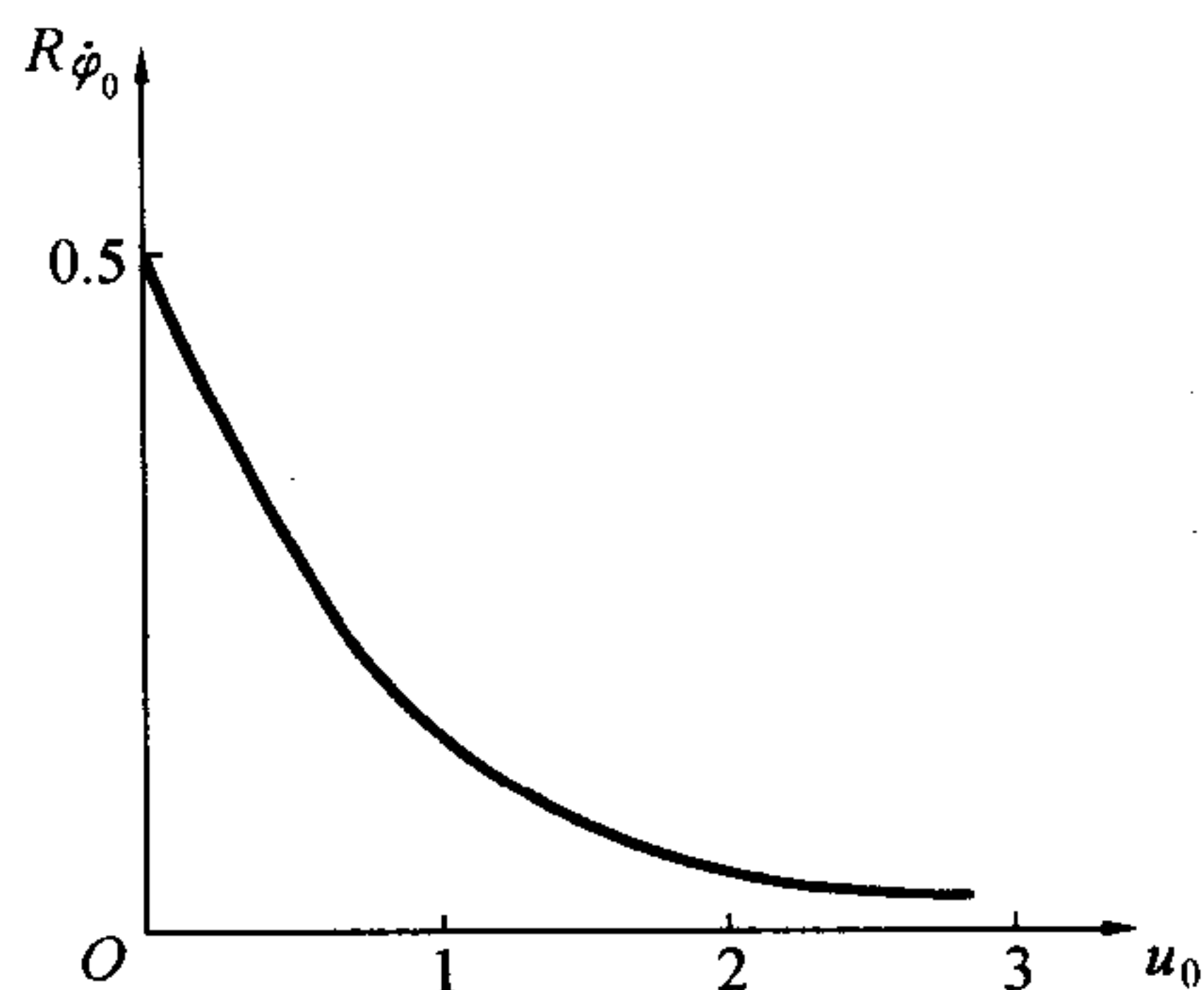


图 7.15  $R_{\dot{\varphi}_0} - u_0$  曲线

从图 7.15 可看出,当  $u_0$  到一定值后,  $R_{\dot{\varphi}_0}(u_0, u_K)$  随  $u_0$  变化就不大了,故选取  $s_0$  时要考虑这一情况。此外应考虑到若  $s_0$  增大,实际上是增长滑轨[见后面式(7.79)],那么可能使起始扰动增加,致使总的偏角加大。

### 2. $k$ 的影响

$k$  增加是使  $\dot{\psi}_{\varphi_0}^*$  减小的,  $k$  增加意味着稳定力矩  $M_z$  增大,使攻角幅值减小,法向力亦减小;同时  $k$  增加使波长减小,从而临界段内飞行时间短了。这两方面都使  $\dot{\psi}_{\varphi_0}^*$  减小。

### 3. $C_3$ 的影响

$\dot{\psi}_{\varphi_0}^*$  与  $C_3$  成正比关系,对  $v_0$  不大的野战火箭弹,可取  $\bar{a} = a_p$ 。而  $2b_r s_0 \ll 1$ ,故可取  $C_3 \approx 1$ 。当初速较大时,由于考虑阻力的影响,则  $\bar{a} < a_p$ ,使  $C_3 > 1$ 。这是因为阻力起减速作用,自然使偏角增加。对增程弹,还要考虑到升力的影响,则  $C_3$  将比 1 大得多。



#### 4. 推力加速度 $a_p$ 的影响

对初速不大的野战火箭,可近似取  $a_p = \bar{a}$ 。在滑轨长度一定时,推力加速度  $a_p$  增加,初速  $v_0$  亦将增加,不能认为它们之间没有关系。若火箭弹在滑轨段的平均加速度为  $a_{p0}$ ,实际滑轨长记为  $s_{00}$ ,则

$$v_0^2 = 2a_{p0}s_{00}$$

有效滑轨长度(脚注“eff”省略)

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2\bar{a}} = \frac{v_0^2}{2a_p} = \frac{2a_{p0}s_{00}}{2a_p} = \frac{a_{p0}}{a_p}s_{00} \quad (7.79)$$

可见发动机提供的加速度  $a_p$  和  $a_{p0}$  正比例增加时,有效滑轨长度是不变的。故  $a_p$  对  $R_{\varphi_0}$  无影响。但  $a_p$  增加使  $\sqrt{\pi/(k\bar{a})}$  减小,从而  $\psi_{\varphi_0}^*$  减小。这是因为在  $\varphi_0$  一定时,较大的  $a_p$  将使临界段内速度加大,当然有利减小偏角。然而,对  $\varphi_0$  的初步分析认为,  $a_p$  增加可能使  $\varphi_0$  加大,因而  $a_p$  对总的  $\psi_{\varphi_0}^*$  的影响不大。

应该指出,推力加速度对炮射火箭(或增程弹)的  $\psi_{\varphi_0}^*$  有明显影响。因为此时  $v_0$  不随  $a_p$  变化,而  $a_p$  直接影响有效滑轨长度,其影响情况见第十二章的增程理论部分。

### 7.5 再论有效滑轨(定向器)长度

现在所研究的问题是火箭离轨后的摆动运动,这个运动的规律性已经由运动方程组所描述。求解运动方程组依赖于离轨条件,即初始条件以及初速  $v_0$  和对尔后飞行速度  $v$  起决定性作用的推力加速度  $a_p$ 。显然,主动段内的运动规律与离轨前的运动,即滑轨段内的运动状态并无依赖关系。定向器的主要作用,一是赋予射向,二是提供初速  $v_0$ 。至于滑轨实际长度,它对主动段内的运动状态是没有影响的。如果说有影响的话,它只不过影响  $v_0$  和起始扰动的大小,但这是间接的。在研究主动段内摆动运动时,尤其研究反映主动段内摆动运动特性时,只要考虑特征函数就行了,这些特征函数所依赖的初始条件都是单位起始扰动。就是说,如果想像有一火箭弹,它用某一定向器发射,且在滑轨段内的加速度与离轨后的加速度完全相等,也等于真实火箭离轨后的加速度,而且离轨时所具初速  $v_0$  与真实火箭初速一样。尽管这两种定向器长度不一样,滑轨段的加速度不一样,但由于主动段起始条件一样,它们将必然具有同样的特征函数,即相同的主动段内的摆动运动规律性。如此看来,用想像的火箭滑轨长度来代替真实滑轨长度,不但不影响主动段内的运动规律性,而且给计算带来方便。

从上面分析知道,增加有效滑轨长度可以增强抗干扰能力并减小偏角。对野战火箭弹,为了增加有效滑轨长度,根据式(7.79),如大幅度地加大滑轨段的推力加速度,那将是一个很有效的办法。

如图 7.16 所示,在滑轨段上的推力加速度  $a_{p0} > a_p$ ,那么有效滑轨长度  $s_0$  与真实滑轨长





度  $s_{00}$  之间满足下列关系

$$v_0^2 = 2a_{P0}s_{00} = 2a_P s_0 \quad (7.80)$$

此式不但表明有效滑轨长度是真实滑轨长的  $a_{P0}/a_P$  倍,而且表明有效滑轨比真实滑轨增加的长度  $\Delta s_0$  为  $(a_{P0}/a_P - 1)s_{00}$ ,这个长度满足图 7.16 中两个带斜线部分面积相等的关系。由此可见,引入有效滑轨长度以后,计算弹道弧长的原点已不是火箭弹起点  $o$  (火箭启动时的质心位置),而是将原点移动到了  $o_1$  的位置,它距  $o$  的长度为  $\Delta s_0$ 。增加滑轨段推力加速度的方法,可考虑加助推发动机,或采用燃速不同的混合装药。

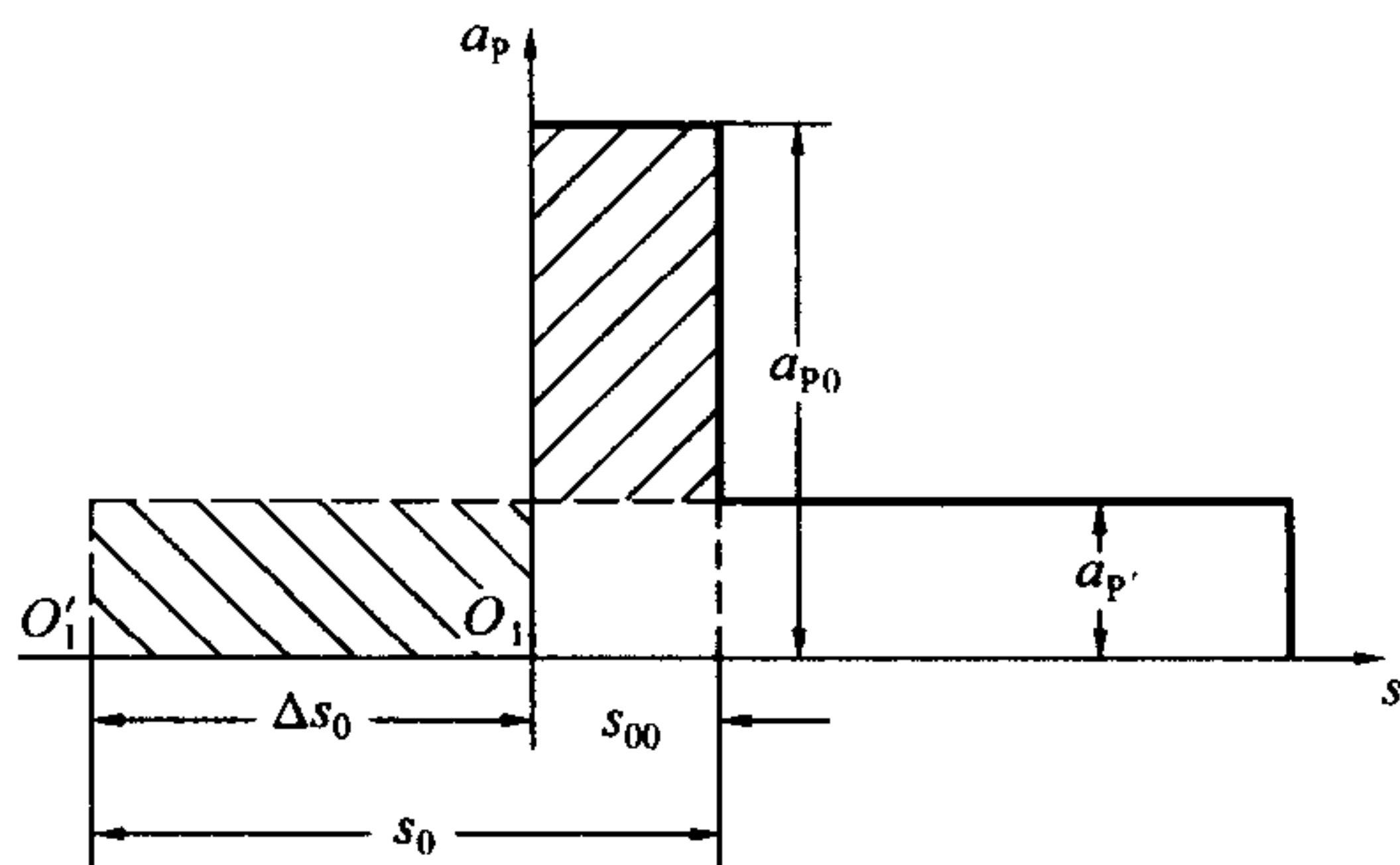


图 7.16 有效滑轨长度的确定(图例)

把有效滑轨长度概念应用到火箭增程弹上,若发动机点火时的速度和加速度分别为  $v_H$  和  $a_P$ ,则有效滑轨长度为

$$s_0 = \frac{v_H^2}{2a_P} \quad (7.81)$$

设  $v_H = 200 \text{ m/s}$ ,  $a_P = 400 \text{ m/s}$ ,则  $s_0$  可达 50 m 之多。如再减小  $a_P$  之值,则  $s_0$  可相当大。

## 7.6 计算散布的方法及散布与射程的关系

如果测得起始扰动  $\dot{\varphi}_0$  的中间误差  $B_{\dot{\varphi}_0}$ ,那么主动段末的偏角中间误差为

$$B(\psi_{\varphi_0}) = B_{\dot{\varphi}_0} \psi_{\varphi_0}^*(u_0, u_K) \quad (7.82)$$

对其余两个起始扰动量  $\varphi_0$  和  $\psi_0$  可用类似公式计算。

由于在高低和方向上都有其  $B_{\dot{\varphi}_0}$  之值,那么就造成落点的距离散布和方向散布。

### 7.6.1 距离散布

在铅垂面内出现偏角  $\psi_K$  时,就是  $K$  点的切线倾角  $\theta_K$  产生了偏角  $\Delta\theta_K = \psi_K$ ,此偏差便在被动段产生射程偏差为

$$\Delta X = \frac{\partial X}{\partial \theta_K} \Delta\theta_K$$

地面火炮已有射程对射角的修正系数  $Q_{\theta_0}(c, v_0, \theta_0)$ ,它表示射角变化 1 分时所引起的射程变化量,现已编成表,列于《地炮外弹道表》第二部分。对火箭,可近似引用此系数,取

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_K} \approx Q_{\theta_0}(c_K^*, v_K, \theta_K), \quad c_K^* = c_K H(\gamma_K)$$



于是

$$\Delta X = Q_{\theta_0} \phi_K \quad (7.83)$$

则距离散布为

$$B_X = |Q_{\theta_0}| B(\phi_K) \quad (7.84)$$

式中,  $B(\phi_K)$  以分为单位。

### 7.6.2 方向散布

图 7.17 所示  $v_K$  的方向偏离射击面的角偏差为  $\phi_K$ , 设被动段的水平距离为  $X_b$  (可近似以全射程  $X$  代替), 那么落点的侧向偏差 (即方向偏差)  $Z$  满足下式

$$\frac{Z}{X} = \tan \phi_{K1} \approx \phi_{K1}$$

式中  $\phi_{K1}$  是  $\phi_K$  在水平面上的投影值。由几何关系可知

$$\begin{aligned} \tan \phi_{K1} &= \frac{M_1 N_1}{M_1 K} = \frac{M_1 N_1}{MK \cos \theta_K} = \\ &= \frac{MN}{MK \cos \theta_K} = \frac{\tan \phi_K}{\cos \theta_K} \end{aligned}$$

因  $\phi_K$  和  $\phi_{K1}$  均很小, 故得

$$\frac{Z}{X} = \frac{\phi_K}{\cos \theta_K} \quad (7.85)$$

则方向散布  $B_Z$  与射程  $X$  的比值为

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\phi_K)}{\cos \theta_K} \quad (7.86)$$

### 7.6.3 散布与射程的关系

在火箭设计中, 散布指标通常是指  $B_X$ 、 $B_Z$  与射程  $X$  的比值, 叫做距离相对中间误差和方向相对中间误差, 记为

$$\begin{cases} \gamma_X = \frac{B_X}{X} \\ \gamma_Z = \frac{B_Z}{X} \end{cases} \quad (7.87)$$

由式 (7.86) 知  $B_Z = B(\phi_K) X / \cos \theta_K$ , 且  $B(\phi_K)$  一般与射程无关, 故  $B_Z$  随射程增加而增加。至于  $B_X$ ,  $B(\phi_K)$  与射程无关, 但  $\theta_0 < \theta_{0X \max}$  时,  $|Q_{\theta_0}|$  随射程增加而减小, 所以由偏角散

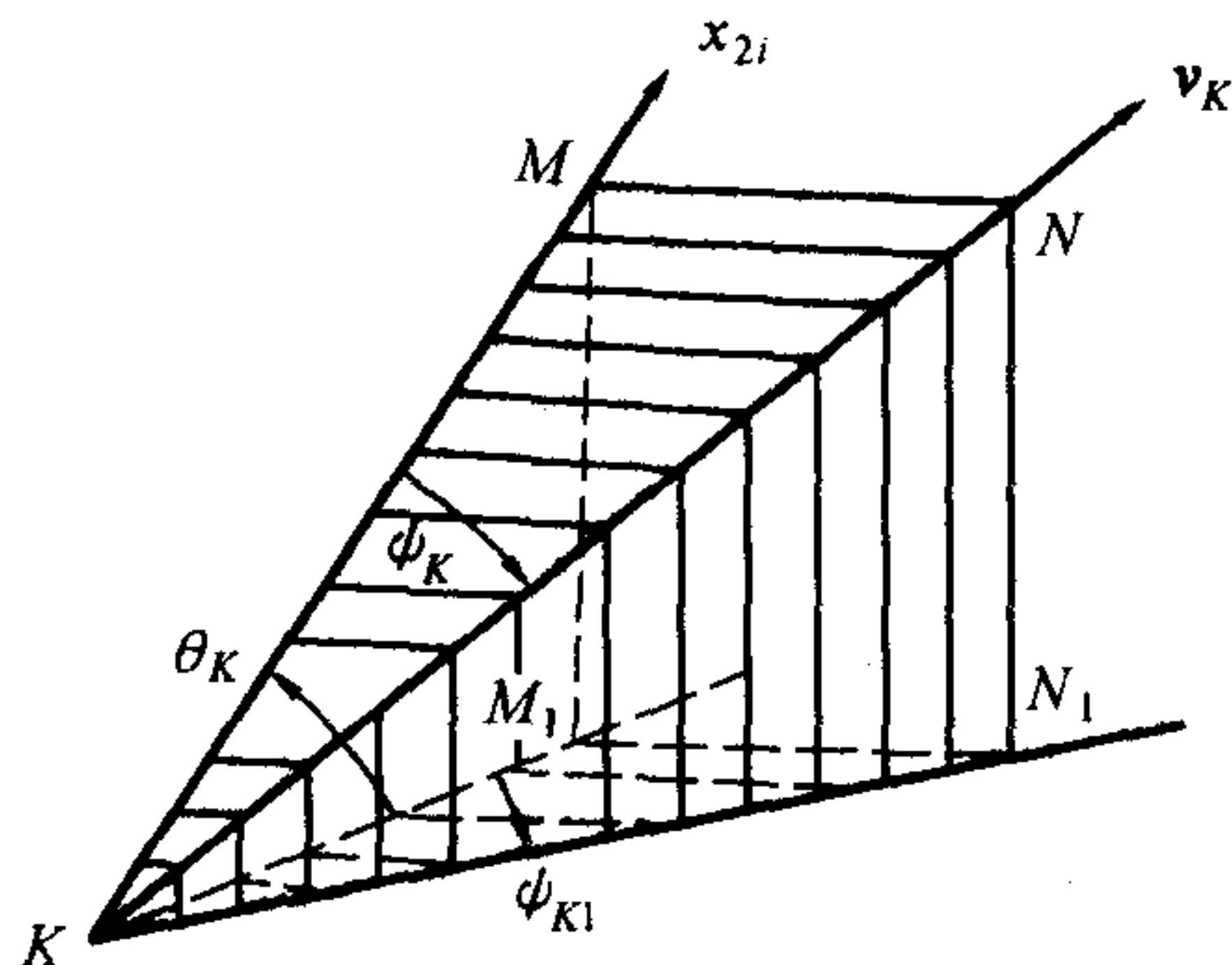


图 7.17  $\phi_K$  与  $\phi_{K1}$  之间的几何关系





布引起的射程散布随射程增加而减小。形成  $B_X$  的原因比  $B_Z$  要复杂,射程  $X_b$  依赖于  $c_K, v_K, \theta_K, \gamma_K$ , 故全射程

$$X = x_K + X_b = X(c_K, v_K, \theta_K, \gamma_K, x_K)$$

则

$$\Delta X \approx \frac{\partial X}{\partial c_K} \Delta c_K + \frac{\partial X}{\partial v_K} \Delta v_K + \frac{\partial X}{\partial \theta_K} \Delta \theta_K$$

若认为  $\Delta c_K, \Delta v_K, \Delta \theta_K$  是相互独立的随机变量,它们的中间误差是  $B_{c_K}, B_{v_K}, B_{\theta_K}$ , 则射程中间误差为

$$B_X = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial c_K} B_{c_K}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial v_K} B_{v_K}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \theta_K} B_{\theta_K}\right)^2} \quad (7.88)$$

显然,只有当速度和弹道系数的变化很小时,  $B_X$  随射程增加而减小的结论才是正确的。距离散布和方向散布所构成的椭圆散布随射程变化的示意图见图 7.18。  $B_X$  和  $B_Z$  为轴的散布椭圆,在小射程时  $B_X > B_Z$ ; 在最大射程附近,  $B_X < B_Z$ ; 在某中间射程时,有  $B_X = B_Z$ 。由于在小射角时  $|Q_{\theta_0}|$  很大,为减小小射程时的距离散布,人们有时用阻力环加大阻力,使用较大的射角射击,以减小  $|Q_{\theta_0}|$  值。

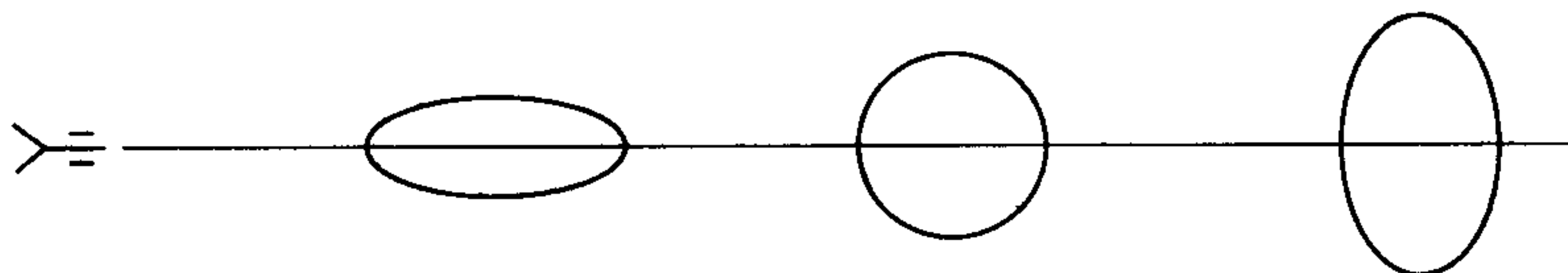


图 7.18 散布椭圆示意图

如果  $B_{v_K}$  和  $B_{c_K}$  不能忽视,尤其  $B_{c_K}$  往往随射程而变,有的随射程增加而增加,这样,  $B_X$  就不一定随射程增加而减小。但对多数情况而言,在最大射程时,一般  $B_Z > B_X$ 。

**例题 7.1** 计算某火箭弹起始扰动引起的落点散布。已知:  $v_0 = 66.33 \text{ m/s}$ ,  $v_K = 350 \text{ m/s}$ ,  $c_K = 0.75$ ,  $\theta_K = 45^\circ$ ;  $d = 0.132 \text{ m}$ ,  $l = 1.46 \text{ m}$ ,  $\bar{A} = 4.90 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $\bar{a}_P = 440 \text{ m/s}^2$ ,  $\bar{m} = 39.20 \text{ kg}$ ;  $C_x = 0.31$ ,  $C'_y = 9.4 \text{ l/rad}$ ,  $m'_z = 2.86 \text{ l/rad}$ ,  $\rho = 1.20574 \text{ kg/m}^3$ ;  $B_{\dot{\varphi}_0} = 0.10 \text{ rad/s}$ ,  $B_{\varphi_0} = 4.0 \times 10^{-4} \text{ rad}$ ,  $B_{\psi_0} = 7.0 \times 10^{-4} \text{ rad}$ 。

解  $S = \frac{1}{4} \pi d^2 = 0.01368,$

$$b_x = \frac{\rho S C_x}{2m} = 0.6522 \times 10^{-4},$$

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 5.00,$$

$$C_3 = \frac{a_P}{a} + 2b_y s_0 \approx 1 + 2b_y s_0 = 1.02,$$

$$u_0 = k s_0 = 0.419,$$

$$k = \sqrt{\frac{\rho S l m'_z}{2A}} = 0.08383,$$

$$b_y = \frac{\rho S C'_y}{2m} = 0.20 \times 10^{-2},$$

$$s_K = \frac{v_K^2}{2a} = 139.2,$$

$$u_K = k s_K = 11.67$$



由  $(u_0, u_K)$  查附表 14 得

$$B_R = 0.353\ 4, B_I = 0.270\ 9$$

于是

$$\psi_{\varphi_0 K}^* = \frac{C_3 B_I(u_0, u_K)}{kv_0} = \frac{1.020 \times 0.270\ 9}{0.083\ 83 \times 66.33} = 49.69 \times 10^{-3}$$

$$\psi_{\varphi_0}^* = C_3 B_R(u_0, u_K) = 1.020 \times 0.353\ 4 = 0.360\ 5$$

$$\psi_{\psi_0 K}^* = 1 - \psi_{\varphi_0 K}^* = 0.639\ 5$$

$$B(\psi_{\varphi_0 K}) = B_{\varphi_0} \psi_{\varphi_0 K}^* = 49.69 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$B(\psi_{\varphi_0 K}) = B_{\varphi_0} \psi_{\varphi_0 K}^* = 1.44 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$B(\psi_{\psi_0 K}) = B_{\psi_0} \psi_{\psi_0 K}^* = 4.48 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

起始扰动引起的总偏角中间误差为

$$B(\psi_K) = \sqrt{B^2(\psi_{\varphi_0 K}) + B^2(\psi_{\varphi_0 K}) + B^2(\psi_{\psi_0 K})} = 49.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

由  $c_K, v_K, \theta_K$  查《地炮外弹道表》第二部分表 18 得

$$Q_{\theta_0} = -0.17 \text{ m/l'}$$

落点的距离散布为

$$B_X = |Q_{\theta_0}| B(\psi_K) = 0.17 \times 49.91 \times 10^{-4} \times \frac{180}{\pi} \times 60 = 2.9 \text{ m}$$

落点的方向相对误差为

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\psi_K)}{\cos \theta_K} = \frac{49.91 \times 10^{-4}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{142}$$

## 7.7 推力线偏心的影响

### 7.7.1 攻角和偏角公式推导

本来,对微分方程(7.43) 在零初始条件下求解,就可以得出推力偏心矩引起的攻角  $\delta_L$ ,然后将  $\delta_L$  代入式(7.45)(取  $\psi_0 = 0$ ),便得到偏角  $\psi_L$ 。但这一过程的数学运算较麻烦,下面将介绍另一种方法,即所谓“格林函数法”。这种方法的实质是,把外界干扰的连续作用,看成是某种性质的起始扰动对主动段各个部位的作用。这样,求解非齐次解的问题,就变成初始值的齐次解来处理了。

如图 7.19 所示,假定有一不变的推力偏心矩  $M_P = F_P L$  作用于火箭。因为  $M_P$  对弹道每一弧段的作用性质都是一样的,故不妨先集中力量考察一个小的微分弧段  $ds_n$  内的作用情况。把





$M_P$  在  $ds_n$  内作用的情况及其对尔后火箭运动的影响弄清楚了, 就可以推广到其他弧段, 然后将所有弧段的结果叠加就是了。现所取弧段  $ds_n$  在  $s = s_n$  附近, 火箭飞达此点的时间是  $t_n$ , 速度是  $v_n$ , 火箭在  $ds_n$  弧段内经历的时间为

$$dt_n = \frac{ds_n}{v_n} \quad (7.89)$$

由动量矩定理, 可知  $M_P$  单独作用在  $dt_n$  时间产生的微小摆动角速度  $d\dot{\varphi}_n$  满足下式

$$A \frac{d\dot{\varphi}_n}{dt_n} = M_P$$

则

$$d\dot{\varphi}_n = \frac{a_P L}{R_A^2} dt_n \quad (7.90)$$

在 7.4 节已经推导出在  $s = s_0$  处的起始扰动  $\dot{\varphi}_0$  在弧长为  $s$  处的攻角和偏角为

$$\delta_{\dot{\varphi}_0} = \dot{\varphi}_0 \delta_{\dot{\varphi}_0}^*(u_0, u)$$

$$\psi_{\dot{\varphi}_0} = \dot{\varphi}_0 \psi_{\dot{\varphi}_0}^*(u_0, u)$$

但现在的  $d\dot{\varphi}_n$  不是作用在  $s = s_0$  处, 而是作用在  $s = s_n$  处, 因此引用上述公式时, 特征函数中的  $u_0$  应改为  $u_n = ks_n$ 。这样, 由微小的  $d\dot{\varphi}_n$  在弧长为  $s$  ( $s \geq s_n$ ) 处引起的微小攻角  $d\delta_L$  和偏角  $d\psi_L$  分别为

$$d\delta_L = d\dot{\varphi}_n \delta_{\dot{\varphi}_0}^*(u_n, u)$$

$$d\psi_L = d\dot{\varphi}_n \psi_{\dot{\varphi}_0}^*(u_n, u)$$

将  $M_P$  在各个弧段上的扰动所引起的在弧长为  $s$  处的微小攻角和偏角叠加起来, 即得总的攻角  $\delta_L$  和偏角  $\psi_L$  [将式(7.90)代入]

$$\delta_L = \int_{t_0}^t \frac{a_P L}{R_A^2} \delta_{\dot{\varphi}_0}^*(u_n, u) dt_n \quad (7.91)$$

$$\psi_L = \int_{t_0}^t \frac{a_P L}{R_A^2} \psi_{\dot{\varphi}_0}^*(u_n, u) dt_n \quad (7.92)$$

在具体积分这两个式子之前, 特讲一下格林函数法的意思。在上两式中的格林函数, 即被积函数是两者之积: 一是方程组(7.31) 第二个方程的非齐次项; 二是特征函数, 该特征函数是由微分方程的性质决定的。所论方程是线性方程, 并且最高导数是  $\ddot{\varphi}$  (它的系数必须是 1), 故所取的特征函数, 便是此  $\ddot{\varphi}$  降一阶初始条件  $\dot{\varphi}_0$  所对应的特征函数。至于积分自变量, 则和微分方程自

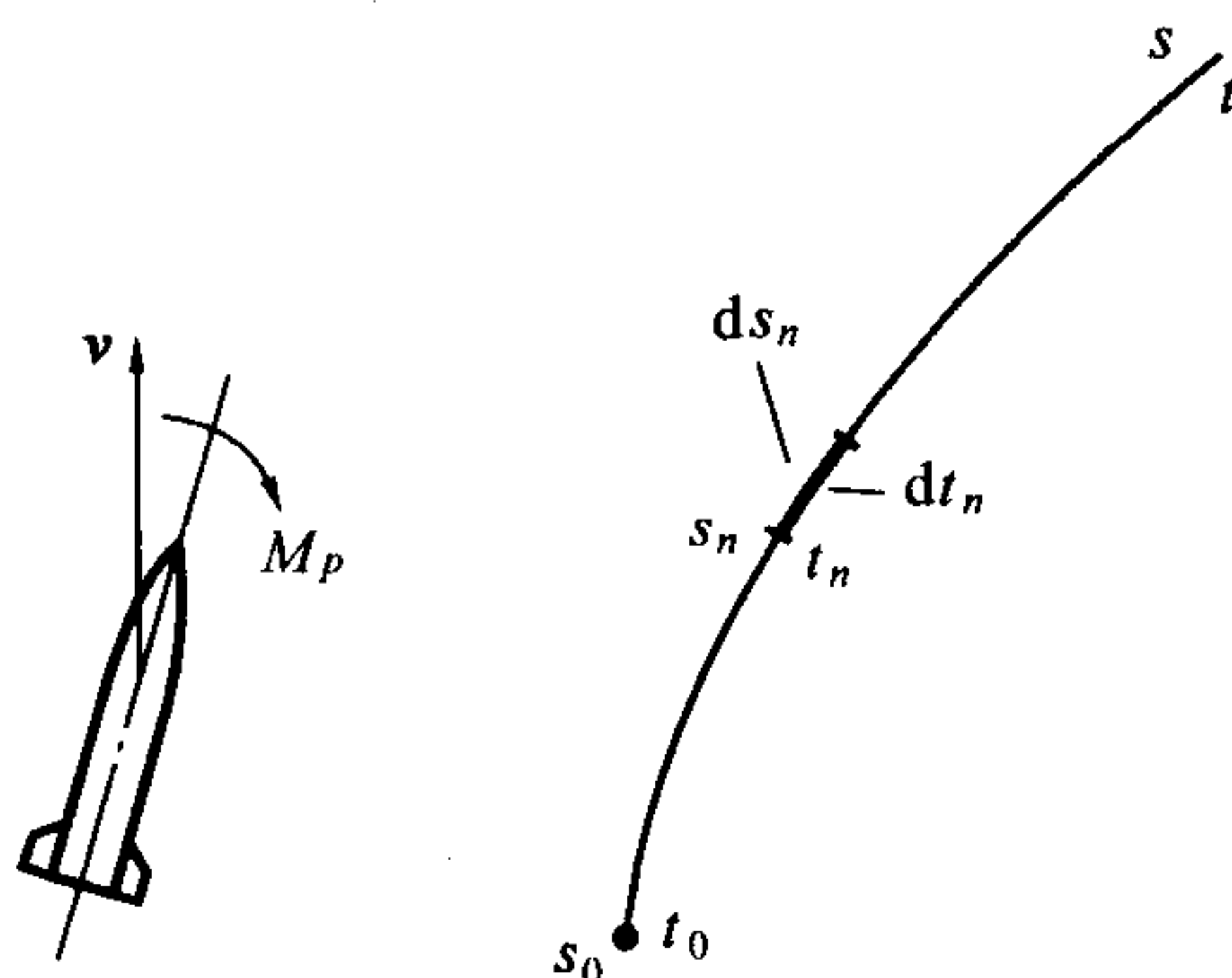


图 7.19 微分弧段



变量一致。这个情况具有普遍性,可推广到一般。可以推断,若是式(7.31)第一个方程(使  $\dot{\psi}$  的系数为 1) 有非齐次项的话,那么所选特征函数便是关于  $\psi_0$  的特征函数。

将式(7.89)、(7.53)、(7.67) 一并代入式(7.91) 和式(7.92), 并注意到式(7.62), 有  $v = \sqrt{2as}$  及  $v_n = \sqrt{2as_n}$ , 则可得

$$\delta_L = \frac{L}{2kR_A^2} \left( \frac{a_P}{a} \right) \int_{u_0}^u e^{-b(u-u_n)} \frac{\sin(u-u_n)}{\sqrt{uu_n}} du_n \quad (7.93)$$

$$\psi_L = C_3 \frac{L}{kR_A^2} \left( \frac{a_P}{a} \right) \int_{u_0}^u \frac{B_I(u_n, u)}{2u_n} du_n \quad (7.94)$$

记函数

$$R_L(u_0, u) = \int_{u_0}^u \frac{B_I(u_n, u)}{2u_n} du_n \quad (7.95)$$

此函数已编成了以  $u_0$  和  $u$  为自变量的表格, 见附表 15。于是

$$\psi_L = \frac{C_3 L}{kR_A^2} \left( \frac{a_P}{a} \right) R_L(u_0, u) \quad (7.96)$$

其特征函数为

$$\psi_L^* = \frac{C_3}{kR_A^2} \left( \frac{a_P}{a} \right) R_L(u_0, u) \quad (7.97)$$

实际的推力线偏心是一个随机矢量, 其大小和方向都是随机的。测量表明, 若取过弹轴的某一确定方位(相对地面而言) 的平面, 它在该平面内的投影大致为正态分布, 设其中间误差为  $B_L$ , 则得角散布为

$$B(\psi_L) = B_L \psi_L^* \quad (7.98)$$

由于  $\delta_L$  不经常使用, 所以就没有编表。若使用时, 可利用现有的高等数学函数表计算。

### 7.7.2 攻角和偏角的特点

当  $L = 1$  时, 得  $\psi_L$  和  $\delta_L$  的特征函数  $\psi_L^*$  和  $\delta_L^*$ , 它们关于  $(u - u_0)$  的函数曲线绘于图 7.20 中。 $\delta_L^* - (u - u_0)$  曲线不以横轴为对称轴, 而是以图中点划线为对称位置, 幅值逐渐衰减的波动曲线。曲线的平均位置即平均攻角, 称之为平衡攻角。平衡攻角对应于总力矩为零的运动状态。正如理论力学振动问题中, 振动的平衡位置就是外界干扰力与弹簧力相等的那个位置一样, 现弹轴摆动的平衡位置, 对应于  $M_P = M_Z$ , 即得平衡攻角  $\bar{\delta}_L$  满足

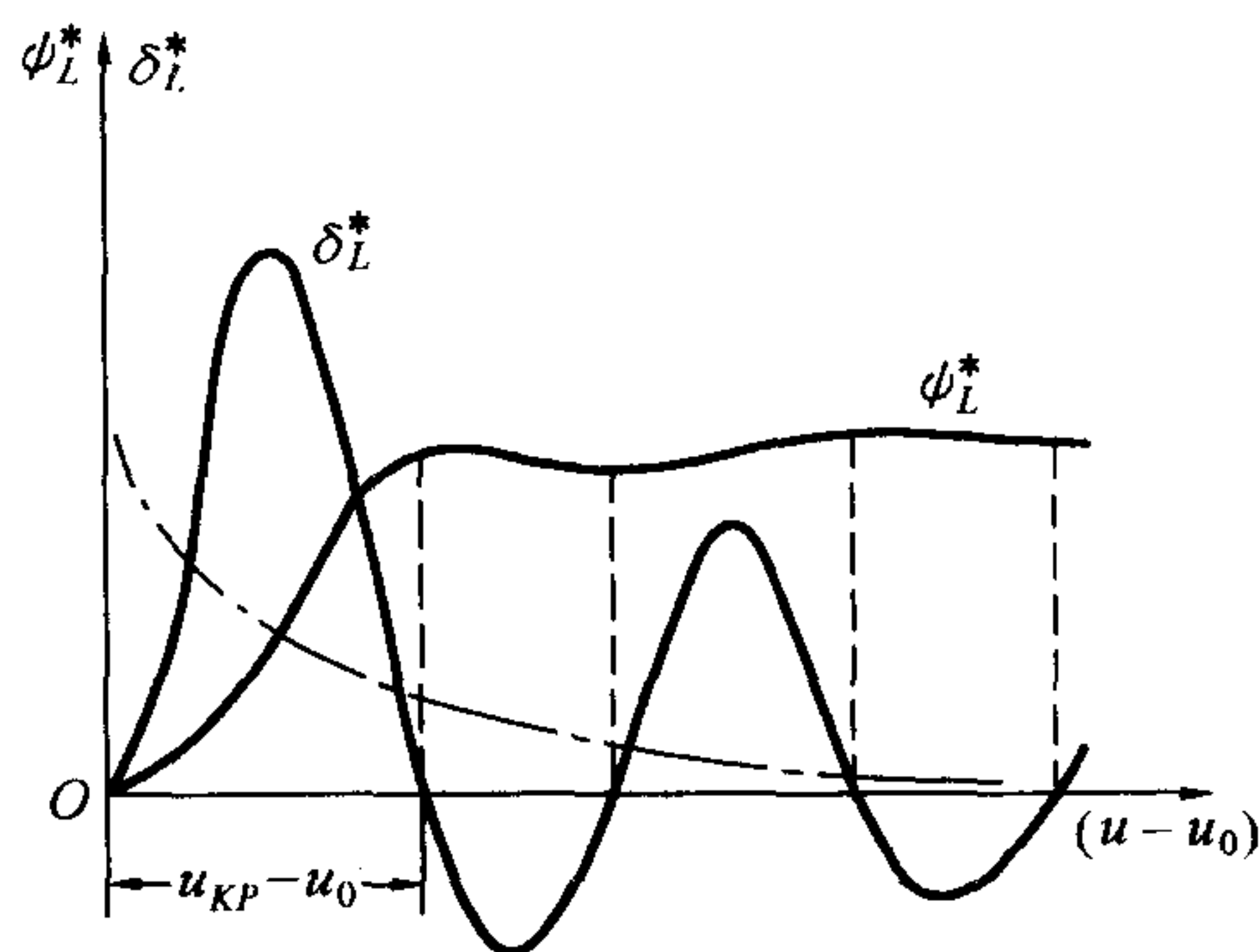


图 7.20  $\delta_L^*$  和  $\psi_L^*$  曲线





关系式为

$$F_P L = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m' \bar{\delta}_L$$

则

$$\bar{\delta}_L = \frac{a_P L}{R_A^2 k^2 v^2} = \frac{L \left( \frac{a_P}{a} \right)}{2 R_A^2 k u} \quad (7.99)$$

可见  $\bar{\delta}_L$  与  $u$  成反比关系,它在炮口之值最大。为减小  $\bar{\delta}_L$ ,从而减小攻角  $\delta_L$  幅值,应加大有效滑轨长度。

$\phi_L^*$  和  $\delta_L^*$  的关系,同前述  $\phi_{\varphi_0}^*$  和  $\delta_{\varphi_0}^*$  的关系相似。 $\phi_L^*$  也有一个重要性质,即在开始一段弹道上增加很快,当  $\phi_L^*$  达到第一个极大值后,曲线虽有起伏,并稍有增大,但变化已很小了。可见  $\phi_L^*$  也存在临界段,但比  $\phi_{\varphi_0}^*$  的临界段稍长。这是由于攻角曲线已对横轴不对称,从原点到攻角曲线与横轴第一交点之间必然超过半个周期,但小于一个周期,故临界段长度在半个到 1 个波长之间,大致为

$$s_{KP} - s_0 = (0.7 \sim 0.8) \lambda \quad (7.100)$$

实际上,  $s_{KP}$  可由式(7.93) 根据  $\delta_L^* = 0$  解出,显然,  $u_{KP}$  是  $u_0$  的函数,因而  $R_L(u_0, u_{KP})$  也是  $u_0$  的函数,在

$$0.06 \leq u_0 \leq 1.0$$

的范围内,可将  $R_L(u_0, u_{KP})$  用下列简单函数表示

$$R_L(u_0, u_{KP}) = \frac{0.195}{u_0 + 0.322} \quad (7.101)$$

用临界段末的偏角值代替主动段末的偏角值,不会产生明显误差。

由于  $\phi_L^*$  主要在临界段内形成,为减小  $\phi_L$ ,必须在临界段内采取相应措施。如反坦克火箭利用薄肉厚火药,燃烧时间很短,以使其主动段远小于临界段,  $\phi_L$  可有效地减小。

不旋转火箭弹的  $M_P$  总是作用在一个方位上,产生的总偏角  $\phi_{LK}$  就较大。为了改变这种情况,便赋予火箭绕其几何纵轴低速旋转,以使  $M_P$  在各个方位上都有作用,从而抵消一部分偏角,达到减小  $\phi_L$  的目的。这种措施也必须保证在临界段内有足够转速才能见效。

应该指出,临界段这个概念仅对有效滑轨长度不太大的野战火箭弹才有意义。当有效滑轨长度很大时(例如增程弹),偏角曲线在整个主动段都是增大的,临界段显现不出来,因而需要顾及整个主动段。

### 7.7.3 影响偏角的主要因素

影响偏角的因素由式(7.101) 和式(7.96) 看出,主要是  $k$ 、 $s_0$ 、 $L$  以及弹长。 $s_0$  和  $k$  增加时,  $\phi_L$  将减小。这是因为这两个因素增加,可使平衡攻角减小,法向力亦将减小,偏角当然减小。另



外在加速度一定时,  $s_0$  增加意味着初速加大, 使火箭抗干扰能力强, 亦有利减小偏角。某火箭的  $R_L - s_0$  曲线及  $\phi_L^* - k$  曲线, 分别绘于图 7.21 和图 7.22 中。

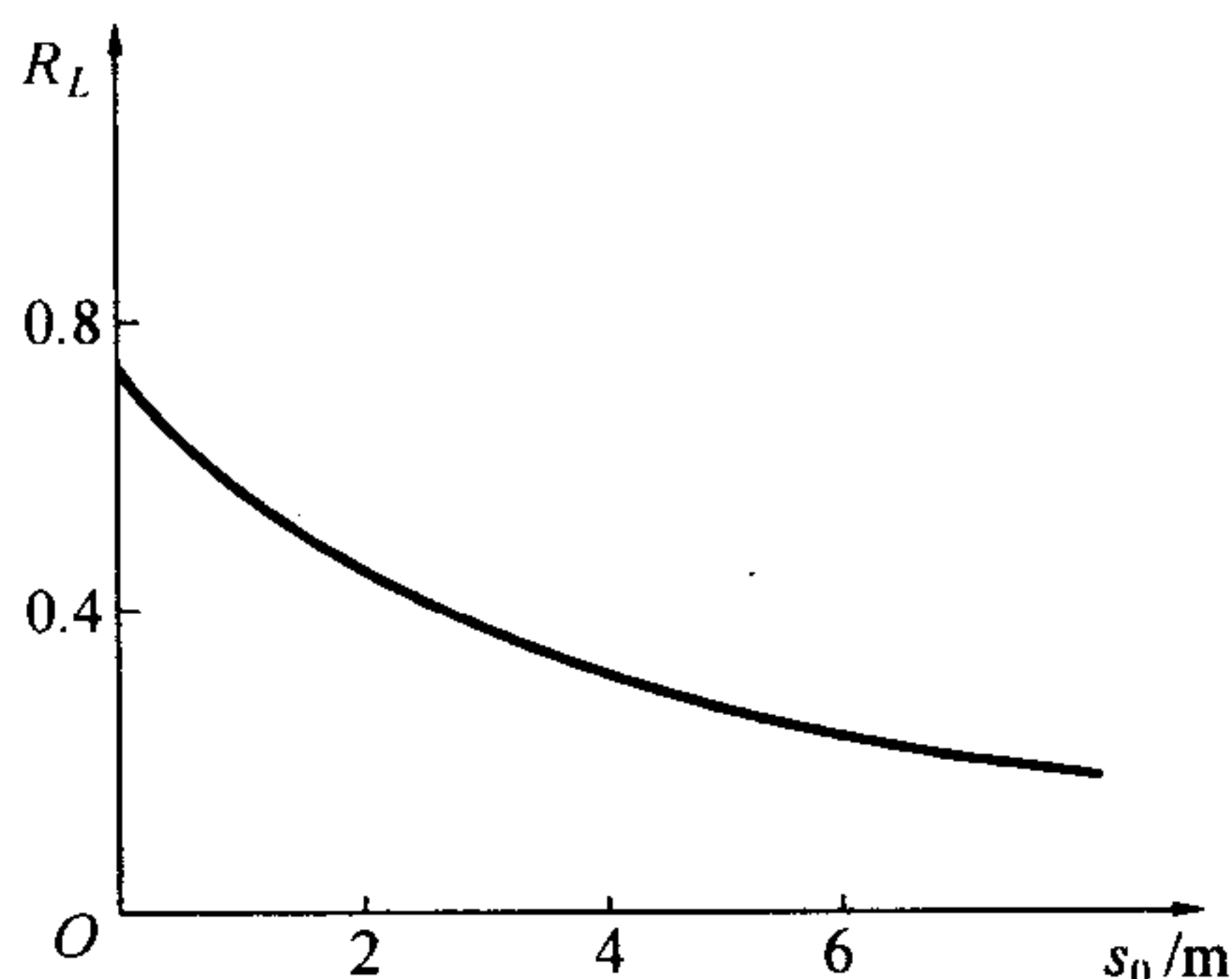


图 7.21 某火箭的  $R_L - s_0$  曲线

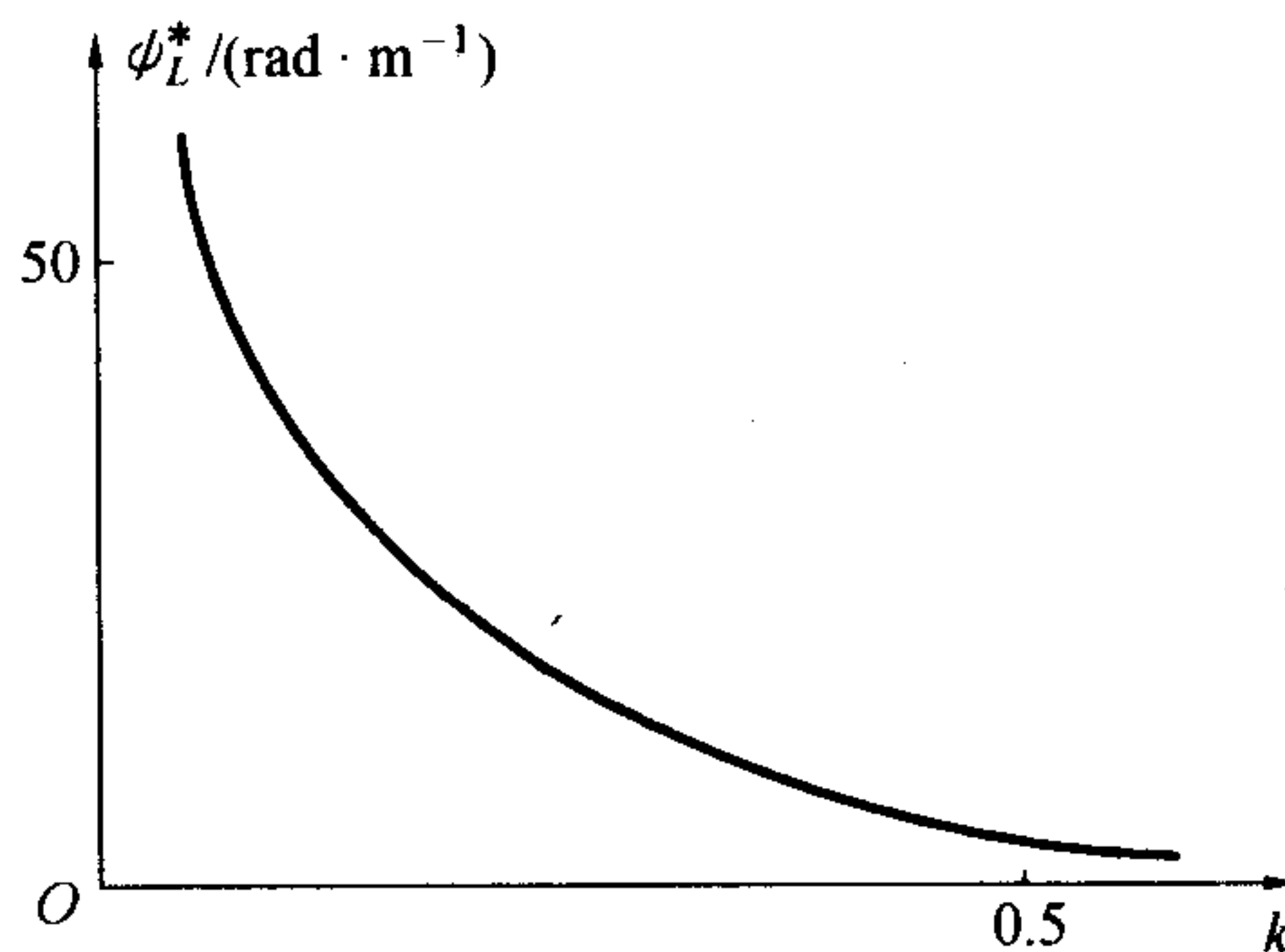


图 7.22 某火箭的  $\phi_L^* - k$  曲线

$B_L$  数量级, 依据一些老式野战火箭的初步统计, 大致如下

$$B_L = (1 \sim 1.5) \times 10^{-3} l_L \quad (7.102)$$

式中  $l_L$  是喷喉到火箭质心的距离。式(7.102)可作为数量级的参考, 但对具体火箭弹, 尤其对新的型号, 最好具体测量为宜。

弹长  $l$  对  $\phi_L$  的影响可作如下粗略分析。由于  $k = \sqrt{\rho S l m_z' / (2mR_A^2)}$  而  $R_A \propto l$  (“ $\propto$ ”表示大致为成正比关系),  $m \propto l$ , 故  $k \propto 1/l$ 。又假定  $L \propto l$ , 故  $L/(kR_A^2)$  与  $l$  近似无关。而  $u_0 = ks_0$ , 再由式(7.79)知  $u_0 \propto s_{00}/l$ , 可见当滑轨长随弹长成正比增加时, 则  $\phi_L$  与弹长无关。

推力加速度对  $\phi_L^*$  无影响。这是由于它与推力偏心矩及稳定力矩都是正比关系,  $a_p$  的改变不影响平均攻角。

**例题 7.2** 某火箭参数见例题 7.1, 并知  $B_L = 8.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 求推力偏心引起的方向散布。

**解** 由  $u_0 = 0.419$  及  $u_K = 11.67$  查附表 15 得

$$R_L = 0.273 \text{ 1}$$

$$B(\phi_L) = B_L \phi_L^* \approx B_L \frac{C_3}{kR_A^2} R_L = 8.0 \times 10^{-4} \times \frac{1.02 \times 0.273 \text{ 1}}{\frac{0.083 \text{ 83} \times 4.90}{39.20}} = 0.021 \text{ 3}$$

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\phi_K)}{\cos \theta_K} = \frac{0.021 \text{ 3}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{33}$$

## 7.8 风的影响

风对尾翼式火箭弹道主动段的影响比较明显, 应给予足够重视。本节内容对后面要介绍的





低速旋转火箭弹也是适用的。

### 7.8.1 风的区分

风是气团的空间运动。一般大气的水平运动明显地大于铅垂方向的运动,所以除了复杂地形(如山谷)之外,可不考虑铅垂风。风速不但随地点变化,而且即使同一地点它还随时间及高度变化。图 7.23 是某地风速于不同季节(春、夏、秋、冬)的平均分布。最大风速出现在对流层与平流层交界高度以下大约一千米地方,有时可观察到急气流,其最大风速甚至可达到 100 m/s 以上。

考虑平行水平面的风,以射击面为准,又区分为纵风和横风。图 7.24 所示坐标系  $o-xyz$  平行于地面坐标系,原点  $o$  取在质心。纵风  $w_x$  是平行射击平面的风,沿  $ox$  轴为正向;横风  $w_z$  是垂直射击平面的风,规定与  $oz$  轴方向一致为正。 $w_x$  又分解为平行于速度  $v$  的平行风  $w_{//}$  与垂直于  $v$  方向的风  $w_{x\perp}$ ,显然

$$w_{//} = w_x \cos \theta, \quad w_{x\perp} = w_x \sin \theta \quad (7.103)$$

在主动段内,  $\theta$  变化甚小,可近似取  $\theta \approx \theta_0$ 。

就对火箭运动影响而言,与  $v$  垂直的风  $w_z$  和  $w_{x\perp}$  都称为垂直风。它们对火箭运动的影响在本质上都一样,只研究其中之一就行了。

对尾翼式火箭来讲,  $w_z$  引起落点方向偏差,  $w_{x\perp}$  引起落点距离偏差。 $w_{//}$  主要影响  $v$  的大小,对  $v$  方向的影响是间接的,但影响都很小,近似计算时可略去。

### 7.8.2 垂直风对主动段影响的初步分析

如图 7.25 所示,当有一从左向右吹的风  $w_{\perp}$  时,火箭相对空气的相对速度不是  $v$  了,而是  $v_r$ ,  $v_r$  与  $v$  的关系为

$$v = v_r + w_{\perp} \quad (7.104)$$

即火箭质心速度是火箭相对于空气的相对速度与空气速度(牵连速度)之和。火箭所感受到的气流速度方向,正好与  $v_r$  相反,大小是相等的。

火箭刚一出炮口,相对速度方向便与弹轴不一致了,也就是说,气流方向与弹轴不一致,因而产生了一个空气动力矩  $M_z$ ,这个力矩在计算方法上与稳定力矩没有本质区别。但对理想弹

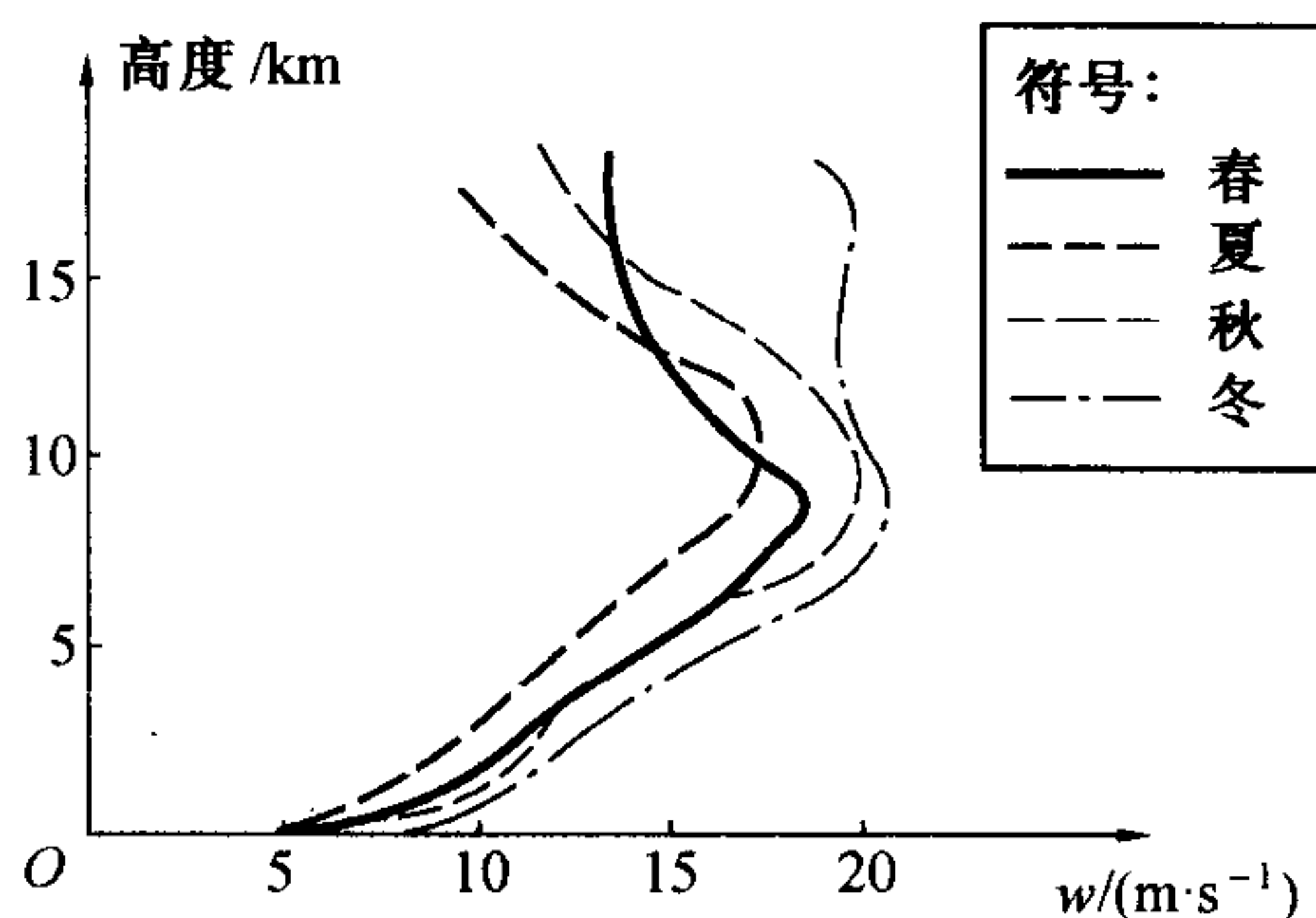


图 7.23 风速随高度的平均分布

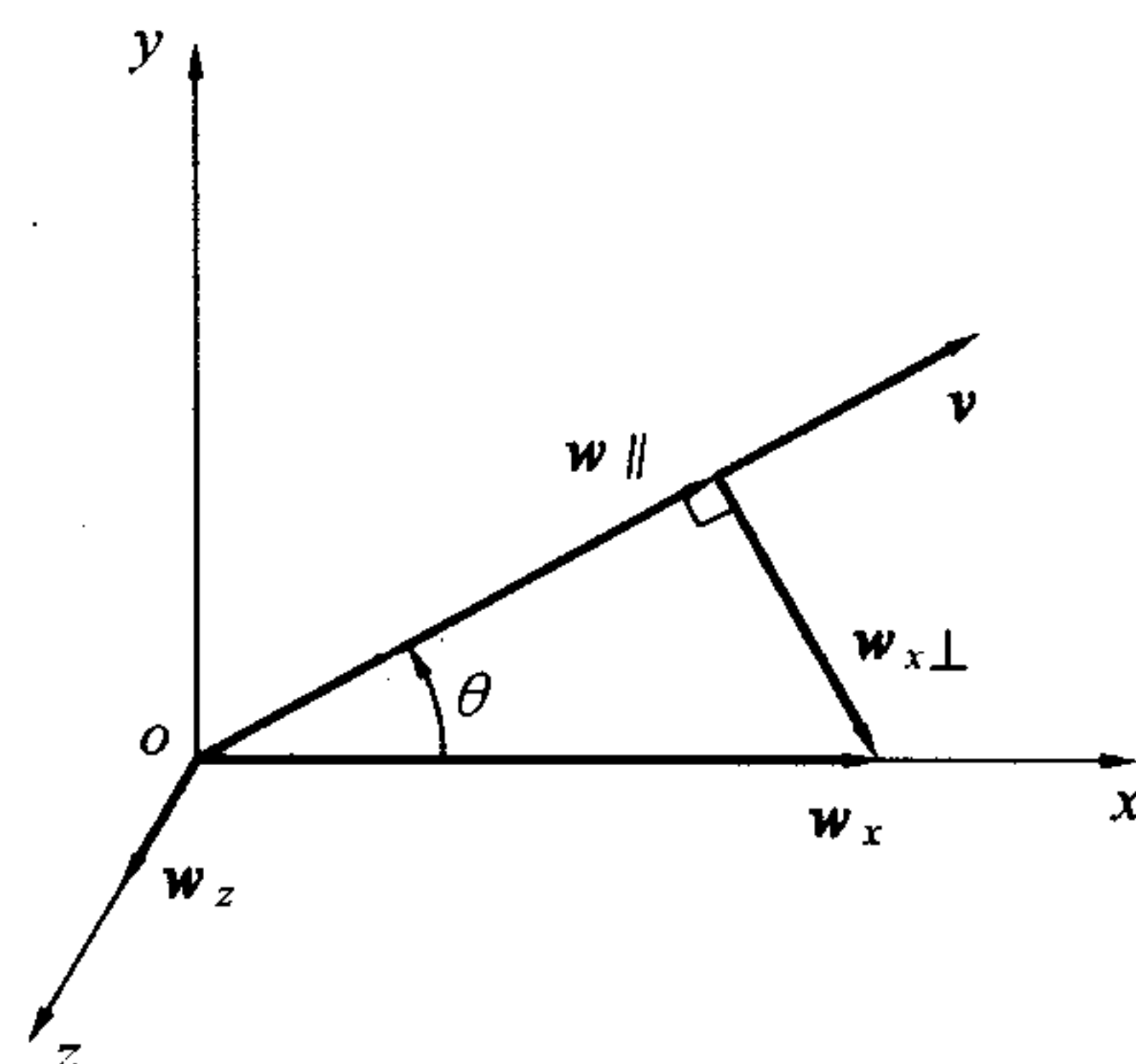


图 7.24 风速图



道来说,这是一个干扰力矩,它使弹轴偏离预定方向,而向相对速度方向偏转。当然,人们并不喜欢这个干扰力矩的存在。

随着弹头逆风向转动,推力作用线也离开了原来方向,便产生了一个垂直于火箭飞行速度  $v$  的法向力,这个推力的法向分量的方向正好与风速  $w_{\perp}$  的方向相反。这点,图 7.25(b) 所示的火箭处于平衡位置,即弹轴与  $v_r$  一致时,已看得十分清楚。而且,假定弹轴是从初速  $v_0$  的方向开始摆动的,一般来讲,在以后的弹轴摆动过程中,弹轴也不会超越速度矢量线而摆到  $v$  的另一侧去。因此在全主动段内,推力的法向分量都是与风速  $w_{\perp}$  反向。与此同时,气动力

$R$  也有法向分量,方向与推力法向分量相反,但大小却小得多,分析时可忽略。总的看起来,火箭速度在与风速  $w_{\perp}$  相反的推力法向分量作用下,必将逆风向偏转,因而主动段内垂直风引起的弹道落点偏差是“迎风偏”。

在被动段,推力消失,在垂直于速度方向的气动力分量作用下,由于该力与  $w_{\perp}$  的方向一致,故被动段表现出“顺风偏”的性质。计算表明,尽管主动段比被动段短得多,但由于主动段有很大推力,因而风对主动段的影响是很大的,它在  $K$  点形成的偏角引起落点的侧偏要比被动段的大,而射程偏差则因射角而异。从比较坏的情况着眼,研究风引起的落点散布时,一般考察横风引起的落点方向散布。

基于上述主动段内“迎风偏”的根本原因,是  $F_P \gg R$ , 见图 7.25(b), 因而  $F_P$  的法向分量起决定性作用。那么为了减小甚至消除这种作用,对于比较高的初速  $v_0$  的增程弹,人们考虑可将推力大大减小,直到与阻力相等的程度,即  $F_P = R$ 。这样,它们的法向分量便可大致对消,如此设计方案,就是所谓“零风偏”火箭。对初速小的火箭,采用“零风偏”方案当然是行不通的,其原因不言而喻。

对风所引起攻角和偏角的计算方法有几种,有如上面推导  $\delta_L$  和  $\phi_L$  的方法,也有用运动合成与分解的方法。这里介绍其中的微分方程求解法。

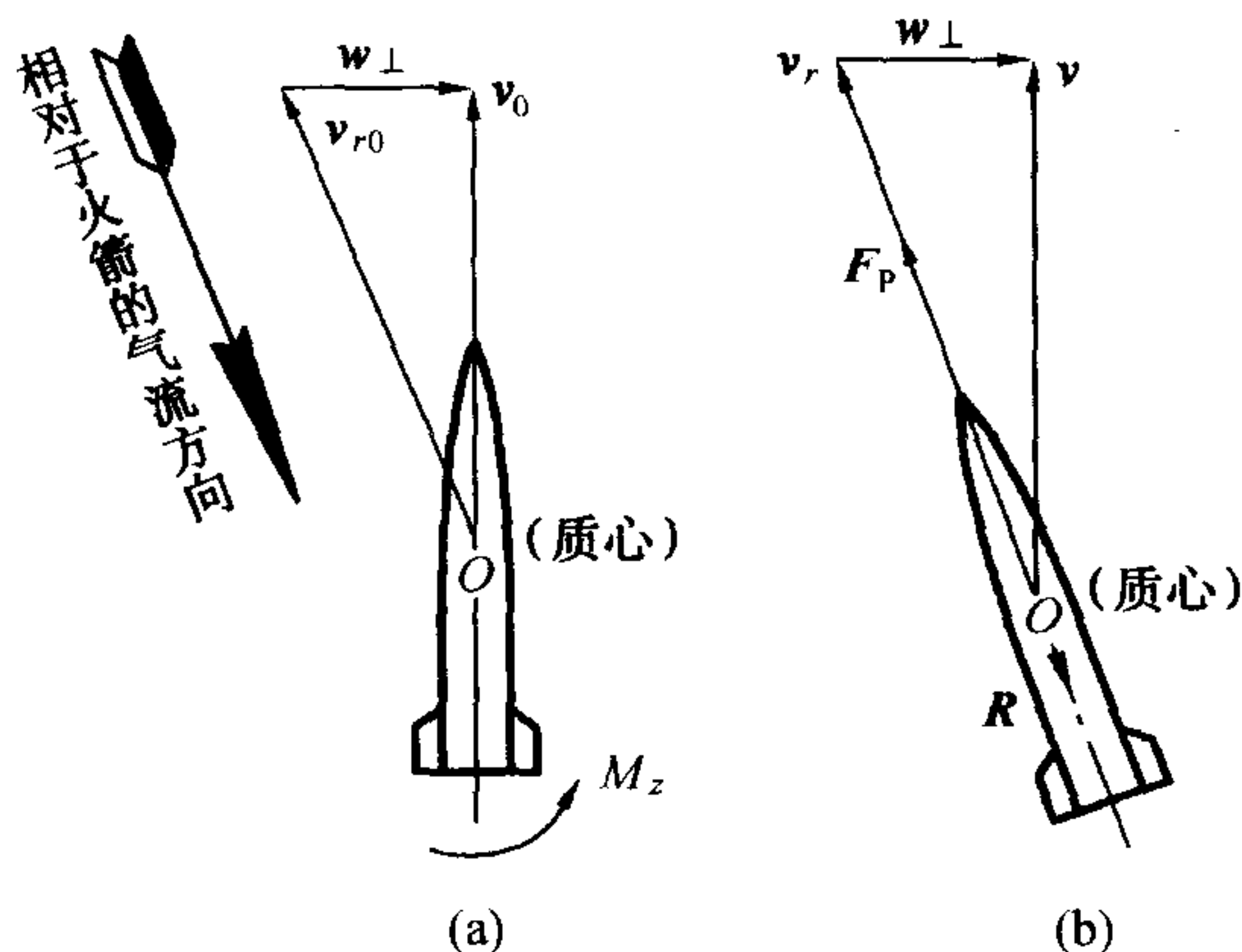


图 7.25 有风时火箭的两种运动状态

(a) 火箭刚出炮口时的运动状态

(b) 火箭处于平衡状态

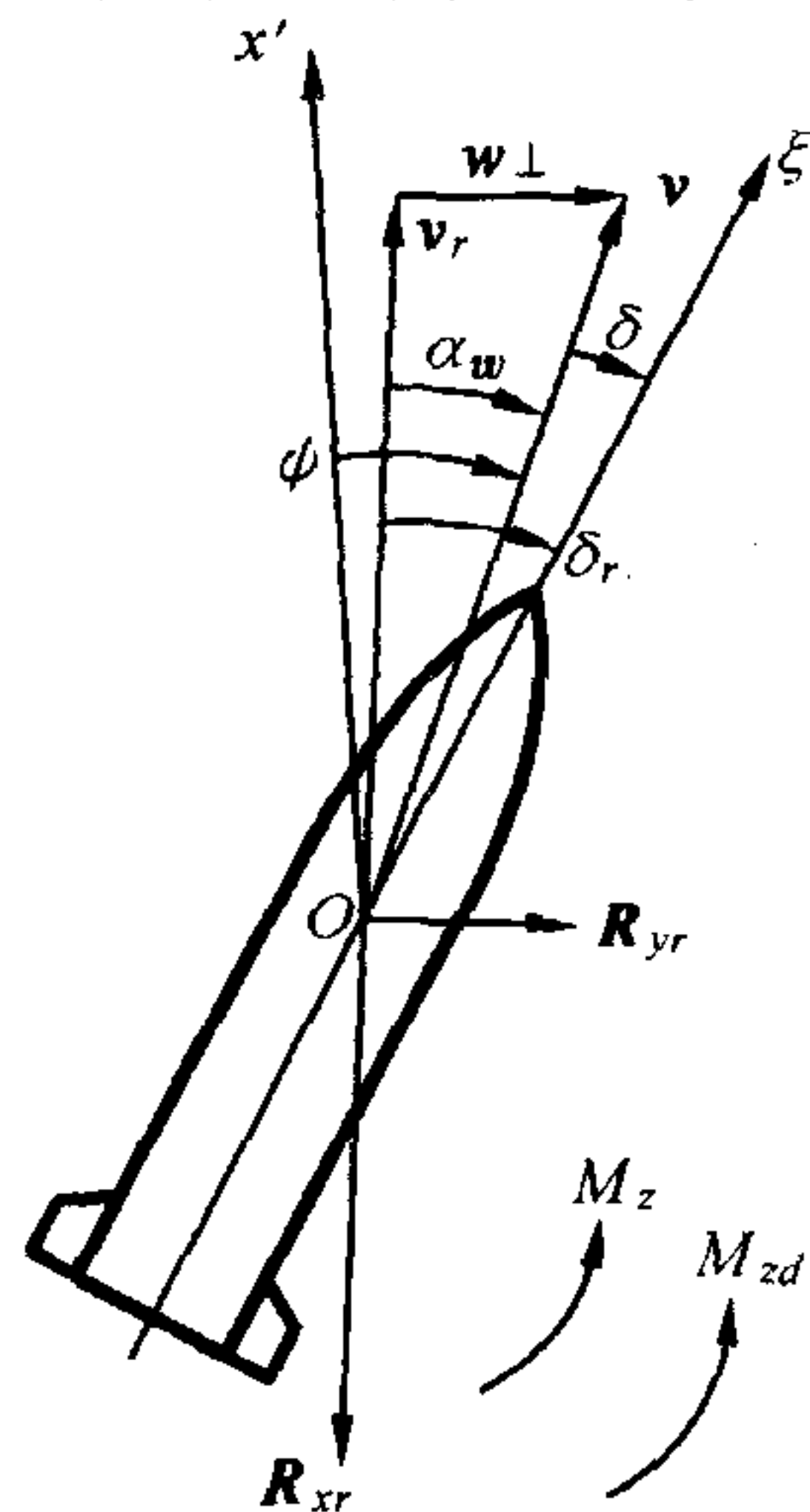


图 7.26 有风时火箭的一般运动状态





### 7.8.3 运动方程的建立与攻角偏角公式

不妨取图 7.9 所示的横向平面,在横风作用下的火箭一般运动状态见图 7.26,值得注意的是,在有  $w_{\perp}$  作用下的气动力,都必然以相对速度  $v_r$  的大小及它与弹轴间的夹角(相对攻角)来计算。其中阻力  $R_{xr}$ (以脚注“r”表示有风存在下的气动力)与  $v_r$  方向相反,升力  $R_{yr}$  垂直  $v_r$  方向。为了使问题简化,不妨假设风速  $w_{\perp}$  是不变的恒定风,而且它比速度  $v$  要小很多。这样,可近似取  $v_r \approx v$ ,并且相对速度  $v_r$  与  $v$  的夹角  $\alpha_w \approx w_{\perp}/v$ 。

仿照图 7.9 的运动状态建立方程的方法,仍将式(7.15)向  $v$  方向及其垂直方向投影,可得

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_p \cos \delta - R_{xr} \cos \alpha_w + R_{yr} \sin \alpha_w - mg \sin \theta_i \cos \psi \\ mv \frac{d\psi}{dt} = F_p \sin \delta + R_{yr} \cos \alpha_w + R_{xr} \sin \alpha_w + mg \sin \theta_i \sin \psi \end{cases} \quad (7.105)$$

此方程组与方程组(7.29)并无原则区别,只是须将阻力和升力投影罢了。若进行简化,则

$$\frac{dv}{dt} = a_p - b_x v^2 - g \sin \theta \quad (7.106)$$

$$v \frac{d\psi}{dt} = a_p \delta + b_y v^2 \delta_r + b_x v^2 \alpha_w \quad (7.107)$$

再仿式(7.30),得简化式

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -k^2 v^2 \delta_r - k_{zd} v \dot{\varphi}$$

于是得联立方程组如下(注意  $\delta_r = \delta + w_{\perp}/v$ )

$$\begin{cases} v \frac{d\psi}{dt} = a_p \delta + b_y v^2 \left( \delta + \frac{w_{\perp}}{v} \right) + b_x v w_{\perp} & \text{①} \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -k^2 v^2 \left( \delta + \frac{w_{\perp}}{v} \right) - k_{zd} v \dot{\varphi} & \text{②} \\ \varphi = \psi + \delta & \text{③} \end{cases} \quad (7.108)$$

其初始条件为零值。

仿式(7.37)①,式(7.108)①成为下式

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{1}{k} \left( \frac{a_p}{v^2} + b_y \right) \delta + \frac{b_x + b_y}{k} \left( \frac{w_{\perp}}{v} \right) \quad (7.109)$$

再仿式(7.43),可得

$$W'' + 2bW' + W = -w_{\perp} \quad (7.110)$$

初始条件为

$$u = u_0 \text{ 时, } W_0 = 0, W'_0 = 0$$

可把式(7.110)变成齐次方程形式,若令



$$W_r = \left( \delta + \frac{w_{\perp}}{v} \right) v = W + w_{\perp} = v\delta_r \quad (7.111)$$

则

$$W'_r = W', W''_r = W'' \quad (7.112)$$

于是有方程

$$W''_r + 2bW'_r + W_r = 0 \quad (7.113)$$

初始条件化为

$$u = u_0 \text{ 时, } W_{r0} = w_{\perp}, W'_{r0} = 0 \quad (7.114)$$

(7.113) 与 (7.46) 两个方程在形式上安全一样, 而初始条件 (7.114) 是 (7.47) 的特殊情况, 即相当于  $W_0 = v_0\varphi_0$  和  $W'_0 = 0$  的情况, 亦即式 (7.57) 的第二种初始条件。也就是说, 那里的  $\varphi_0$  相当于现在的  $w_{\perp}/v_0$ , 于是便得式 (7.113) 的解 (用  $\delta_w$  表示风引起的攻角)

$$\delta_r = \delta_w + \frac{w_{\perp}}{v} = \frac{w_{\perp}}{v_0} \delta_{\varphi_0}^*(u_0, u) \quad (7.115)$$

令  $w_{\perp} = 1$ , 得攻角的特征函数为

$$\delta_w^* = \frac{1}{v_0} \delta_{\varphi_0}^*(u_0, u) - \frac{1}{v} \quad (7.116)$$

将式 (7.116) 代入式 (7.109) 并积分, 得风引起偏角  $\phi_w$  的特征函数  $\phi_w^*$  为

$$\phi_w^* = \frac{1}{v_0} \int_{u_0}^u \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \delta_{\varphi_0}^* du - \int_{u_0}^u \frac{a_P}{kv^3} du + \int_{u_0}^u \frac{b_x}{k} \frac{du}{v} \quad (7.117)$$

式 (7.117) 第一个积分为  $\phi_{\varphi_0}^*/v_0$ , 即

$$\frac{1}{v_0} \int_{u_0}^u \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \delta_{\varphi_0}^* du = \frac{1}{v_0} \phi_{\varphi_0}^*$$

对式 (7.117) 第二、三两项积分时, 可取式 (7.106) 的近似式

$$\frac{dv}{dt} = a_P - b_x v^2 \quad (7.118)$$

代入得

$$- \int_{u_0}^u \left( \frac{a_P}{kv^3} - \frac{b_x}{kv} \right) du = - \int_{u_0}^u \frac{dv}{kv^3} \frac{du}{dt} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = - \left( \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right)$$

于是得

$$\phi_w^* = \frac{1}{v_0} \phi_{\varphi_0}^*(u_0, u) - \left( \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right) \quad (7.119)$$

由于

$$\phi_{\varphi_0}^* = 1 - \phi_{\phi_0}^*$$

则

$$\phi_w^* = - \frac{1}{v_0} \phi_{\phi_0}^*(u_0, u) + \frac{1}{v} \quad (7.120)$$





#### 7.8.4 $\delta_w^*$ 和 $\phi_w^*$ 的性质

通过计算,可以知道  $\delta_w^*$  和  $\phi_w^*$  都是负值,说明弹轴及速度矢量偏转的方向与风向相反。这与前面定性分析的结论是一致的。从图 7.27 看出,  $\delta_w^*$  曲线对横轴是不对称的。 $\delta_w^*$  也存在一个平均攻角,叫平衡攻角,满足总的静力矩为零的条件,那么相对攻角为零,即

$$\delta_r = \delta + \alpha_w = 0$$

则知攻角的平均值为

$$\bar{\delta}_w = -\alpha_w = -\frac{w_{\perp}}{v} \quad (7.121)$$

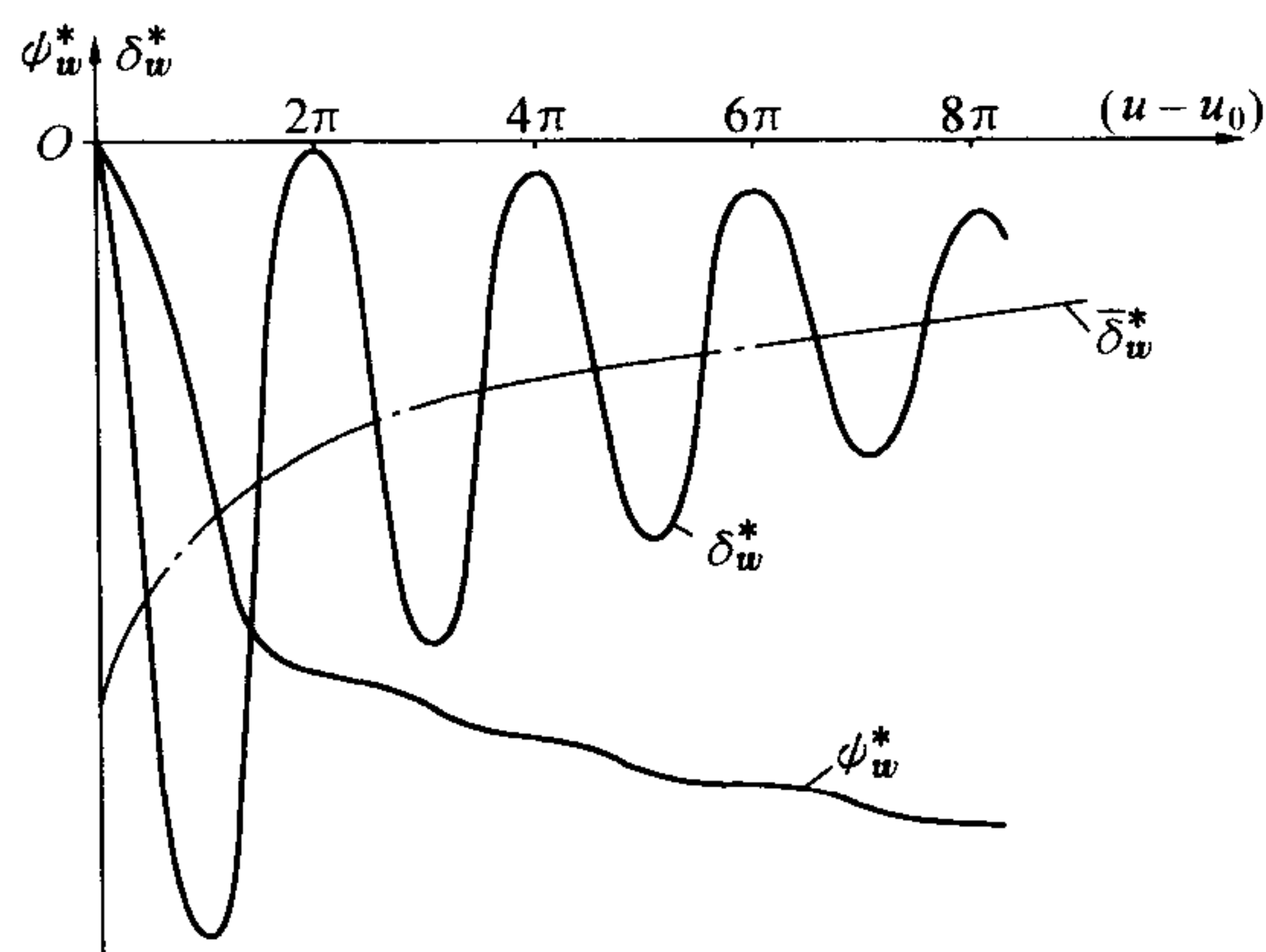


图 7.27  $\delta_w^*$  和  $\phi_w^*$  曲线

这正是图 7.25(b) 所示的运动状态,此时弹轴与  $v_r$  一致。可见,  $\delta_w$  以  $\bar{\delta}_w$  为平均位置而交变,正说明弹轴是围绕相对速度  $v_r$  方向摆动着(图 7.27 中  $\bar{\delta}_w^*$  为  $w_{\perp} = 1$  时的  $\bar{\delta}_w$ )。

由于弹轴总是停留在速度的一侧,因而推力的法向分量的方向始终不变,偏角绝对值总是不断增大,只不过第一个波长内增加更快一些,但尔后的增量是不可忽略的。故而对  $\phi_w$  来说,临界段已不明显。

剖析一下式(7.119)所表示的  $\phi_w^*$  公式,它由两部分组成,一部分是由相对攻角引起的,另一部分是平均攻角引起的。后一种就是图 7.25(b) 所示的情况,即考虑弹轴与  $v_r$  保持一致,处于平衡位置。由推力和阻力的法向分量引起的偏角满足下式(考虑  $w_{\perp} \neq 1$  的情形)

$$mv \frac{d\phi}{dt} = -F_p \alpha_w + R \alpha_w$$

即

$$v \frac{d\phi}{dt} = -a_p \frac{w_{\perp}}{v} + b_x v w_{\perp}$$

或变为以  $u$  为自变量时,得

$$\frac{d\phi}{du} = -w_{\perp} \frac{a_p}{kv^3} + w_{\perp} \frac{b_x}{kv}$$

积分之,得

$$\phi = w_{\perp} \left( -\int_{u_0}^u \frac{a_p}{kv^3} du + \int_{u_0}^u \frac{b_x}{k} \frac{du}{v} \right)$$

当  $w_{\perp} = 1$  时,上式正是式(7.117)的后两项。可见(7.119)式的第二项正是火箭以平均攻角飞行时,推力和阻力法向分量所引起的偏角,称为偏角的平均项。

而式(7.119)第一项是由弹轴相对于相对速度  $v_r$  的相对攻角  $\delta_r$  引起的,即弹轴相对  $v_r$  的摆动引起的。对平均情况来说,这是一个附加量,即对平均项的偏差量,它是由  $\delta_r$  所相应的推



力和升力产生的。这两个力的大小分别为  $F_P \delta_r$  和  $(1/2) \rho v^2 S C_y' \delta_r$ ; 而  $\delta_r$  是由式(7.115) 确定的。于是使得该二力产生的偏角为

$$\psi = \frac{w_{\perp}}{v_0} \int_{u_0}^u \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \delta_{\varphi_0}^* du$$

当  $w_{\perp} = 1$  时,这正是式(7.117) 第一项,亦即(7.119) 式第一项。通常称它为偏角的相对摆动项,或摆动项,因为它是由弹轴相对于相对速度摆动产生的。

一般来说,平均项在风偏中起主导作用,并且随初速的增加和加速度的减小,其平均项的主导作用就越明显。对野战火箭来说,由于初速甚小,且推力加速度较大,故相对摆动项并不亚于平均项,是不可忽视的。

### 7.8.5 影响 $\psi_w$ 的因素

在射击中,风是一个不利因素,应该使所设计的火箭对风的敏感最小。因此应了解各有关因素对  $\psi_w$  的影响程度,从而尽可能地减小  $|\psi_w|$ 。风速是客观存在,无从减小。故只讨论对  $\psi_w^*$  的影响因素。计算表明,  $|\psi_w^*|$  随有效滑轨长度  $s_0$  增大而减小。这是由于炮口速度大,炮口动量大,使得速度方向不易改变的缘故;另外,初速大,总的攻角变小了,也使偏角减小。

推力加速度  $a_P$  增大时,  $|\psi_w^*|$  减小。这是因为  $a_P$  大时不仅炮口速度加大,而且出炮口后的速度加速很快,利于偏角的减小。

稳定力矩系数  $m_z'$  包含在  $k$  中,  $m_z'$  增大,  $k$  增大;  $|\psi_w^*|$  随  $k$  增加而增加,如图 7.28 所示。这是由于  $m_z'$  大意味着尾翼功效大,风所产生的气动力矩就大,使弹轴很快离开了原来方向并达到最大攻角;相反地,如果  $m_z'$  小,则弹轴转动慢,攻角达到最大值比较晚,此时火箭飞行速度已达较大值,故攻角和偏角都将有所减小。

弹长  $l$  增加,使赤道转动惯量增加,弹体摆动慢,其效果与减小  $m_z'$  一样。

应该指出,上述因素对增程弹的影响是微不足道的。在第十二章将指出,对增程弹来说,摆动项趋于零,风偏仅依赖于  $v_0$  和  $v_K$  之值。

### 7.8.6 风引起的角散布

风速的变化是很大的,在同一地点,它随时间的变化规律如图 7.29 所示。通常气象预报的风速都是指的平均风速。实际上,风速的随机性是很明显的,存在着所谓大气紊流度的问题。对紊流度一般要用随机函数来描述。风速沿时间坐标或空间坐标的变化过程,都为随机过程。在

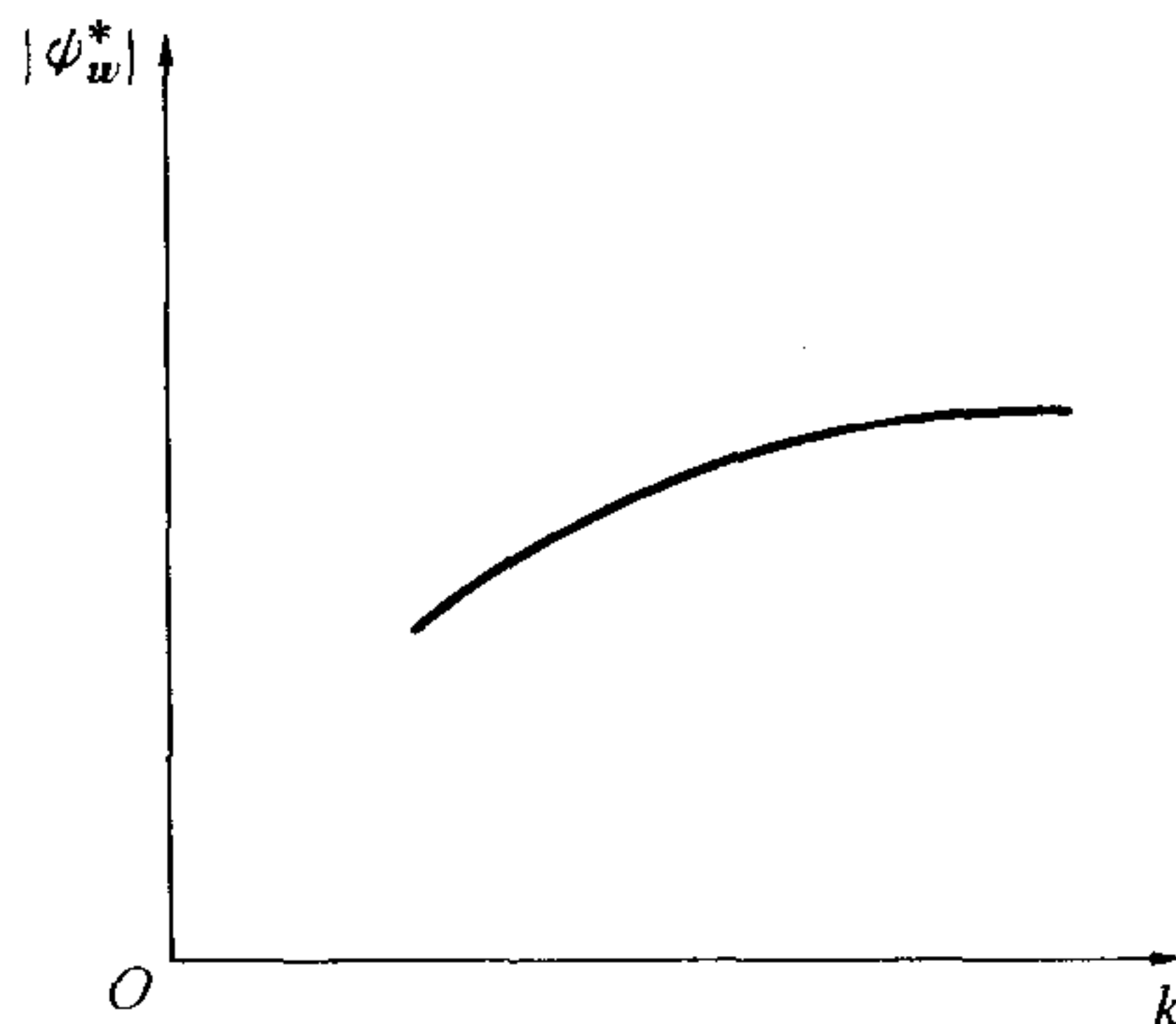


图 7.28  $|\psi_w^*| - k$  曲线





一定时间或空间范围内,还可视为平稳随机过程,可用谱密度或相关函数加以描述<sup>[38,39]</sup>。火箭在飞行过程中所遇到的风速变化过程,是一个随机过程。用随机过程理论来研究风的影响,目前已有一些研究成果。但由于一般无控火箭主动段不长,飞行时间也短,因而可把风速当作随机变量。也就是说,在多发火箭射击中,对每一发火箭飞行过程中的风速可采取某一平均值;这些风速是随机变量,满足正态分布率,其中间误差为  $B_w$ 。根据初步实践认为,在超低空

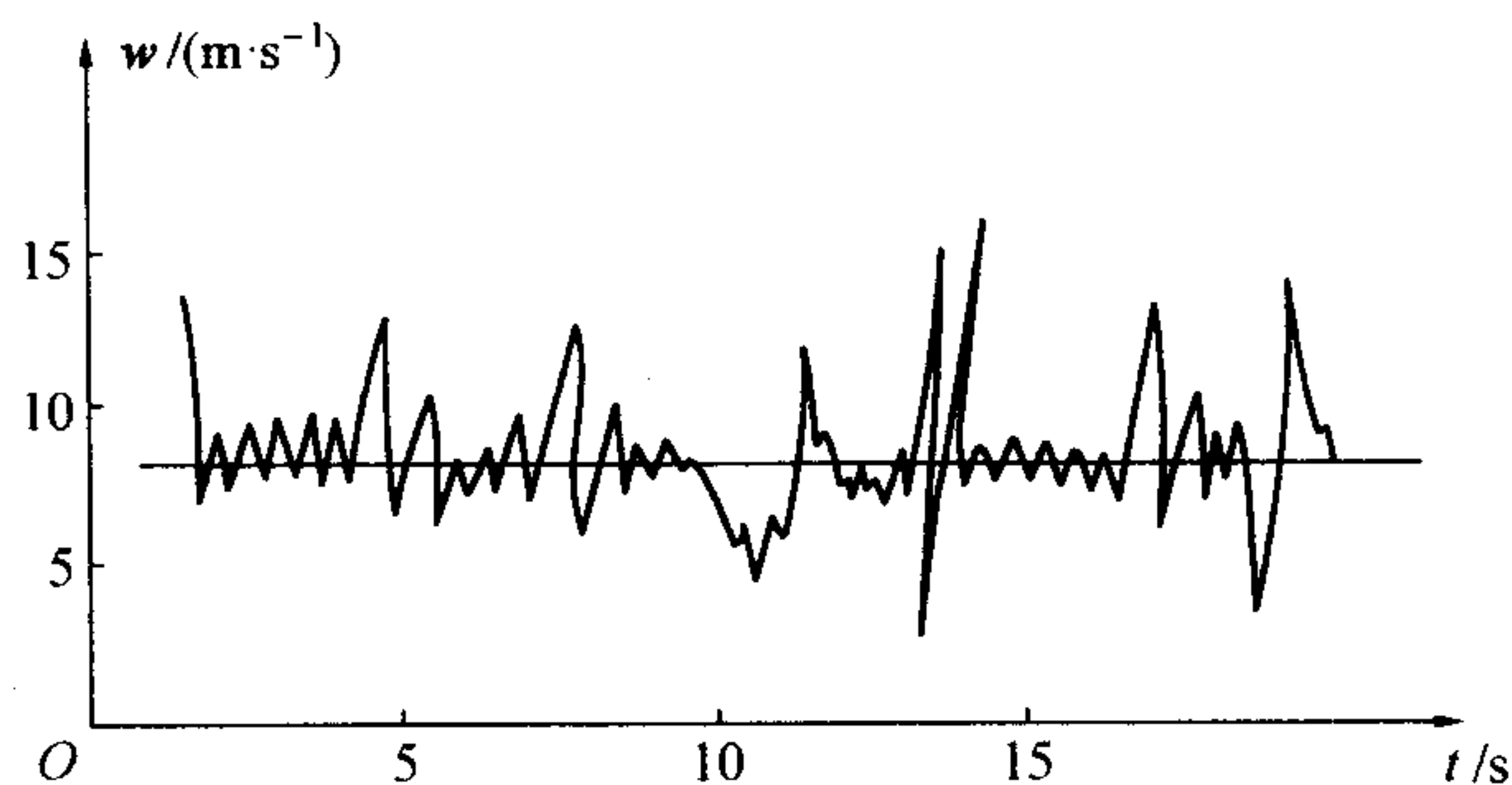


图 7.29 风速曲线

范围内,  $B_w$  之值主要与多发火箭射击中的平均风速  $\bar{w}$  有关<sup>[36]</sup>,可取如下近似式

$$B_w \approx 0.1 \bar{w} \quad (7.122)$$

若垂直风速  $w_{\perp}$  的中间误差为  $B_{w_{\perp}}$ ,则  $\psi_w$  中间误差为

$$B(\psi_w) = B_{w_{\perp}} | \psi_w^* | \quad (7.123)$$

而垂直风的平均值  $\bar{w}_{\perp}$  所产生的影响是系统性的,可进行弹道修正。

**例题 7.3** 设纵风和横风的中间误差  $B_{w_x} = B_{w_z} = B_w = 1.0 \text{ m/s}$ , 计算例题 7.1 中某火箭弹引起的落点散布。

**解** 由式(7.120)

$$\psi_{wK}^* = -\frac{1}{v_0} \psi_{\phi_0}^*(u_0, u) + \frac{1}{v_K} = -\frac{1}{66.33} \times 0.6395 + \frac{1}{350} = -0.00678$$

则(取  $\cos\theta_0 \approx \cos\theta_K$ )

$$B(\psi_{w_K}) = B_{w_z} | \psi_{wK}^* | = 0.00678$$

$$B(\psi_{w_K}) = B_{w_x} \sin\theta_0 | \psi_{wK}^* | = 0.00479$$

方向散布为(相对值)

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\psi_{w_K})}{\cos\theta_K} = \frac{0.00678}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{104}$$

距离散布为

$$B_X = |Q_{\theta_0}| B(\psi_{w_K}) = 0.17 \times 0.00479 \times \frac{180}{\pi} \times 60 = 2.8 \text{ m}$$

## 7.9 火箭在被动段内的摆动运动

一般来讲,主动段末  $K$  点的摆动角  $\varphi_K$ , 摆动角速度  $\dot{\varphi}_K$  及偏角  $\psi_K$ , 都是被动段的运动起始



条件。如果把  $K$  点当作普通滑膛炮弹的射出点,那么火箭在被动段内的运动,正是类似普通尾翼式炮弹的运动。在被动段内的齐次方程仍为式(7.46),即

$$(v\delta)'' + 2b(v\delta)' + (v\delta) = 0 \quad (7.124)$$

初始条件为

$$u = 0 \text{ 时, } v\delta = v_K\delta_K, (v\delta)' = (v\delta)'_K \approx \frac{\dot{\phi}_K}{k} \approx \frac{\dot{\delta}_K}{k}$$

于是据式(7.52)得

$$\delta = \frac{1}{v} e^{-bu} \left( \frac{\dot{\delta}_K}{k} \sin u + \delta_K v_K \cos u \right) \quad (7.125)$$

在求偏角时,可近似取  $(1/v)\exp(-bu) \approx 1/v_K$ ,再由式(7.45)得偏角为

$$\psi = \int_0^u \frac{b_y}{k} \delta du = \dot{\delta}_K K_n (1 - \cos u) + \delta_K k v_K K_n \sin u \quad (7.126)$$

其平均值  $\bar{\psi}$  为

$$\bar{\psi} = \dot{\delta}_K K_n \quad (7.127)$$

式中

$$K_n = \frac{b_y}{k^2 v_K} = \frac{AC'_y}{mv_K l m'_z} = \frac{R_A^2}{l_d v_K \left( 1 + \frac{C_x}{C'_y} \right)} \approx \frac{R_A^2}{l_d v_K} \quad (7.128)$$

这个  $\bar{\psi}$  对落点的影响,一般比  $\psi_K$  对落点的影响要小,对不旋转的尾翼式火箭弹可忽略不计。

风对被动段的影响也是不可忽视的,这里主要指平均风(又称为弹道风)所造成的落点系统性偏差量。

对多发弹射击中,射击时间不太长时,由于高空风较地面风稳定,被动段可不考虑风的随机性(阵性)。

此外,关于外形不对称引起的气动偏心问题,在本章附录 7.2 中以  $\delta_M$  和  $\delta_N$  作为气动偏心的指标。对被动段,它们所产生的升力为[见附录中的式(7.137)及式(7.139)]

$$R_y = \frac{1}{2} \rho v^2 S C'_y (\delta_M - \delta_N) = \frac{1}{2} \rho v^2 S C'_y \left( -\frac{C_{x0}}{C'_y} \delta_M \right) = -\frac{1}{2} \rho v^2 S C_{x0} \delta_M$$

在整个被动段,火箭将一直在此力作用下运动,其偏角  $\psi$  满足方程

$$mv \frac{d\psi}{dt} = -R_y$$

即得

$$\frac{d\psi}{dt} = -b_x v \delta_M$$

则

$$\psi = -b_y \delta_M \int_0^t v dt = -b_x \delta_M s$$

而  $dz/dt = v\psi$ ,积分得落点侧偏为





$$Z = -b_x \delta_M \int_0^{s_c} s ds = -\frac{1}{2} b_x S_C^2 \delta_M \quad (7.129)$$

式中,  $S_C$  是全被动段弧长, 见附表 17。落点方向散布为

$$B_Z = \frac{1}{2} B(\delta_M) b_x S_C^2 \quad (7.130)$$

式中,  $B(\delta_M)$  是  $\delta_M$  的中间误差。根据具体计算可知, 当  $B(\delta_M) < 0.1^\circ$  时, 它对落点总散布的影响是可不考虑的。但若是个别火箭  $B(\delta_M)$  较大, 甚至具有  $1^\circ$  的数量级, 其影响就可观了。

## 附录 几个次要因素对主动段的影响

### 附录 7.1 推力侧分力的影响

由推力矢量产生的侧分力  $F_{Pl}$  如图 7.7 所示, 根据式(7.14),  $F_{Pl} = F_P \beta_P$ 。考虑此力时的式(7.31)第一式应为

$$v \frac{d\psi}{dt} = a_P \delta + b_y v^2 \delta + a_P \beta_P \quad (7.131)$$

显然,  $a_P \beta_P / v$  是此方程的非齐次项, 如 7.7 节指出的那样, 应用格林函数法便可得出推力偏心角  $\beta_P$  所引起的偏角  $\psi_{\beta_P}$ , 即

$$\psi_{\beta_P} = \int_{t_0}^t \frac{a_P \beta_P}{v_n} \psi_{\psi_0}^*(u_n, u) dt_n \quad (7.132)$$

由于  $dt_n = ds_n / v_n$  及  $v_n^2 = 2\bar{a}s_n$ , 则

$$\psi_{\beta_P} = \frac{a_P}{a} \beta_P \int_{u_0}^u \frac{1}{2u_n} \psi_{\psi_0}^*(u_n, u) du_n$$

将式(7.74)代入, 得

$$\psi_{\beta_P} = \frac{a_P}{a} \beta_P \int_{u_0}^u \frac{1}{2u_n} [1 - C_3 B_R(u_0, u)] du_n$$

定义函数

$$\psi_g^*(u_0, u) = \frac{1}{2} \int_{u_0}^u \frac{1}{u_n} [1 - B_R(u_n, u)] du_n \quad (7.133)$$

$\psi_g^*(u_0, u)$  已编成了函数表见附表 16。

$$\text{则} \quad \psi_{\beta_P} = \frac{a_P}{a} \beta_P \left[ \frac{1}{2} (1 - C_3) \ln \frac{u}{u_0} + C_3 \psi_g^*(u_0, u) \right] \quad (7.134)$$

$\beta_P$  是一正态分布的随机量, 设其中间误差为  $B(\beta_P)$ , 角散布为

$$B(\psi_{\beta_P}) = B(\beta_P) \psi_{\beta_P}^* \quad (7.135)$$



式中 
$$\psi_{\beta_p}^* = \frac{a_P}{a} \left[ \frac{1}{2} (1 - C_3) \ln \frac{u}{u_0} + C_3 \psi_g^*(u_0, u) \right] \quad (7.136)$$

**例题 7.4** 设  $B_{\beta_p} = 1.14 \times 10^{-3}$  rad, 求例题 7.1 之某火箭由  $B_{\beta_p}$  引起的方向散布。

**解** 由  $u_0 = 0.419$  及  $u_K = 11.67$  查附表 16, 可得

$$\psi_g^*(u_0, u) = 1.47$$

取  $a_P \approx \bar{a}$ , 则

$$\begin{aligned} \psi_{\beta_p K}^* &= \frac{1 - C_3}{2} \ln \frac{u_K}{u_0} + C_3 \psi_g^*(u_0, u_K) = \\ &= \frac{1 - 1.02}{2} \ln \frac{11.67}{0.419} + 1.02 \times 1.47 = -0.033 + 1.51 = 1.47 \end{aligned}$$

故 
$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\beta_p) \psi_{\beta_p K}^*}{\cos \theta_K} = \frac{1.14 \times 10^{-3} \times 1.47}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{422}$$

## 附录 7.2 气动偏心引起的角散布

尾翼式火箭弹在制造和储存运输等环节中, 不可避免地造成外形不对称。通常情况下, 外形不对称并不是散布的主要来源, 但若个别弹的外形损坏严重, 则会带来明显的弹道偏差。对外形不对称的描述是以空气动力的变化为依据。如图 7.30 所示, 由于外形不对称, 气动力对弹的几何轴已不对称, 故稳定力矩  $M_Z$  应写为

$$M_Z = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_z' (\delta - \delta_M)$$

也就是说,  $\delta = 0$  时的稳定力矩不为零值, 而是  $\delta = \delta_M$  时才为零。 $\delta_M$  称为气动偏心角。与几何轴线夹角为  $\delta_M$  的轴线, 称为空气动力对称轴。在飞行过程中, 火箭将以此轴为对称轴摆动。一般来讲, 对升力来说, 应该另外有它的对称轴。设当  $\delta = \delta_N$  时升力为零值。那么升力  $R_y = (1/2) \rho v^2 S C_y' (\delta - \delta_N)$ 。 $\delta_N$  与  $\delta_M$  并不是相等的。当  $\delta = \delta_M$  时, 稳定力矩为零, 但升力并不为零。此时升力为

$$R_y = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y' (\delta_M - \delta_N) \quad (7.137)$$

但在多数情况下, 即外形不对称主要由尾翼变形引起的话, 那么,  $\delta_M$  和  $\delta_N$  之差就很小, 可近似地把升力和稳定力矩对称轴一致起来。至于  $\delta_M$  和  $\delta_N$  之差小到何程度, 可作如下推导。假定火箭速度  $v$  正好与图 7.30 中的空气动力对称轴一致, 即  $v$  与几何轴的夹角为  $\delta_M$  [由于此时稳定力矩为零, 而压力中心又不在质心, 故空气动力主矢量  $R$  必然沿弹轴指向后方(图 7.31)], 则升力为

$$R_y = -R_x \tan \delta_M \approx -R_x \delta_M = -\frac{1}{2} \rho v^2 S C_{x0} \delta_M \quad (7.138)$$

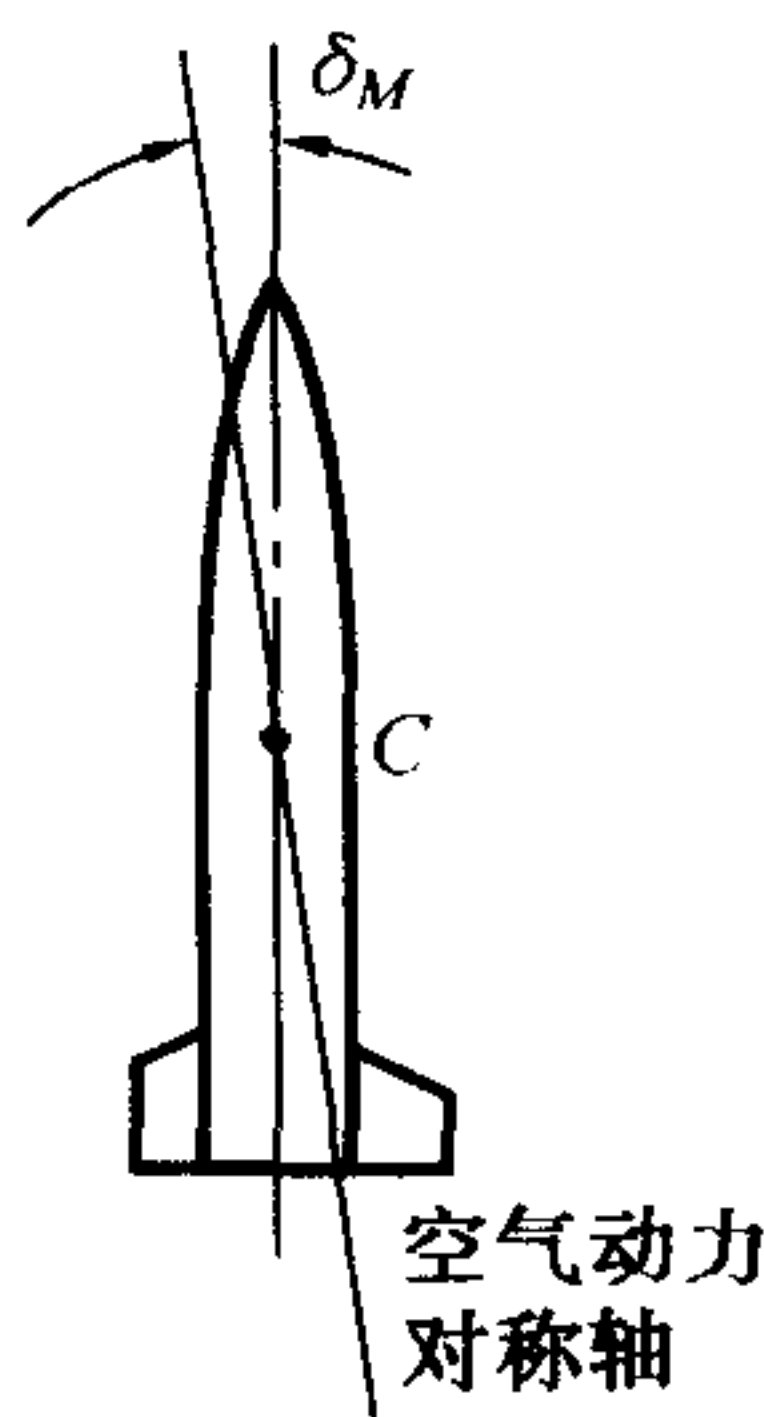


图 7.30 气动偏心





式(7.138)与式(7.137)应该是相等的,即

$$-\frac{1}{2}\rho v^2 SC_{x0}\delta_M = \frac{1}{2}\rho v^2 SC'_y(\delta_M - \delta_N)$$

$$\text{则} \quad \delta_M - \delta_N = -\frac{C_{x0}}{C'_y}\delta_M \quad (7.139)$$

由于  $C_{x0} \ll C'_y$ , 故  $\delta_M \approx \delta_N$ 。

既然在气动偏心存在下,可以将升力与稳定力矩对称轴近似地一致起来,那么可以不用建立方程求解的方法,而直接从物理意义的角度上求得偏角。如果把空气动力对称轴当作新的“弹轴”,那么计算气动力时就不用再计及  $\delta_M$  了。只不过现在的起始条件已不是零起始条件,因为新“弹轴”与定向器之间有了一个起始摆动角  $\varphi_0 = -\delta_M$  (参阅图 7.30)。同时推力与新“弹轴”也不重合,存在着一个推力偏心角  $\beta_P = \delta_M$ 。因而,有气动偏心存在下火箭的运动与有起始扰动  $\varphi_0 = -\delta_M$  及推力偏心  $\beta_P = \delta_M$  同时存在时的运动情况完全相同。于是便知由气动偏心角引起的偏角为

$$\psi_{\delta_M} = -\delta_M \psi_{\varphi_0}^* + \delta_M \psi_{\beta_P}^* = \delta_M (\psi_{\beta_P}^* - \psi_{\varphi_0}^*)$$

其特征函数为

$$\psi_{\delta_M}^* = \psi_{\beta_P}^* - \psi_{\varphi_0}^* \quad (7.140)$$

气动偏心角是一正态分布的随机量,其中间误差为  $B(\delta_M)$ ,则偏角中间误差为

$$B(\psi_{\delta_M}) = B(\delta_M) |\psi_{\delta_M}^*| \quad (7.141)$$

一般火箭弹  $B(\delta_M)$  只有  $0.1^\circ$  的数量级,对散布影响很小。但若达  $1^\circ$  数量级时,则其影响是显著的,在生产中须限制其公差范围。

### 附录 7.3 质量偏心引起的角散布

若火箭的质量分布不均匀,引起质心偏离几何纵轴一个小的距离  $L_m$ ,则  $L_m$  被称为质量偏心,或习惯称为静不平衡。可对  $L_m$  的影响作以下考虑。选一新弹轴,它过质心并且平行几何对称轴,对“新轴”而言,将出现两种情况:一是推力对质心有力矩;二是空气动力形成力矩。前者已在推力偏心中计及,而后者为阻力与  $L_m$  之积,即(在零攻角时)

$$M = -\frac{1}{2}\rho v^2 SC_{x0}L_m$$

式中负号是考虑  $L_m$  为正向时,力矩  $M$  的作用方向是负的。此力矩相当于某一气动偏心角  $\delta_M$  的作用,即

$$-\frac{1}{2}\rho v^2 SC_{x0}L_m = \frac{1}{2}\rho v^2 S l m'_x \delta_M$$

得

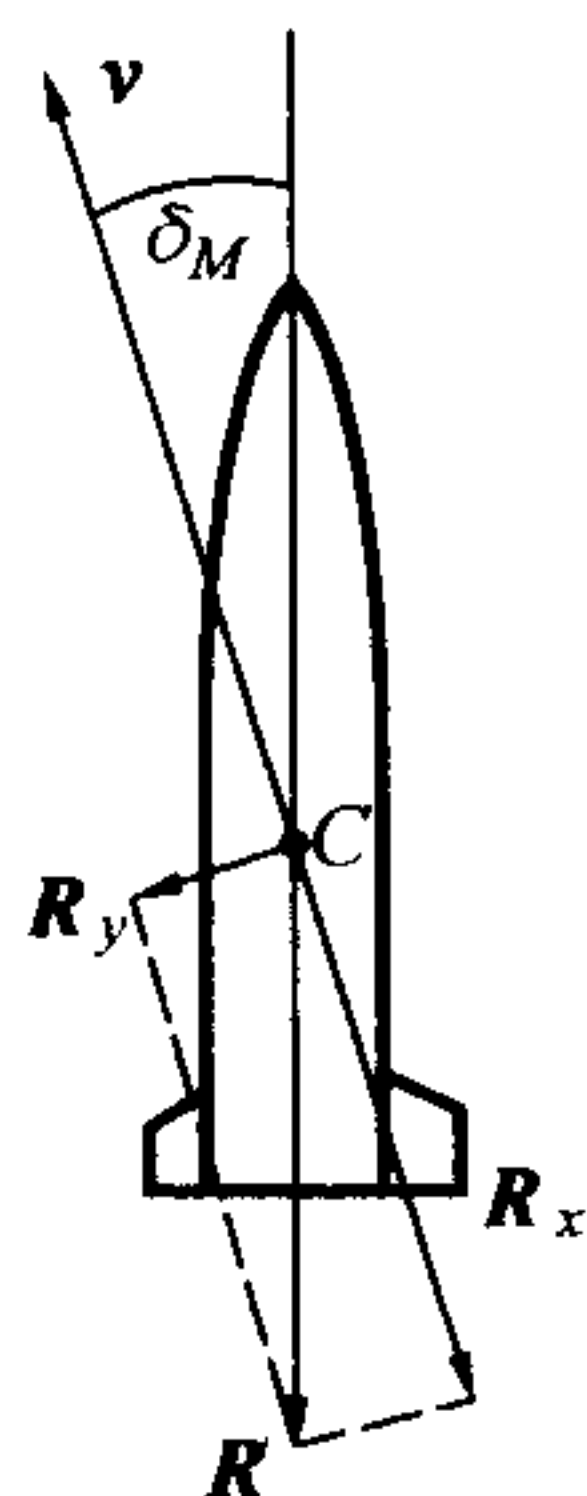


图 7.31  $v$  与空气动力对称轴一致时的火箭

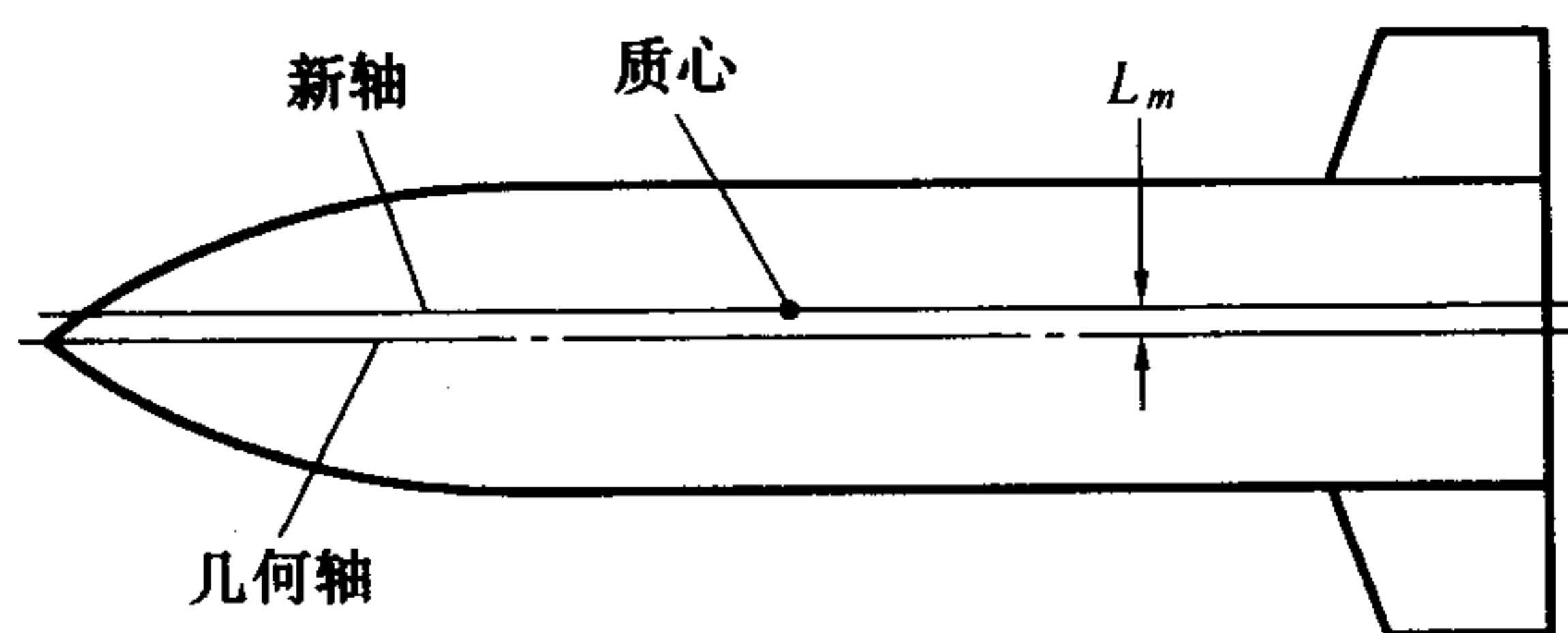


图 7.32 质量偏心

$$\delta_M = -\frac{C_{x0}}{lm_z} L_m$$

引起的偏角为

$$\psi_{L_m} = -\frac{C_{x0}}{lm_z} L_m \psi_{\delta_M}^* \quad (7.142)$$

若  $L_m$  为正态分布的随机量, 中间误差是  $B(L_m)$ , 则角散布为

$$B(\psi_{L_m}) = B(L_m) \frac{C_{x0}}{lm_z} |\psi_{\delta_M}^*| \quad (7.143)$$

根据计算, 此量是很小的。



## 第八章 旋转火箭弹及轴对称飞行器一般运动方程组

### 8.1 概 述

提到轴对称飞行器,自然会想到外形为回转体的枪弹和无翼炮弹。而尾翼弹,若有  $n_w$  片直翼,则只有  $n_w$  个纵对称面,并非轴对称;如果尾翼片斜置安装,或为卷弧翼,那么这种尾翼弹从严格的几何意义上讲既不是面对称体也不是轴对称体。但是,在外弹道学或飞行动力学中,对尾翼弹一般仍被当作“轴对称”飞行器处理。这是因为从工程力学意义上看是合理的。其一,任取过质心且垂直于纵轴的坐标轴,对该轴所测得的赤道转动惯量,不因该轴所取方位不同而有明显差异;其二,任取弹体坐标系的垂直于弹纵轴的  $y_1$  轴与  $z_1$  轴,空气动力和力矩系数对二轴并无显著差别。若计及其差别,拟以力和力矩形式表征,将在 8.6 节阐述。对于轴对称飞行器,所建立的运动方程比较简洁,尤其扰动运动方程具有某种对称性,便于解析求解。

对于不旋转火箭弹,由于不考虑火箭弹弹体绕自身几何轴线的旋转,围绕质心运动只是一种简单的平面摆动(将正交二平面内的两摆动合成起来,可能为衰减的螺旋运动)。当考虑到旋转引起的陀螺效应时,动量矩这个矢量就会更复杂一些,须在三维空间中应用动量矩定理分析全弹的绕心运动。

对尾翼弹,旋转的目的是为了减小某些不对称扰动因素所引起的散布,如推力偏心、气动偏心、质量偏心。理论和实践表明,赋予火箭以适当的自转速度,对减小这些扰动因素引起的散布是很有效的。不过一般尾翼弹的转速并不需要很高。但某些结构(如同口径环形尾翼)的尾翼弹,往往在跨声速阶段出现静不稳定性,为此需要高速旋转,以陀螺稳定性来弥补其不足。然而,转速又会带来不利方面:它会引起马格努斯效应,使弹箭飞行稳定性受到不利影响;此外由于质量分布不均匀使纵向惯性主轴与几何纵轴之间存在一定角度(所谓动不平衡角),此轴向自(滚)转速度将导致这一动不平衡造成散布。

对无翼的涡轮式火箭弹,自转的根本目的在于提供陀螺稳定性。

总之,旋转条件下的运动方程组,对散布分析和稳定性分析都是必要的。

从力学观点来看,无论是涡轮式,或是尾翼式火箭弹,除了某些力有所差别外,其运动方程在形式上是一样的。完全可以对各类火箭的运动规律采取统一的运动方程组。

在建立运动方程时,考虑到对运动影响的大小程度,应该计及的力有:推力的轴向分量,重力,空气阻力和升力;计及的力矩有:静力矩(对尾翼弹为稳定力矩,对涡轮式火箭弹为翻转力矩),尾翼导转力矩,喷管导转力矩,极阻尼力矩,赤道阻尼力矩,马格努斯力矩。所计及的扰动



因素,除了起始扰动外,还有下列诸项:

- (1)推力线偏心;
- (2)风;
- (3)动不平衡。

顺便指出,还有其他一些扰动因素也能引起散布,如气动偏心、质量偏心、推力的侧分力  $F_{Pl}$  等等。但就目前制式火箭弹的生产工艺水平来看,对正常的火箭弹(如果没有突然的明显变形),只要赋予一定的转速,而且不是共振转速(对尾翼弹即避免每一波长自转一周的情况),那么气动偏心和质量偏心引起的散布在总散布中的地位就会降为很次要的了。这点,在本书参考文献[6]中已用理论计算证明过。推力侧分力  $F_{Pl}$  对野战火箭弹所引起的散布也是很小的,用不着计及。但有人认为它对某些尾翼式火箭增程弹的影响是不可忽视的。其实,这不过是拿它引起的散布量同推力矩引起的散布量相比较而说的。然而,全面地考虑总的散布,理论和实践都证明,这两个散布量都随转速增大而减小。对尾翼式火箭增程弹,只要从减小推力矩引起的散布量为基点来选取足够转速,那么其散布量本身就在总散布中处于可忽略的地位。这样,  $F_{Pl}$  所形成的散布也便随之与推力矩形成的散布量一样,自然而然地被忽略掉了。但为了考虑以上次要因素的影响程度,还是在适当的方程组中将它们列出。

在电子计算机被普遍采用的条件下,能将实际问题变为一个数学模型是很重要的。对研究火箭运动来说,其重要性更是无可非议。

## 8.2 火箭外弹道学中常用的坐标系及其相互关系

### 8.2.1 坐标系及参考基

研究火箭的运动规律,必须有一定的参考系作为基准,以便于进行理论分析和试验观测。如果参考系选取得合适,将会使方程形式简单,便于分析问题;否则,将会使之繁琐,不便处理。现取以下几种坐标系。

#### 1. 地面坐标系(ground axes)

与地面固连的坐标系,用  $o-xyz$  表示。以弹道起点作为坐标原点;以射击面(包含理想弹道初速矢量的铅直面)与弹道起点水平面的交线为  $x$  轴,顺射向为正; $y$  轴铅直向上; $z$  轴依右手法则确定。地面坐标系的基以  $e_g$  表示,其三个基矢量  $e_{g1}$ 、 $e_{g2}$ 、 $e_{g3}$  分别沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三轴方向。

#### 2. 平动坐标系(displacement axes)

平动坐标系以  $o-x_d y_d z_d$  表示。其坐标原点为弹体质心<sup>①</sup>,为书写方便,仍以  $o$  表示;在火箭飞行中,三坐标轴始终保持与地面坐标系三轴平行,故经常仍以  $o-xyz$  表示。其基以  $e_d$

<sup>①</sup> 在此不计质量偏心。





表示。

### 3. 理想弹道坐标系(ideal trajectory axes)

理想弹道坐标系以  $o - x_i y_i z_i$  表示。原点在质心； $x_i$  轴为理想弹道切线方向，向前为正； $y_i$  轴在铅直面内与  $x_i$  轴垂直，向上为正； $z_i$  轴依右手定则确定。 $x_i$  轴与水平面的夹角为理想弹道倾角  $\theta_i$ 。该坐标系为非惯性系，其  $z_i$  轴保持与射击面垂直，而  $x_i$ 、 $y_i$  轴绕  $z_i$  轴旋转，转动角速度为  $\dot{\theta}_i$ 。其基以  $e_i$  表示。

### 4. 弹道坐标系(trajjectory axes)

对于轴对称的弹体，该坐标系常称为速度坐标系；但对于面对称的飞行器，“速度坐标系”将有专门定义。该系以  $o - x_2 y_2 z_2$  (或  $o - x_t y_t z_t$ )<sup>①</sup> 表示。原点在质心； $z_2$  轴与速度矢量  $v$  一致； $y_2$  轴在铅直平面内并垂直于  $x_2$  轴，向上为正； $x_2$  轴依右手定则确定。该坐标系的基以  $e_t$  表示。

### 5. 相对速度坐标系(relative velocity axes)

在有风的情况下，飞行器与空气之间的相对速度  $v_r$  不等于飞行速度  $v$ ，它们间的相对关系依赖于风速  $w$ ，且  $v_r = v - w$ 。该坐标系以  $o - x_r y_r z_r$  表示。 $x_r$  轴与  $v_r$  一致； $y_r$  轴在铅直平面内并垂直于  $x_r$  轴，向上为正； $z_r$  轴依右手定则确定。该坐标系的基以  $e_r$  表示。

### 6. 弹轴坐标系(axis system)

弹轴坐标系代表着弹轴的方位，它可以通过不同的途径加以定义。

#### (1) 第一弹轴系

该坐标系以  $o - \xi \eta \zeta$  表示。它可视为由平动系经两次绕轴旋转得到：先将  $o - x_d y_d z_d$  绕  $z_d$  轴转动  $\varphi_a$  角(称为弹轴高低角)，使  $x_d$  与  $y_d$  轴转到  $x'_d$  和  $\eta$  轴的位置；然后再绕  $\eta$  轴顺时针方向转动  $\varphi_2$  角(侧向摆动角)，使  $x'_d$  与  $z_d$  轴分别转至  $\xi$  和  $\zeta$  轴的位置， $\xi$  与弹轴重合。其基以  $e_a$  表示。

#### (2) 第二弹轴系

该坐标系以  $o - \xi \eta' \zeta'$  表示。它可视为由弹道坐标系经两次绕轴旋转得到：先将  $o - x_2 y_2 z_2$  绕  $z_2$  轴转动  $\delta_1$  角(高低攻角)，使  $x_2$  与  $y_2$  轴转至  $x'_2$  和  $\eta'$  的位置；然后再绕  $\eta'$  轴顺时针方向转动  $\delta_2$  角(侧向攻角)，使  $x'_2$  和  $z_2$  轴分别转至  $\xi$  和  $\zeta'$  轴的位置， $\xi$  与弹轴重合。其基以  $e_a$  表示。

这两种弹轴系的第一轴都与弹轴重合，它们各自第二轴之间的夹角与各自第三轴之间的夹角均为  $\alpha_a$ ；当速度矢量  $v$  偏离理想弹道切线方向较小，及侧向攻角  $\delta_2$  较小时， $\alpha_a$  很小，可认为两坐标系近似重合。第一弹轴系用于建立弹道方程，第二弹轴系用于计算与攻角有关的气动力。

①  $o - x_2 y_2 z_2$  及下面弹体系  $o - x_1 y_1 z_1$ 、弹轴系  $o - \xi \eta \zeta$  是我国军标规定的术语及符号。



### 7. 弹体坐标系(body axes)

弹体坐标系以  $o - x_1 y_1 z_1$  (或  $o - x_b y_b z_b$ ) 表示。其三轴与弹体固联,  $x_1$  轴与弹体纵轴一致, 其余两轴在弹体赤道平面内。  $o - x_1 y_1 z_1$  系可视为第一弹轴系  $o - \xi \eta \zeta$  绕  $\xi$  转动  $\gamma$  角(滚转角或自转角)而成。该坐标系的基以  $e_b$  表示。

### 8.2.2 各坐标系(及基)之间的关系

了解各坐标系间的关系, 目的在于将一个坐标系内的物理量, 转换到另一个坐标系中去。比如推力沿弹轴方向, 是在弹轴坐标系内, 但建立质心运动方程是在弹道坐标系内, 就须把弹轴坐标系内的推力转换到弹道坐标系中去, 这可通过坐标变换。从两坐标系间的投影关系, 确定方向余弦表, 不仅可以用来变换点在空间位置的坐标, 而且用来变换任何可用矢量表示的量。变换公式的一般形式可从表 8.1 得到。

表 8.1 方向余弦表的一般形式

矢 量 投 影	$x$	$y$	$z$
$x'$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$
$y'$	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$
$z'$	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$

记坐标变换矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

则表 8.1 中的坐标转换关系写成下式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}^T = C \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \quad (8.2)$$

由线性代数知, 坐标变换矩阵为方向余弦矩阵, 它是正交阵, 其转置矩阵与逆矩阵相等。

最简单的变换矩阵, 是某一基被视为由另一基绕其某一基矢量转动一个有限角度而得, 它们之间的坐标变换矩阵是最简单的方向余弦矩阵, 该矩阵由所绕转轴及转动角所决定。

(1) 基  $e_q$  绕  $e_{q1}$  逆时针方向转动角  $\alpha$ , 至基  $e_p$ , 则方向余弦矩阵为

$$C_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

(2) 基  $e_q$  绕  $e_{q2}$  逆时针方向转动角  $\beta$ , 至基  $e_p$ , 则方向余弦矩阵为

$$C_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (8.4)$$





(3) 基  $e_q$  绕  $e_{q3}$  逆时针方向转动角  $\sigma$ , 至基  $e_p$ , 则方向余弦矩阵为

$$C_3(\sigma) = \begin{bmatrix} \cos\sigma & \sin\sigma & 0 \\ -\sin\sigma & \cos\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

$C_1(\alpha)$ 、 $C_2(\beta)$ 、 $C_3(\sigma)$  是三种基本的坐标变换矩阵, 其脚注表示所围绕的转轴标号, 括号内的量是逆时针方向转动的角度。借助于这三种矩阵, 可确定任何两坐标系之间的转换关系。

在外弹道学中, 各坐标系之间的关系由它们相互间的转角完全确定, 如图 8.1 所示。

其中  $\theta_1$ ——高低倾角, 由平动系统  $oz$  轴逆时针转动而得;

$\psi_1$ ——高低偏角, 理想弹道系统  $oz_i$  轴逆时针转动而得,

$$\psi_1 = \theta_1 - \theta_i \quad (8.6)$$

$\psi_2$ ——侧向偏角, 速度  $v$  与平面  $x_i oy_i$  的夹角, 右偏为正;

$\varphi_1$ ——高低摆动角,

$$\varphi_1 = \varphi_a - \theta_i \quad (8.7)$$

$\theta_r$ ——相对倾角;

$\psi_r$ ——相对偏角;

其他符号已在前面述及。

以  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_z$  表示  $v$  在平动系中的投影, 在有纵风  $w_x$ 、铅直风  $w_y$  和横风  $w_z$  时, 相对速度  $v_r$  为

$$v_r = (v_x - w_x, v_y - w_y, v_z - w_z) \quad (8.8)$$

且

$$v_r = [(v_x - w_x)^2 + (v_y - w_y)^2 + (v_z - w_z)^2]^{1/2} \quad (8.9)$$

$$\psi_r = \arcsin[(v_z - w_z)/v_r] \quad (8.10)$$

$$\theta_r = \arcsin[(v_y - w_y)/(v_r \cos \psi_r)] \quad (8.11)$$

依据基本变换矩阵(8.3)~(8.5)的含义, 并按照各弹道角度的定义, 易于由图 8.1 中的关系直接写出下列坐标变换矩阵:

$$C_{id} = C_3(\theta_i) \quad (8.12)$$

$$C_{td} = C_2(-\psi_2)C_3(\theta_1) \quad (8.13)$$

$$C_{ad} = C_2(-\varphi_2)C_3(\varphi_a) \quad (8.14)$$

$$C_{rd} = C_2(-\psi_r)C_3(\theta_r) \quad (8.15)$$

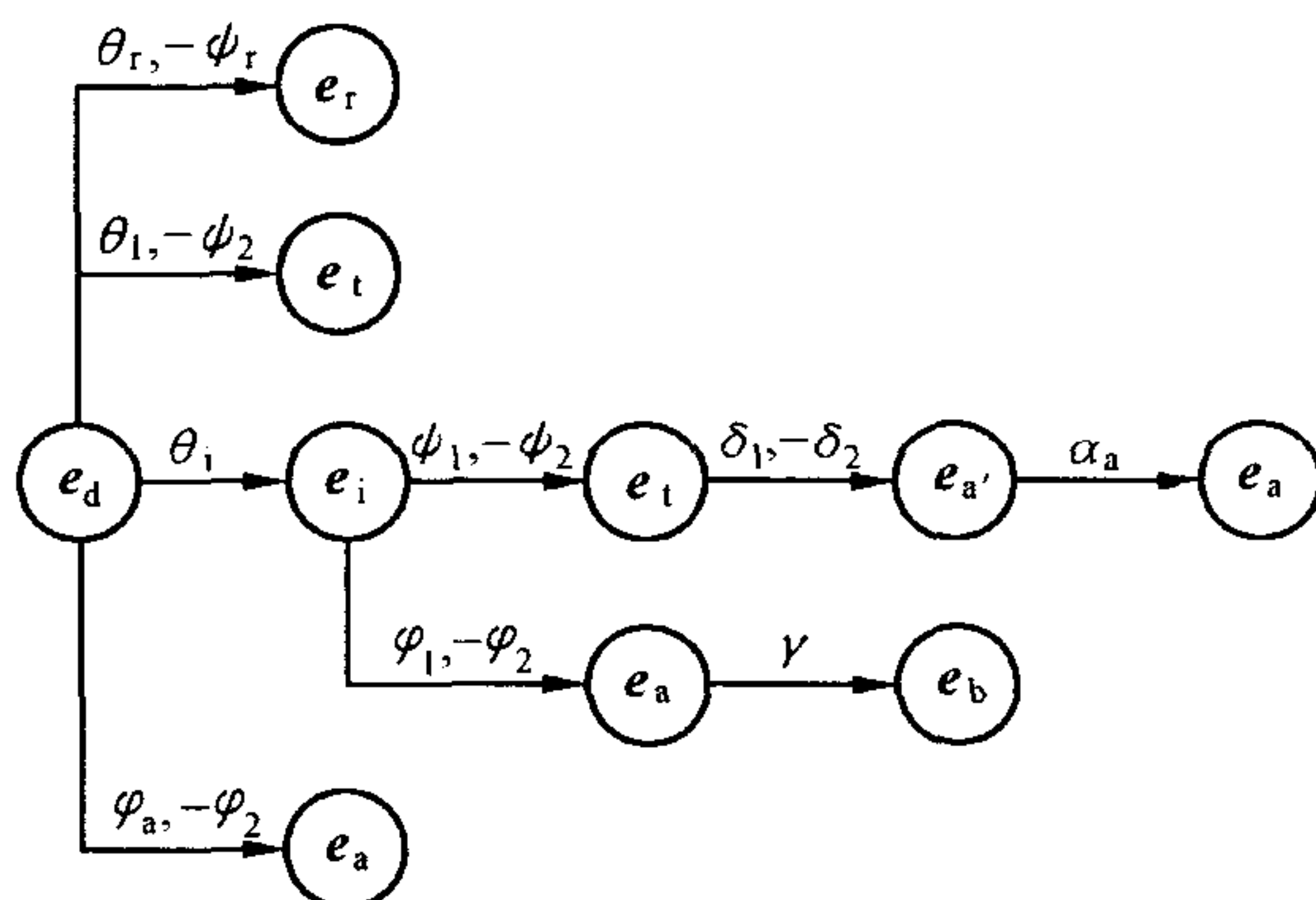


图 8.1 各基之间的关系



$$C_{ti} = C_2(-\psi_2)C_3(\psi_1) \quad (8.16)$$

$$C_{ai} = C_2(-\varphi_2)C_3(\varphi_1) \quad (8.17)$$

$$C_{a't} = C_2(-\delta_2)C_3(\delta_1) \quad (8.18)$$

$$C_{aa'} = C_1(\alpha_a) \quad (8.19)$$

$$C_{ba} = C_1(\gamma) \quad (8.20)$$

式中  $C_{pq}$  是基  $e_q$  相对于基  $e_p$  的方向余弦矩阵, 即矢量坐标从基  $e_q$  转换到基  $e_p$  中的坐标变换矩阵。借助这些矩阵不仅实施坐标变换, 而且便于对有关的弹道角度建立函数关系式。比如弹轴与  $v_r$  之间的夹角  $\delta_r$ , 可分解为高低和侧向两个分量  $\delta_{r1}$  和  $\delta_{r2}$ , 它们与基  $e_a$ 、 $e_{a'}$  之夹角  $\alpha_{ar}$  三者之间的关系, 可由基之间的转换关系得到函数式。实际上, 由图 8.1 可见, 基  $e_r$  转换到基  $e_a$  可由两种不同途径达到, 一是经由基  $e_d$ , 一是经由基  $e_{a'}$ , 即

$$e_r \xrightarrow{C_{dr}} e_d \xrightarrow{C_{ad}} e_a$$

$$e_r \xrightarrow{C_{a'r}} e_{a'} \xrightarrow{C_{aa'}} e_a$$

则

$$C_1(\alpha_{ar})C_{a'r} = C_{ad}C_{rd}^T \quad (8.21)$$

式中  $C_{a'r}$  仿式(8.18)为

$$C_{a'r} = C_2(-\delta_{r2})C_3(\delta_{r1}) \quad (8.22)$$

将式(8.21)展开, 并对等号两边有关的矩阵元素进行比较, 使得

$$\sin\delta_{r2} = \sin\varphi_2\cos\psi_r - \sin\psi_r\cos\varphi_2\cos(\varphi_a - \theta_r) \quad (8.23)$$

$$\sin\delta_{r1} = \sin(\varphi_a - \theta_r)\cos\varphi_2/\cos\delta_{r2} \quad (8.24)$$

$$\sin\alpha_{ar} = \sin(\varphi_a - \theta_r)\sin\psi_r/\cos\delta_{r2} \quad (8.25)$$

类似的方法可得如下关系式

$$\sin\delta_2 = \sin\varphi_2\cos\psi_2 - \sin\psi_2\cos\varphi_2\cos(\varphi_a - \theta_1) \quad (8.26)$$

$$\sin\delta_1 = \sin(\varphi_a - \theta_1)\cos\varphi_2/\cos\delta_2 \quad (8.27)$$

$$\sin\alpha_a = \sin(\varphi_a - \theta_1)\sin\psi_2/\cos\delta_2 \quad (8.28)$$

由式(8.25)、(8.28)看出, 当  $\psi_r$ 、 $\delta_{r2}$ 、 $(\varphi_a - \theta_r)$  以及  $\psi_2$ 、 $\delta_2$ 、 $(\varphi_a - \theta_1)$  为小量时,  $\alpha_{ar}$  和  $\alpha_a$  为二阶小量。

式(8.23)~(8.28)之类的关系式称为联系方程, 其关联形式是多种多样的。不过当采用计算机运算时, 并不需要给出这些显示关系式, 它们能够由矩阵运算结果直接解出, 而不需要人工求解。为加深理解和运用上述关系式, 下面举例说明。

### 1. 弹道系与平动系的关系

弹道系是表示速度矢量  $v$  的方向的, 相对  $o-xyz$  来说, 可由两个角度确定(图 8.2):

高低倾角  $\theta_1$ ——速度矢量  $v$  在  $xoy$  (铅垂面) 内的投影与水平面的夹角,  $v$  向上偏为正;

侧向偏角  $\psi_2$ —— $v$  矢量与  $xoy$  面的夹角,  $v$  偏向射击平面右方为正。





坐标系  $o - x_2 y_2 z_2$  可看作是坐标系  $o - xyz$  经两次旋转得到的。第一次绕水平轴  $oz$  旋转  $\theta_1$  角, 转至  $ox' y_2$  位置, 转动角速度矢量  $\dot{\theta}_1$  沿  $oz$  轴方向。第二次继之绕  $oy_2$  轴顺时针方向旋转  $\psi_2$  角,  $ox_2$  轴恰与  $v$  重合, 旋转角速度  $\dot{\psi}_2$  沿  $oy_2$  轴负方向。此二坐标系的关系完全由  $\theta_1$  和  $\psi_2$  确定。由图 8.2 知, 速度  $v$  在平动系  $o - xyz$  上的三个分量(以  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  表示)为

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \psi_2 \cos \theta_1 = v_x \\ \dot{y} = v \cos \psi_2 \sin \theta_1 = v_y \\ \dot{z} = v \sin \psi_2 = v_z \end{cases} \quad (8.29)$$

这就是火箭质心移动的运动学方程式。

式(8.29)中的  $\cos \psi_2 \cos \theta_1$ ,  $\cos \psi_2 \sin \theta_1$  和  $\sin \psi_2$  正是  $ox_2$  轴对于  $o - xyz$  三轴之间夹角的方向余弦, 它们是  $ox_2$  轴上单位矢量在  $o - xyz$  三轴上的投影值。很明显, 若是事先知道了这些方向余弦, 就可以不费力地把运动方程写出。同样, 可以把  $oy_2$  轴上的单位矢量投影到  $o - xyz$  轴上去, 又得到  $oy_2$  轴对  $o - xyz$  三轴夹角间方向余弦为:  $-\sin \theta_1$ ,  $\cos \theta_1$  及 0。再以同样方法, 得到  $oz_2$  轴上的单位矢量在  $o - xyz$  三轴上的投影为:  $-\sin \psi_2 \cos \theta_1$ ,  $-\sin \psi_2 \sin \theta_1$  及  $\cos \psi_2$ 。归结上述九个方向余弦, 排列于表 8.2 中。

表 8.2 弹道系与平动系间的方向余弦

坐标轴	$ox_2$	$oy_2$	$oz_2$
$ox$	$\cos \psi_2 \cos \theta_1$	$-\sin \theta_1$	$-\sin \psi_2 \cos \theta_1$
$oy$	$\cos \psi_2 \sin \theta_1$	$\cos \theta_1$	$-\sin \psi_2 \sin \theta_1$
$oz$	$\sin \psi_2$	0	$\cos \psi_2$

表 8.2 中的 9 个方向余弦就是弹道系向平动系的坐标变换矩阵  $C_{dt}$ , 由式(8.13),

$$C_{dt} = C_{td}^T = [C_2(-\psi_2)C_3(\theta_1)]^T = C_3^T(\theta_1)C_2^T(-\psi_2)$$

再将式(8.4)、(8.5)代入即得。

## 2. 第二弹轴坐标系与弹道坐标系间的关系

根据  $o - \xi \eta' \zeta'$  与  $o - x_2 y_2 z_2$  两坐标系的定义。弹轴与速度之间的相对位置可以用两个角度确定(图 8.3):

高低攻角  $\delta_1$ ——弹轴  $o\xi$  在平面  $x_2 oy_2$  上的投影与  $ox_2$  的夹角, 当弹轴在  $v$  上方时为正;

侧向攻角  $\delta_2$ ——弹轴  $o\xi$  与平面  $x_2 oy_2$  的夹角, 弹轴在该平面的右侧为正。

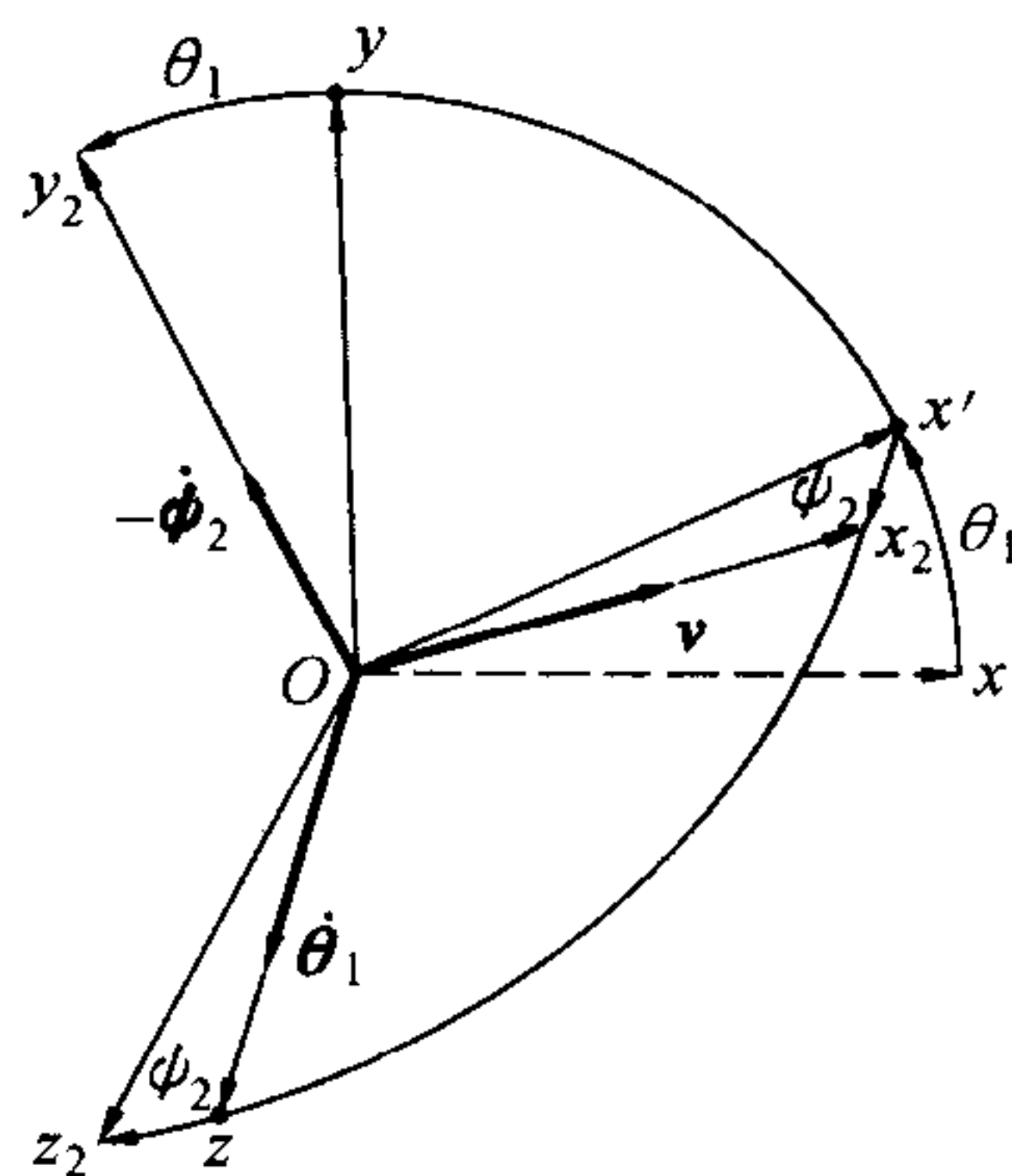


图 8.2 弹道系与平动系

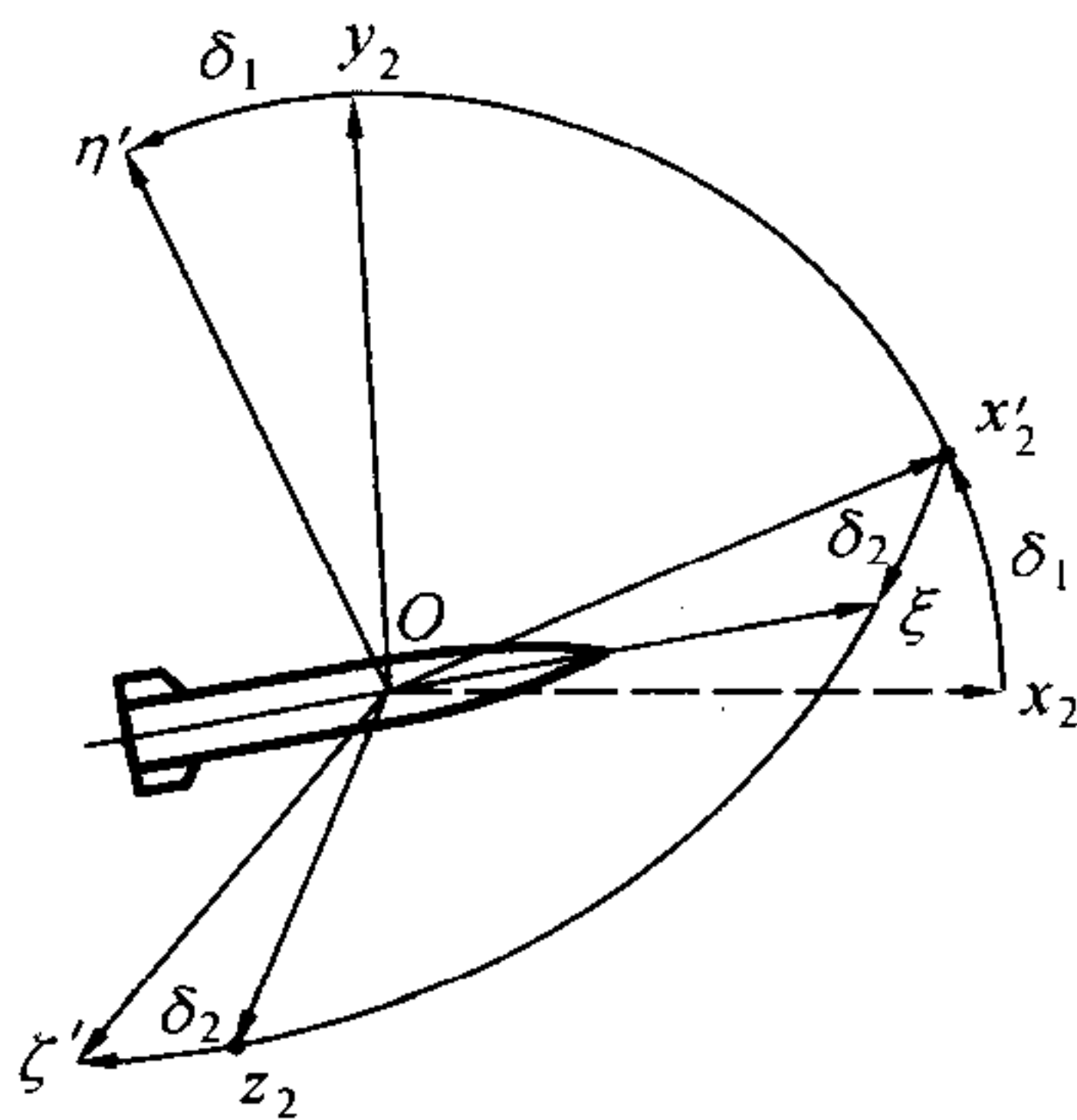


图 8.3 弹轴系与弹道系



$o - \xi\eta\zeta$  这个坐标系的方位,亦可视为  $o - x_2y_2z_2$  经两次旋转而得到的。试比较图 8.3 与图 8.2 便立即发现两个图中所表示的坐标系之间的关系是类似的,此处  $\delta_1$  相当于  $\theta_1$ ,  $\delta_2$  相当于  $\psi_2$ 。于是就直接由表 8.2 得到  $o - \xi\eta\zeta$  与  $o - x_2y_2z_2$  间的关系,诸方向余弦列于表 8.3 中。表中的方向余弦构成了由第二弹轴系向弹道系的坐标变换矩阵  $C_{la'}$ ,它可由式(8.18)得出。

表 8.3 第二弹轴坐标系与弹道坐标系间的关系

坐标轴	$o\xi$	$o\eta'$	$o\zeta'$
$ox_2$	$\cos\delta_2\cos\delta_1$	$-\sin\delta_1$	$-\sin\delta_2\cos\delta_1$
$oy_2$	$\cos\delta_2\sin\delta_1$	$\cos\delta_1$	$-\sin\delta_2\sin\delta_1$
$oz_2$	$\sin\delta_2$	0	$\cos\delta_2$

### 3. 弹体坐标系与第一弹轴坐标系间的关系

从两坐标系的定义知道,它们之间仅相差一个角度(滚转角) $\gamma$ (图 8.4),规定绕轴  $o\xi$  逆时针转动为正向。仿照上述方法,易知两坐标系间的方向余弦如表 8.4 所示。此可由式(8.20)取转置得到。

表 8.4 弹体坐标系与第一弹轴坐标系间的关系

坐标轴	$ox_1$	$oy_1$	$oz_1$
$o\xi$	1	0	0
$o\eta$	0	$\cos\gamma$	$-\sin\gamma$
$o\zeta$	0	$\sin\gamma$	$\cos\gamma$

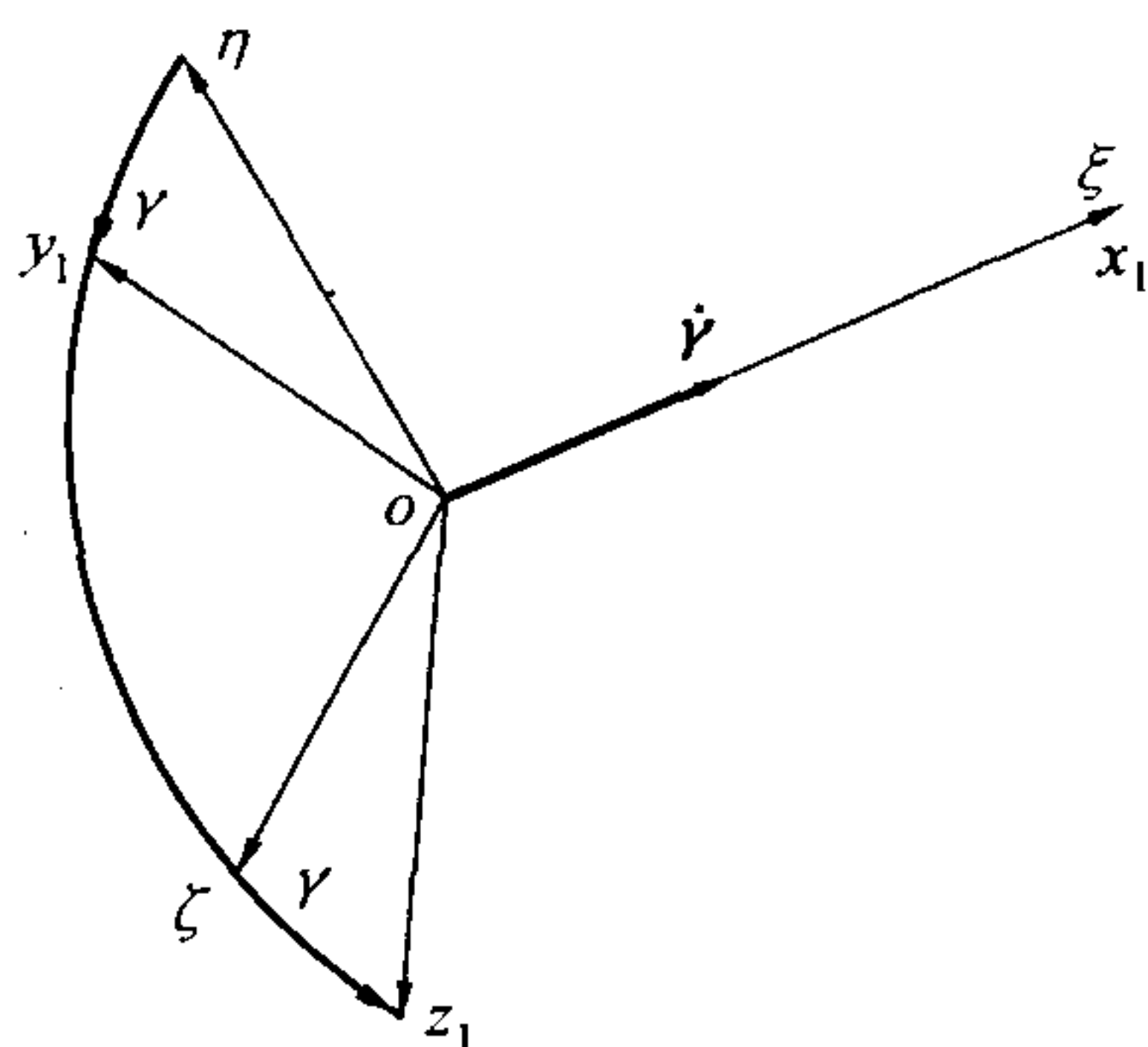


图 8.4 弹体系与弹轴系

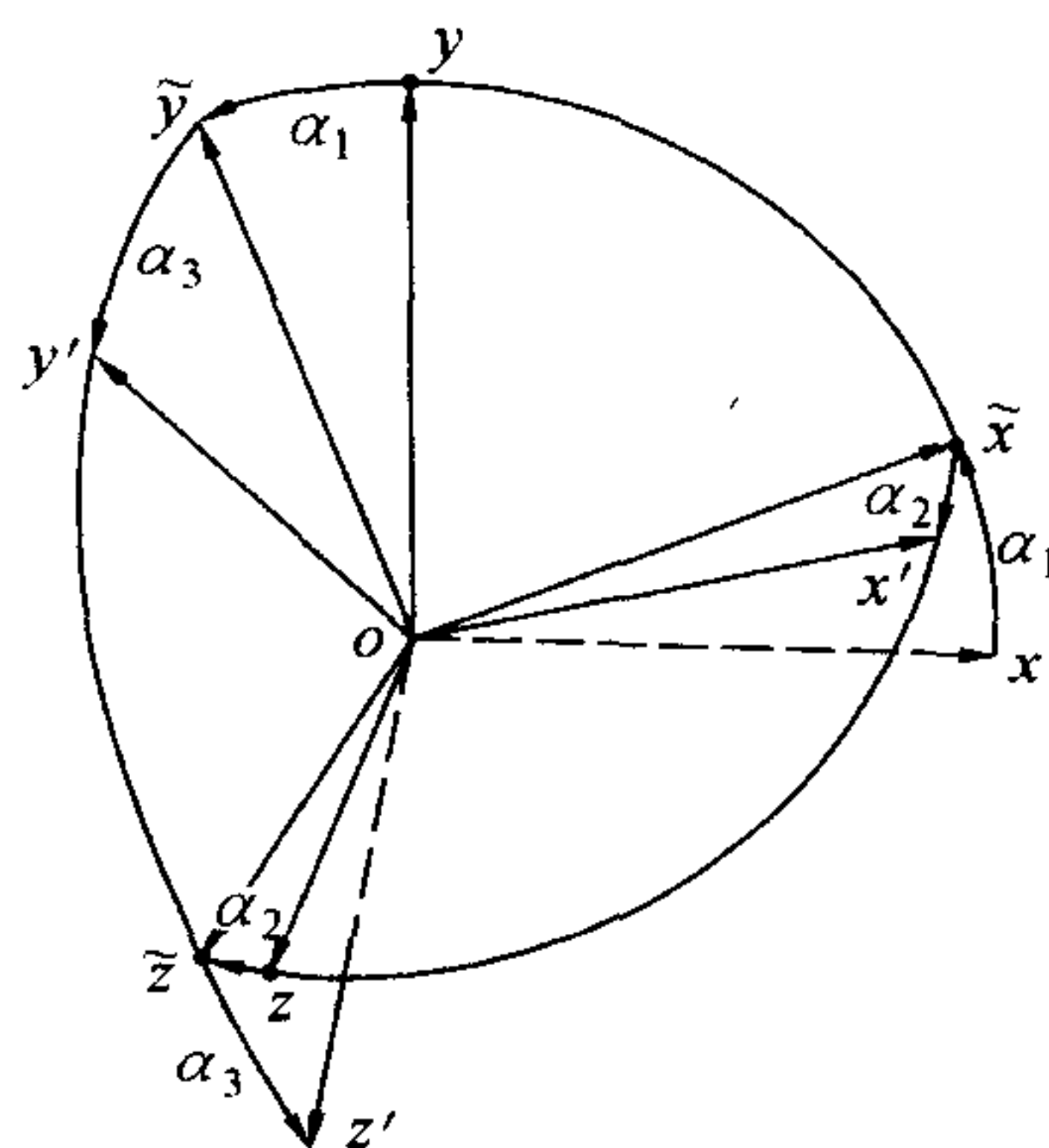


图 8.5 坐标系的转换

### 4. 坐标变换矩阵的通用形式

根据上述几种坐标系的相互关系,可综合成下列两坐标系  $o - xyz$  和  $o - x'y'z'$  之间的一般关系。 $o - x'y'z'$  可视为  $o - xyz$  经三次旋转而得:第一次绕  $oz$  轴逆时针方向转动  $\alpha_1$  角,转到  $\tilde{o}\tilde{x}\tilde{y}$  位置;第二次绕  $\tilde{o}\tilde{y}$  轴顺时针方向转动  $\alpha_2$  角,转到  $ox'\tilde{z}$  位置;第三次绕  $ox'$  轴逆时针方向转





动  $\alpha_3$  角, 转到  $oy'z'$  位置, 如图 8.5 所示。则坐标系  $o-xyz$  向  $o-x'y'z'$  的转换矩阵为

$$C = C_1(\alpha_3)C_2(-\alpha_2)C_3(\alpha_1)$$

将式(8.3)~(8.5)代入, 使得

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 \\ 0 & -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1\cos\alpha_2 & \sin\alpha_1\cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ -\sin\alpha_1\cos\alpha_3 & \cos\alpha_1\cos\alpha_3 & \cos\alpha_2\sin\alpha_3 \\ -\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 & -\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 & \cos\alpha_2\cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1\sin\alpha_3 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_3 & \cos\alpha_2\cos\alpha_3 \\ -\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 & -\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 & \cos\alpha_2\cos\alpha_3 \end{bmatrix}$$

综上所述, 对于基  $e_q$  向基  $e_p$  的坐标转换关系由式(8.2)为

$$[x_p \ y_p \ z_p]^T = C_{pq}[x_q \ y_q \ z_q]^T$$

由此推出任意三个基  $e_p, e_q, e_r$  之间的坐标变换矩阵关系:

$$C_{pq} = C_{pr}C_{rq} \quad (8.30)$$

还可任意递推, 即

$$C_{pq} = \prod_{k=p}^{q-1} C_{k, k+1} \quad (8.31)$$

方向余弦矩阵是正交阵, 其逆矩阵等于其转置矩阵, 即

$$C_{pq}^{-1} = C_{pq}^T = C_{qp} \quad (8.32)$$

### 8.3 火箭运动方程组的一般形式

任何自由刚体的运动, 都是由刚体的质心运动和围绕质心运动两种运动的合成。火箭不同于一般刚体, 因为在发动机工作过程中, 它是一个变质量质点系。在第一章中曾指出, 像火箭这样的变质量物体, 在建立弹体运动方程时, 完全可以当作常质量物体来处理问题, 只不过在外力中额外加上推力罢了。当然, 还有因重心相对弹体移动及弹体在空中摆动而引起的燃气惯性力等, 在一般情况下, 是可以略去的。

#### 8.3.1 在弹道坐标系中的火箭质心运动方程

火箭质心相对地面坐标系  $o-xyz$  的运动方程之矢量形式为

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (8.33)$$

式中,  $F$  表示包括推力和重力在内的一切外力, 此外还有柯里奥利(Coriolis)惯性力。



在弹道坐标系内建立质心运动方程,而弹道坐标系  $o-x_2y_2z_2$  是一个动参考系,其转动角速度为(图 8.2)

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\psi}_2 \mathbf{e}_2 \quad (8.34)$$

它在  $o-x_2y_2z_2$  三轴上的投影分别是

$$\begin{cases} \Omega_{x_2} = \dot{\theta}_1 \sin \psi_2 \\ \Omega_{y_2} = -\dot{\psi}_2 \\ \Omega_{z_2} = \dot{\theta}_1 \cos \psi_2 \end{cases} \quad (8.35)$$

如果用  $d_r \mathbf{v} / dt$  表示  $\mathbf{v}$  相对动坐标系  $o-x_2y_2z_2$  对时间  $t$  的导数,称为  $\mathbf{v}$  的相对导数,那么便有

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (8.36)$$

而  $\mathbf{v}$  在  $o-x_2y_2z_2$  三轴上的投影为

$$\begin{cases} v_{x_2} = v \\ v_{y_2} = 0 \\ v_{z_2} = 0 \end{cases} \quad (8.37)$$

将式(8.36)代入式(8.33),再将式(8.35)和式(8.37)代入,并用  $\mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}$  表示  $o-x_2y_2z_2$  三轴上的单位矢量,则得

$$\mathbf{e}_{12} m \frac{dv}{dt} + m \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{13} \\ \dot{\theta}_1 \sin \psi_2 & -\dot{\psi}_2 & \dot{\theta}_1 \cos \psi_2 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{F}$$

如果用  $F_{x_2}, F_{y_2}, F_{z_2}$  表示  $\mathbf{F}$  在  $o-x_2y_2z_2$  三轴上的分量,那么就得标量形式的质心动力学方程组

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F_{x_2} \\ m v \cos \psi_2 \frac{d\theta_1}{dt} = F_{y_2} \\ m v \frac{d\psi_2}{dt} = F_{z_2} \end{cases} \quad (8.38)$$

显然,这是第一章理想弹道动力学方程的扩充。

从方程组(8.38)看出,  $F_{x_2}, F_{y_2}, F_{z_2}$  三者对速度变化的作用是各不相同的。  $F_{x_2}$  是切向力,改变  $v$  的大小,火箭飞行是加速运动或是减速运动,完全取决于  $F_{x_2}$ ,它为正时起加速作用,反之起减速作用。  $F_{y_2}$  是铅垂面内的法向力,使速度方向在铅垂面内发生变化,它为正时,弹道向上弯曲,为负时向下弯曲。  $F_{z_2}$  是横向力,使速度方向偏离射击面,  $F_{z_2}$  为正时,使弹道向右偏





转,反之向左偏转。

### 8.3.2 火箭转动运动方程式

为了建立火箭转动运动方程式,应用动量矩定理

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M} \quad (8.39)$$

式中,  $\mathbf{M}$  包括推力矩在内的一切外力矩;  $\mathbf{K}$  为弹体转动动量矩矢量。火箭在发动机工作期间是变质点系,运用动量矩定理时必须注意刚化原理<sup>[2,4,5]</sup>。在弹轴坐标系  $o - \xi\eta\zeta$  中来建立转动方程,对火箭运动而言,所得到的方程式形式简单明了。

如图 8.6 所示,弹轴坐标系  $o - \xi\eta\zeta$  与平动坐标系  $o - xyz$  之间的关系是由两个角度  $\varphi_a$  和  $\varphi_2$  所确定的:  $\varphi_a$  是弹轴高低角,是弹轴在射击面(铅垂面)内的投影与水平面的夹角。 $\varphi_2$  是侧向摆动角,是弹轴与射击面的夹角。

弹轴坐标系  $o - \xi\eta\zeta$  是由平动坐标系  $o - xyz$  经两次旋转得到的,且相对  $o - xyz$  而言,其转动角速度  $\omega_a$  为

$$\omega_a = \dot{\varphi}_a + \dot{\varphi}_2 \quad (8.40)$$

弹体坐标系  $o - x_1y_1z_1$  与弹轴坐标系  $o - \xi\eta\zeta$  仅相差一个自转角  $\gamma$ ,自转角速度  $\dot{\gamma}$  沿  $o\xi$  方向。全弹的转动角速度  $\omega$  为<sup>①</sup>

$$\omega = \dot{\gamma} + \omega_a \quad (8.41)$$

另外,根据运动合成原理,类似式(8.36),  $d\mathbf{K}/dt$  可分解为对  $o - \xi\eta\zeta$  坐标系的相对导数  $d_r\mathbf{K}/dt$  与因  $o - \xi\eta\zeta$  以角速度  $\omega_a$  转动时牵连速度之和,即

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d_r\mathbf{K}}{dt} + \omega_a \times \mathbf{K}$$

代入到式(8.39)得转动方程的标量形式如下

$$\begin{cases} \frac{dK_\xi}{dt} + \omega_{a\eta}K_\zeta - \omega_{a\zeta}K_\eta = M_\xi \\ \frac{dK_\eta}{dt} + \omega_{a\zeta}K_\xi - \omega_{a\xi}K_\zeta = M_\eta \\ \frac{dK_\zeta}{dt} + \omega_{a\xi}K_\eta - \omega_{a\eta}K_\xi = M_\zeta \end{cases} \quad (8.42)$$

① 忽略地球自转角速度,因其数值同  $\dot{\gamma}$  或  $\omega_a$  比较而言是微量。

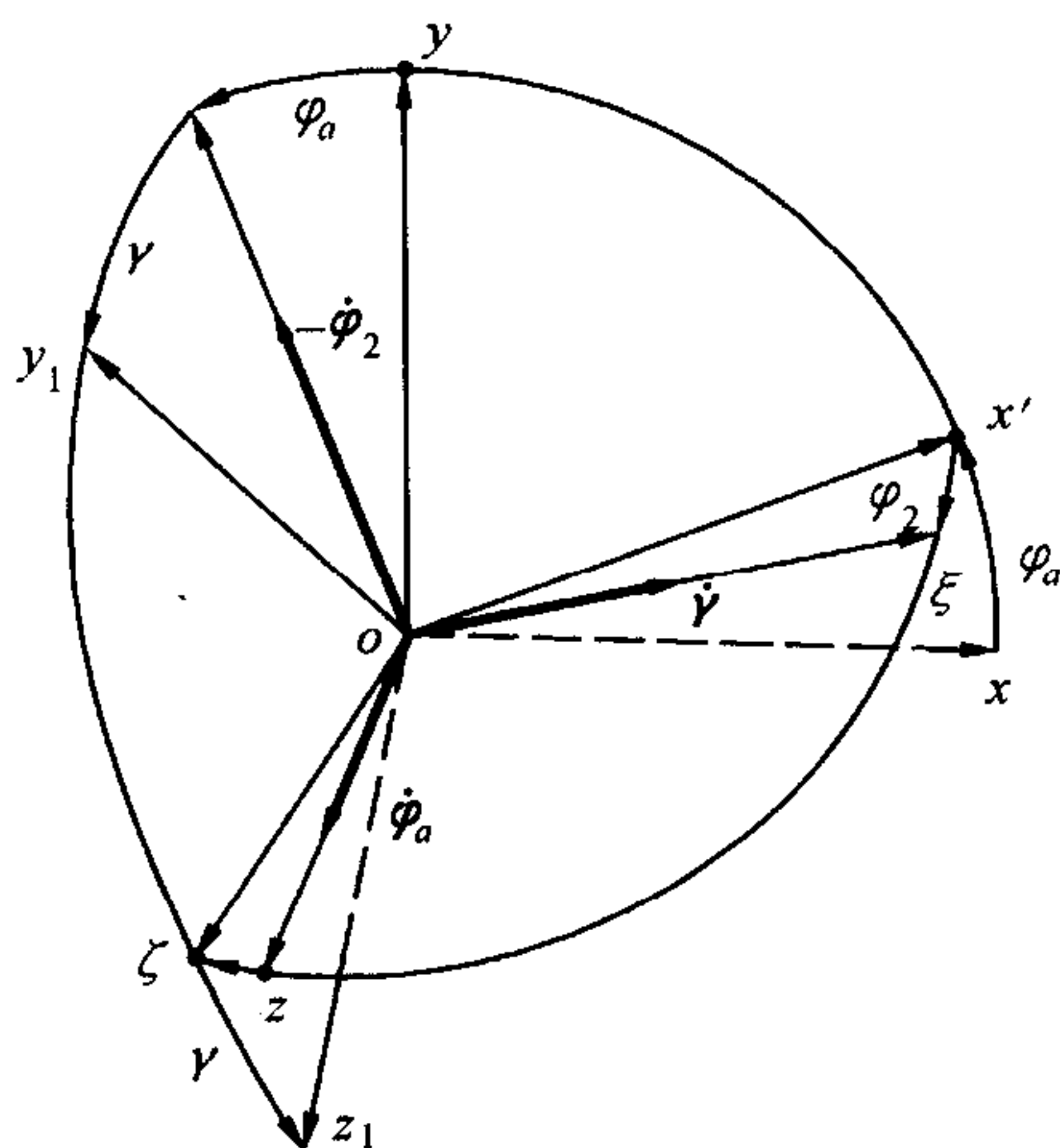


图 8.6 弹体转速诸分量



其中脚注  $\xi, \eta, \zeta$  表示相应诸量在该轴上的投影。 $\omega_a$  的三个分量组成的列阵依式(8.40)和图 8.6 知<sup>①</sup>

$$[\omega_a] = \begin{bmatrix} \omega_{a\xi} \\ \omega_{a\eta} \\ \omega_{a\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_a \sin \varphi_2 \\ -\dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_a \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (8.43)$$

至于  $K$  在  $o - \xi\eta\zeta$  内的表达式,则要作一些推导。由理论力学知,对同一坐标系而言,动量矩矩阵为转动惯量矩阵与全弹转动角速度矩阵之积,即

$$[K] = J[\omega] \quad (8.44)$$

式中  $[\omega]$  由式(8.41)及图 8.6 知

$$[\omega] = \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} + \dot{\varphi}_a \sin \varphi_2 \\ -\dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_a \cos \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} + \omega_{a\xi} \\ \omega_{a\eta} \\ \omega_{a\zeta} \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

而

$$J = \begin{bmatrix} J_{\xi\xi} & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_{\eta\eta} & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

$J_{\xi\xi}, J_{\eta\eta}, J_{\zeta\zeta}$  表示弹体对  $\xi, \eta, \zeta$  轴的转动惯量;  $J_{\xi\eta}, J_{\xi\zeta}, \dots$  表示惯性积。

需要具体地求出式(8.46)。考虑到质量分布不均,弹体惯量主纵轴的方向将与几何纵轴不一致,就是说,二者存在一个夹角  $\beta_D$ ,在弹体坐标系  $o - x_1 y_1 z_1$  内,可用两个分量表示:

$\beta_{D1}$ ——中心惯量主纵轴在  $x_1 o y_1$  平面内的投影与  $o x_1$  轴的夹角;

$\beta_{D2}$ ——中心惯量主纵轴与  $x_1 o y_1$  平面内的夹角。

显然,由中心惯量主轴组成的坐标系  $o - x'_1 y'_1 z'_1$  可以通过弹体坐标系  $o - x_1 y_1 z_1$  经过两次旋转得到。对  $o - x'_1 y'_1 z'_1$  坐标系来说,惯量矩阵具有下列简单形式

$$J' = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

其中第二个等式基于火箭是轴对称体,它绕轴  $y'_1$  和  $z'_1$  的转动惯量  $J_y$  和  $J_z$  是相等的,即赤道转动惯量  $A$ ;  $J_x$  是极转动惯量,近似等于绕纵轴的转动惯量,以  $C$  记之。

可以通过坐标变换来把  $J'$  转换到  $J$ ,下面作此推导。事实上,弹体中心惯量主轴坐标系

<sup>①</sup> 就严格的数学意义而论,任一矢量与其坐标列阵是不能等同的。若将某坐标系三轴上的单位矢量以  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  表示,任一矢量  $\vec{B}$  的三坐标  $B_1, B_2, B_3$ , 则  $\vec{B} = B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3$ 。若写成矩阵形式,以黑体字表示坐标列阵:  $B = [B_1 \ B_2 \ B_3]^T$ ,  $\vec{e} = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3]^T$ , 便有  $\vec{B} = B^T \vec{e}$ 。显然矢量  $\vec{B}$  与其坐标列阵  $B$  是有区别的,不可混为一谈! 鉴于出版规定矢量与矩阵符号都采用黑体字,为了区别,本书往后将任一矢量  $\vec{B}$  仍以黑体  $B$  表示,其坐标列阵以  $[B]$  表示。





$o - x_1' y_1' z_1'$ , 可认为是弹轴坐标系转到弹体坐标系, 再转到中心惯量主轴坐标系这一过程所得到的。并考虑到  $\beta_{D1}$  和  $\beta_{D2}$  很小, 可取  $\sin\beta_{D1} \approx \beta_{D1}$ ,  $\sin\beta_{D2} \approx \beta_{D2}$ ,  $\cos\beta_{D1} \approx 1$ ,  $\cos\beta_{D2} \approx 1$ , 并略去二阶小量, 则得  $o - \xi\eta\zeta$  到  $o - x_1' y_1' z_1'$  的坐标变换矩阵为

$$C_{b'a} = C_2(-\beta_{D2}) C_3(\beta_{D1}) C_1(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{D\eta} & \beta_{D\zeta} \\ -\beta_{D1} & \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\beta_{D2} & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (8.48)$$

式中

$$\begin{cases} \beta_{D\eta} = \beta_{D1} \cos\gamma - \beta_{D2} \sin\gamma \\ \beta_{D\zeta} = \beta_{D1} \sin\gamma + \beta_{D2} \cos\gamma \end{cases} \quad (8.49)$$

这样, 弹轴坐标系内的矩阵  $[K]$ 、 $[\omega]$  便与惯量主轴坐标系内的  $[K']$ 、 $[\omega']$  存在下列转换关系

$$\begin{cases} [K'] = C_{b'a} [K] \\ [\omega'] = C_{b'a} [\omega] \end{cases} \quad (8.50)$$

由理论力学知

$$[K] = J [\omega] \quad (8.51)$$

$$[K'] = J' [\omega'] \quad (8.52)$$

将式(8.50)代入式(8.52)得

$$C_{b'a} [K] = J' C_{b'a} [\omega]$$

将上式两边左乘  $C_{b'a}^T$ , 并注意到  $C_{b'a}$  是正交矩阵, 存在下列关系

$$C_{b'a}^T C_{b'a} = I$$

$I$  是单位矩阵。则

$$[K] = C_{b'a}^T J' C_{b'a} [\omega]$$

此式与(8.51)式比较, 便知

$$J = C_{b'a}^T J' C_{b'a} \quad (8.53)$$

这是一个很重要的关系式, 它给出了不同坐标系内惯量矩阵的转换关系, 将式(8.47)和式(8.48)两式代入, 经矩阵运算并整理得

$$J = \begin{bmatrix} C & -(A-C)\beta_{D\eta} & -(A-C)\beta_{D\zeta} \\ -(A-C)\beta_{D\eta} & A & 0 \\ -(A-C)\beta_{D\zeta} & 0 & A \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

顺便指出, 当考虑到质心偏离几何中心时, 上式也是基本上正确的, 因为它的影响是高阶小量。于是动量矩列矩阵为



$$\begin{bmatrix} K_\xi \\ K_\eta \\ K_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -(A-C)\beta_{D\eta} & -(A-C)\beta_{D\zeta} \\ -(A-C)\beta_{D\eta} & A & 0 \\ -(A-C)\beta_{D\zeta} & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} \quad (8.55)$$

将它代入式(8.42),并注意到式(8.43)和式(8.45)的下列关系

$$\begin{cases} \omega_{a\xi} = \omega_\xi \tan \varphi_2 \\ \omega_{a\eta} = \omega_\eta \\ \omega_{a\zeta} = \omega_\zeta \end{cases} \quad (8.56)$$

方程组(8.42)便成为下列形式(略去一些次要量)

$$\begin{cases} C \frac{d\omega_\xi}{dt} = M_\xi + (A-C)\omega_\xi(\beta_{D\zeta}\omega_\eta - \beta_{D\eta}\omega_\zeta) + (A-C)\frac{d}{dt}(\beta_{D\eta}\omega_\eta + \beta_{D\zeta}\omega_\zeta) \\ A \frac{d\omega_\eta}{dt} + C\omega_\xi\omega_\zeta - A\omega_\xi^2 \tan \varphi_2 = M_\eta + (A-C)\frac{d}{dt}(\beta_{D\eta}\omega_\xi) \\ A \frac{d\omega_\zeta}{dt} - C\omega_\xi\omega_\eta + A\omega_\eta\omega_\zeta \tan \varphi_2 = M_\zeta + (A-C)\frac{d}{dt}(\beta_{D\zeta}\omega_\xi) \end{cases} \quad (8.57)$$

这就是绕心运动动力学方程组比较具体的形式。而绕心运动的运动学方程组,由式(8.45)知

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_a}{dt} = \frac{1}{\cos \varphi_2} \omega_\zeta \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = -\omega_\eta \\ \frac{d\gamma}{dt} = -\omega_\xi - \omega_\zeta \tan \varphi_2 \end{cases} \quad (8.58)$$

### 8.3.3 火箭运动方程组

火箭运动的一般方程组将由式(8.29)、(8.38)、(8.57)和(8.58)组成。其中火箭质量 $m(t)$ 及转动惯量都作为已知函数。考虑有风存在下的一般情况,所求参数有19个,即

$$v, \theta_1, \psi_2, \omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta, \varphi_a, \varphi_2, \gamma, x, y, z, \alpha_{ar}, \theta_r, \psi_r, v_r, \delta_r, \delta_{r1}, \delta_{r2}$$

其中后7个参数将包含在空气动力和力矩中。但只有12个方程式,还需要7个方程,这就是联系方程,它们是式(8.9)~(8.11)、式(8.23)~(8.25),以及

$$\cos \delta_r = \cos \delta_{r1} \cos \delta_{r2} \quad (8.59)$$

这一关系式是明显的,只将弹轴上的单位矢量以两种不同途径向 $v_r(ox_r \text{ 轴})$ 方向投影即得:一是直接向 $v_r(ox_r \text{ 轴})$ 投影;二是先向 $ox_r y_r$ 平面投影,继而向 $ox_r$ 轴投影。

再计及地表曲率,参照方程组(1.76)的推导,取地表切面坐标系的转速 $\omega_e \approx v_x/(r_E + y_g + y)$ 。在该动坐标系内建立运动方程时,需考虑由 $\omega_e$ 引起的牵连运动。

综合上述,得火箭运动方程组如下:





$$m \frac{dv}{dt} = F_{x_2} \quad (1)$$

$$mw \cos \psi_2 \frac{d\theta_1}{dt} = F_{y_2} + m \frac{v_x}{r_E + y_g + y} \quad (2)$$

$$mw \frac{d\psi_2}{dt} = F_{x_2} \quad (3)$$

$$C \frac{d\omega_\xi}{dt} = M_\xi + (A - C) \omega_\xi (\beta_{D\xi} \omega_\eta - \beta_{D\eta} \omega_\xi) + (A - C) \frac{d}{dt} (\beta_{D\eta} \omega_\eta + \beta_{D\xi} \omega_\xi) \quad (4)$$

$$A \frac{d\omega_\eta}{dt} + C \omega_\xi \omega_\eta - A \omega_\xi^2 \tan \varphi_2 = M_\eta + (A - C) \frac{d}{dt} (\beta_{D\eta} \omega_\eta) \quad (5)$$

$$A \frac{d\omega_\xi}{dt} - C \omega_\xi \omega_\eta + A \omega_\eta \omega_\xi \tan \varphi_2 = M_\xi + (A - C) \frac{d}{dt} (\beta_{D\xi} \omega_\xi) \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi_a}{dt} = \frac{1}{\cos \varphi_2} \omega_\xi + \frac{v_x}{r_E + y_g + y} \quad (7)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\omega_\eta \quad (8)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_\xi - \omega_\xi \tan \varphi_2 \quad (9) \quad (8.60)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \psi_2 \cos \theta_1 \left( 1 + \frac{y}{r_E + y_g} \right)^{-1} \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \cos \psi_2 \sin \theta_1 \quad (11)$$

$$\frac{dz}{dt} = v \sin \psi_2 \quad (12)$$

$$v_r = [(v_x - w_x)^2 + (v_y - w_y)^2 + (v_z - w_z)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$\psi_r = \arcsin \frac{v_z - w_z}{v_r} \quad (14)$$

$$\theta_r = \arcsin \frac{v_y - w_y}{v_r \cos \psi_r} \quad (15)$$

$$\delta_{r2} = \arcsin [\sin \varphi_2 \cos \psi_r - \sin \psi_r \cos \varphi_2 \cos (\varphi_a - \theta_r)] \quad (16)$$

$$\delta_{r1} = \arcsin [\sin (\varphi_a - \theta_r) \cos \varphi_2 / \cos \delta_{r2}] \quad (17)$$

$$\delta_r = \arccos (\cos \delta_{r1} \cos \delta_{r2}) \quad (18)$$

$$\alpha_{ar} = \arcsin [\sin (\varphi_a - \theta_r) \sin \psi_r / \cos \delta_{r2}] \quad (19)$$



## 8.4 诸外力和外力矩

### 8.4.1 重力

重力作用在质心上,不会对质心产生力矩。这里把重力场视作平行力场,那么其方向被认为与地面坐标系的  $oy$  轴反向。其表达式为

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} \quad (8.61)$$

质量  $m$  是时间的已知函数,取决于全弹质量和燃气每秒流量。 $\mathbf{g}$  的大小由式(1.20)确定。

根据表 8.2,知  $\mathbf{G}$  在  $o-x_2y_2z_2$  上的三个分量为(构成列矩阵)

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} G_{x_2} \\ G_{y_2} \\ G_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta_1 \cos \psi_2 \\ -mg \cos \theta_1 \\ mg \sin \theta_1 \sin \psi_2 \end{bmatrix} \quad (8.62)$$

### 8.4.2 推力和推力矩

为了获得自转速度,多数火箭采取斜置喷管。也有在燃烧室壁上开切向孔的,其出发点都是为了产生喷气反作用力矩。以涡轮式火箭弹为例来分析一下具体情况。如图 8.7 所示,设有  $\tilde{n}$  个与弹的纵轴交叉成一定角度的斜置喷管。各喷管喉部中心位于直径为  $d^*$  的圆周上,且分布的圆心角相等,为  $360^\circ/\tilde{n}$ 。过喉部中心作与该圆周相切且平行弹轴的平面,喷管轴线便位于该平面内,与弹轴的夹角为  $\epsilon$ ,  $\epsilon$  叫做喷管斜置角。且每个喷管出口端面面积为  $S_{ej}$ 。由每个喷管所产生的推力  $F_{Pj}$  均由动推力  $F'_{Pj}$  和静推力两部分组成(见式(1.6)的推导)。 $F'_{Pj}$  的方向沿喷管轴线,而静推力则仍垂直于喷管出口端面。动推力  $F'_{Pj}$  可分解为火箭轴向分量  $F'_{Pj\xi}$  和垂直于弹轴的切向分量  $F'_{Pj\tau}$  两部分。故轴向总推力为

$$F_P = \tilde{n} [F'_{Pj\xi} + S_{ej}(p_e - p)] = \tilde{n} [F'_{Pj} \cos \epsilon + S_{ej}(p_e - p)]$$

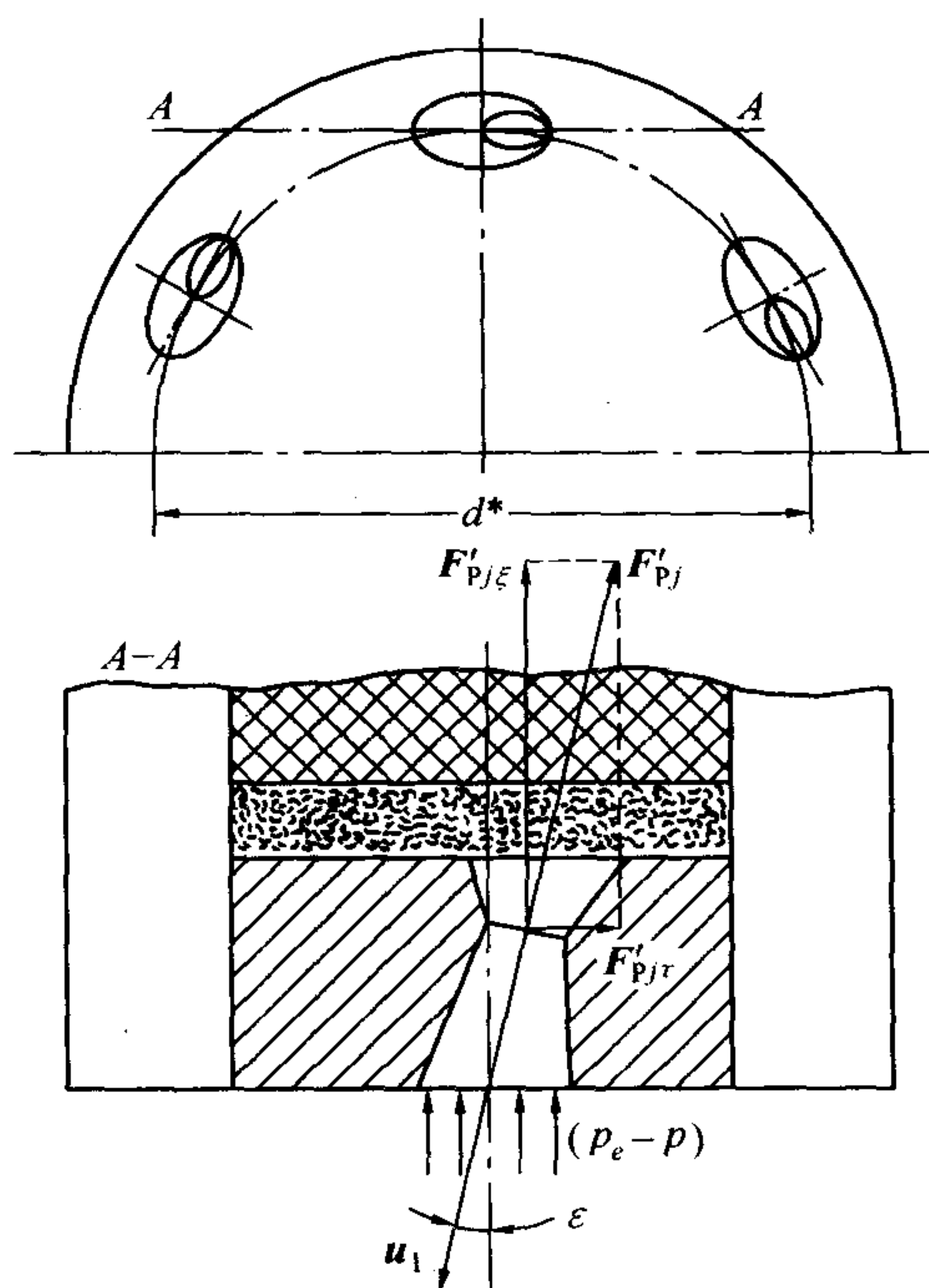


图 8.7 斜置喷管





记  
则

$$S_e = \tilde{n} S_{ej}$$

$$F_P = |\dot{m}| u_1 \cos \epsilon + S_e (p_e - p) \quad (8.63)$$

令

$$u'_{\text{eff}} = u_1 + \frac{S_e (p_e - p)}{|\dot{m}| \cos \epsilon} \quad (8.64)$$

它是式(1.8)的推广,于是

$$F_P = |\dot{m}| u'_{\text{eff}} \cos \epsilon \quad (8.65)$$

所有  $F'_{Pj}$  合成结果构成一个与弹的几何轴线一致的力矩  $M_{xP}$ , 且

$$M_{xP} = \tilde{n} F'_{Pj} \frac{d^*}{2} = \tilde{n} (F'_{Pj} \sin \epsilon) \frac{d^*}{2} = |\dot{m}| u_1 \frac{d^*}{2} \sin \epsilon$$

将  $|\dot{m}|$  由式(8.65)代换得

$$M_{xP} = F_P \frac{d^*}{2} \frac{u_1}{u'_{\text{eff}}} \tan \epsilon \quad (8.66)$$

$M_{xP}$  叫做喷管导转力矩。

比值  $u_1/u'_{\text{eff}}$  根据式(8.64), 一般  $S_e(p_e - p)/|\dot{m}|$  不超过  $u_1$  的 10%,  $\epsilon$  不超过  $20^\circ$ , 故  $u_1/u'_{\text{eff}}$  大致为 0.9 左右; 若精确计算, 可参阅火箭发动机原理方面的书籍。

对于其他型号火箭的特殊情况, 其  $F_P$  及  $M_{xP}$  的表达式是不难具体推导的, 这里就不多作赘述。推力  $F_P$  是沿弹轴方向的, 它在弹道坐标系上的三个分量为(表 8.3)

$$\begin{bmatrix} F_{Px_2} \\ F_{Py_2} \\ F_{Pz_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_P \cos \delta_1 \cos \delta_2 \\ F_P \sin \delta_1 \cos \delta_2 \\ F_P \sin \delta_2 \end{bmatrix} \quad (8.67)$$

应该指出,  $F_P$  及  $M_{xP}$  通常应以发动机试验测量值为依据, 而且还须测出推力线偏心  $L$ 。在弹体坐标系内, 它有两个分量  $L_{y_1}$  和  $L_{z_1}$  (图 8.8), 二推力偏心矩分量为

$$\begin{bmatrix} M_{Py_1} \\ M_{Pz_1} \end{bmatrix} = F_P \begin{bmatrix} L_{z_1} \\ -L_{y_1} \end{bmatrix} \quad (8.68)$$

根据方程组(8.60), 需要得到弹轴坐标系内的力矩分量, 由表 8.4 得

$$\begin{bmatrix} M_{P\eta} \\ M_{P\zeta} \end{bmatrix} = F_P \begin{bmatrix} L_{z_1} \cos \gamma + L_{y_1} \sin \gamma \\ L_{z_1} \sin \gamma - L_{y_1} \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (8.69)$$

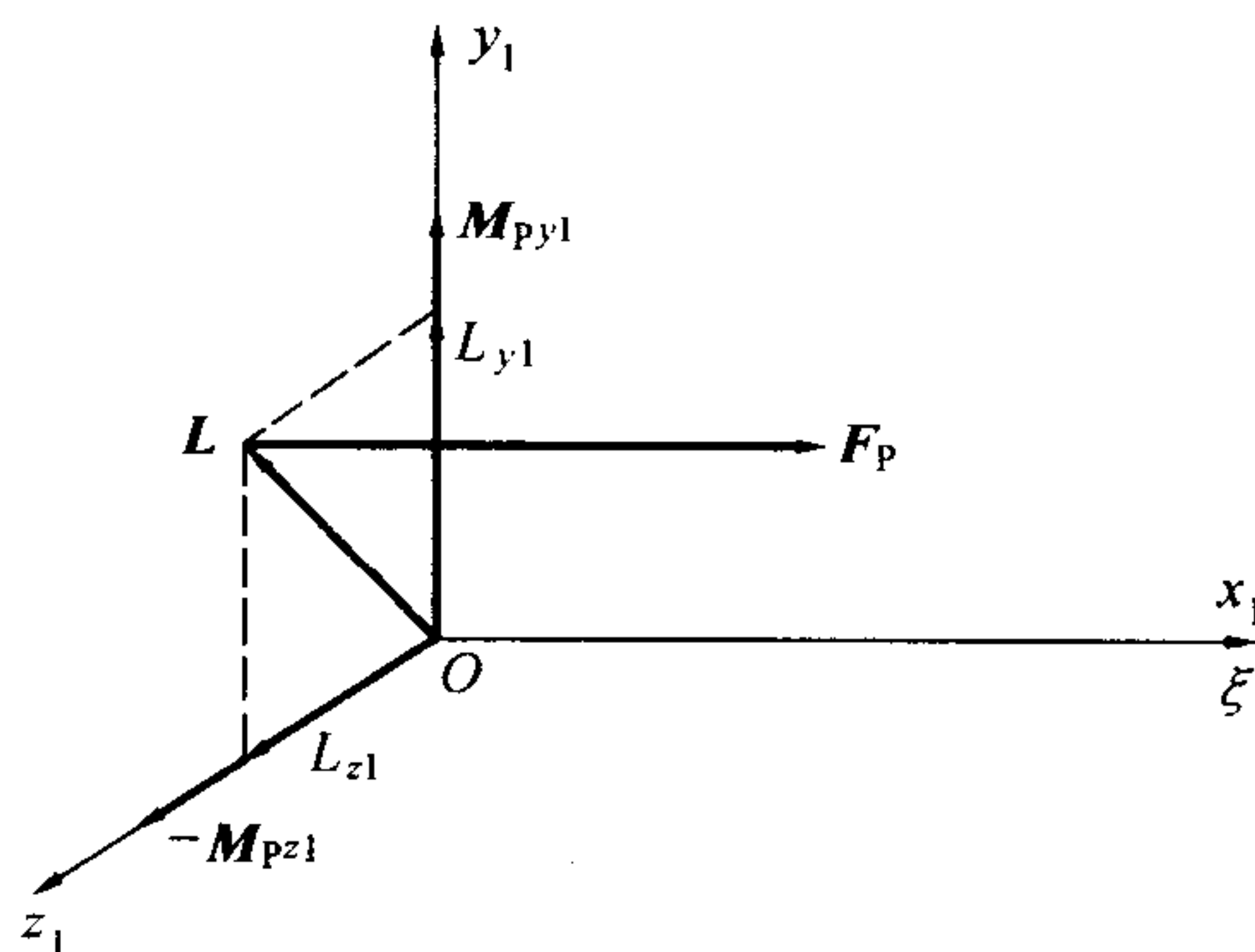


图 8.8 推力线偏心



### 8.4.3 空气动力

首先不考虑风,在攻角  $\delta$  存在的条件下,空气动力以弹道坐标系作为参考系。

#### 1. 阻力 $R_x$ 和升力 $R_y$

阻力是总空气动力在飞行速度方向上的分力,表达式为

$$R_x = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_x \quad (8.70)$$

升力是在由速度矢量  $v$  和弹轴所构成的阻力面内,且垂直于  $v$ ,表达式为

$$R_y = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y \quad (8.71)$$

在  $\delta$  较小时升力系数  $C_y$  为

$$C_y = C'_y \delta \quad (8.72)$$

$C'_y$  是升力系数导数

$$C'_y = \frac{\partial C_y}{\partial \delta}$$

#### 2. 稳定力矩及翻转力矩 $M_z$

能使弹的攻角增大的为翻转力矩,能使攻角减小的为稳定力矩,统称为静力矩。力矩矢量  $M_z$  方向垂直于攻角平面,其大小为

$$M_z = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_z \quad (8.73)$$

而静力矩系数  $m_z$  对  $\delta$  的导数  $m'_z$  有正负之别,对翻转力矩  $m'_z > 0$ ; 对稳定力矩,  $m'_z < 0$ , 在运动方程组中,  $M_z$  采取统一的形式(8.73)。

#### 3. 赤道阻尼力矩 $M_{zd}$

它是阻尼弹轴摆动的力矩,又称摆动阻尼力矩,表达式为

$$M_{zd} = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_{zd} \quad (8.74)$$

赤道阻尼力矩系数  $m_{zd}$  与其导数的关系为

$$M_{zd} = m_{zd} \frac{k \omega_a}{v} \quad (8.75)$$

#### 4. 尾翼导转力矩 $M_{xw}$

尾翼根部翼剖面零升力线与弹轴的夹角  $E$ , 叫尾翼斜置角。这样每个尾翼片上便产生法向力  $R_{mw}$  (图 8.9, 右图是从弹底朝前看的视图), 从而构成导转力矩。其一般表达式为

$$M_{xw} = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_{xw} \quad (8.76)$$

尾翼导转力矩系数  $m_{xw}$  与其导数  $m'_{xw}$  的关系为

$$m_{xw} = m'_{xw} E \quad (8.77)$$





### 5. 极阻尼力矩 $M_{xd}$

它是阻尼弹自转的力矩, 又称滚动阻力矩, 表达式为

$$M_{xd} = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_{xd} \quad (8.78)$$

极阻尼力矩系数  $m_{xd}$  为

$$m_{xd} = m'_{xd} \left( \frac{\omega_{\xi} d}{v} \right) \quad (8.79)$$

其中

$$m'_{xd} = \frac{\partial m_{xd}}{\partial \left( \frac{\omega_{\xi} d}{v} \right)} \quad (8.80)$$

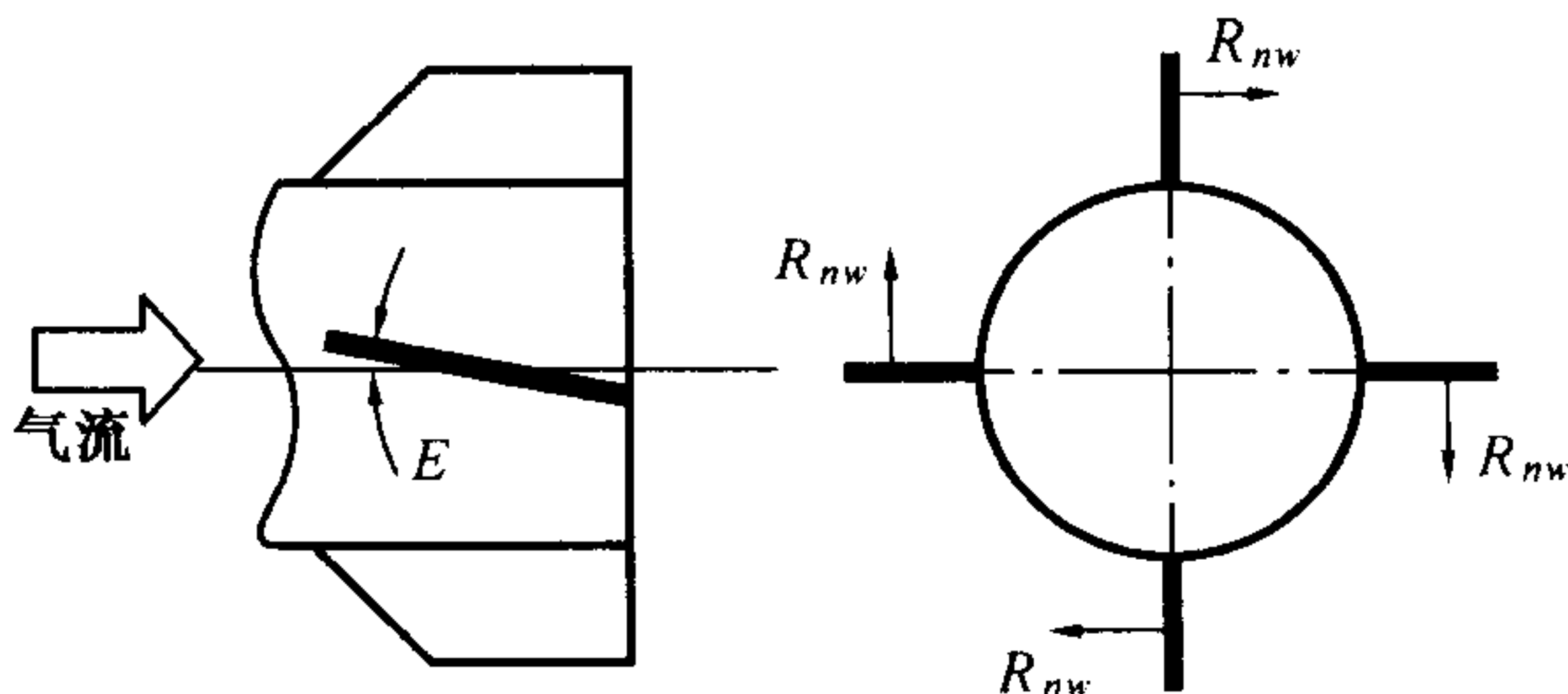


图 8.9 斜置尾翼

### 6. 马格努斯力和马格努斯力矩

对旋转弹, 当有攻角时, 便产生马格努斯效应。就无翼旋转弹来看, 垂直弹轴方向上将出现气流速度

$$v_{\perp} = v \sin \delta \approx v \delta$$

同时因弹体自转而带动临近空气产生弹体环流速度近似为

$$v_1 \approx \frac{1}{8} \dot{\gamma} d$$

于是图 8.10 中弹体左边的合成速度为

$$v_{\perp} + v_1$$

右边的合速度为

$$v_{\perp} - v_1$$

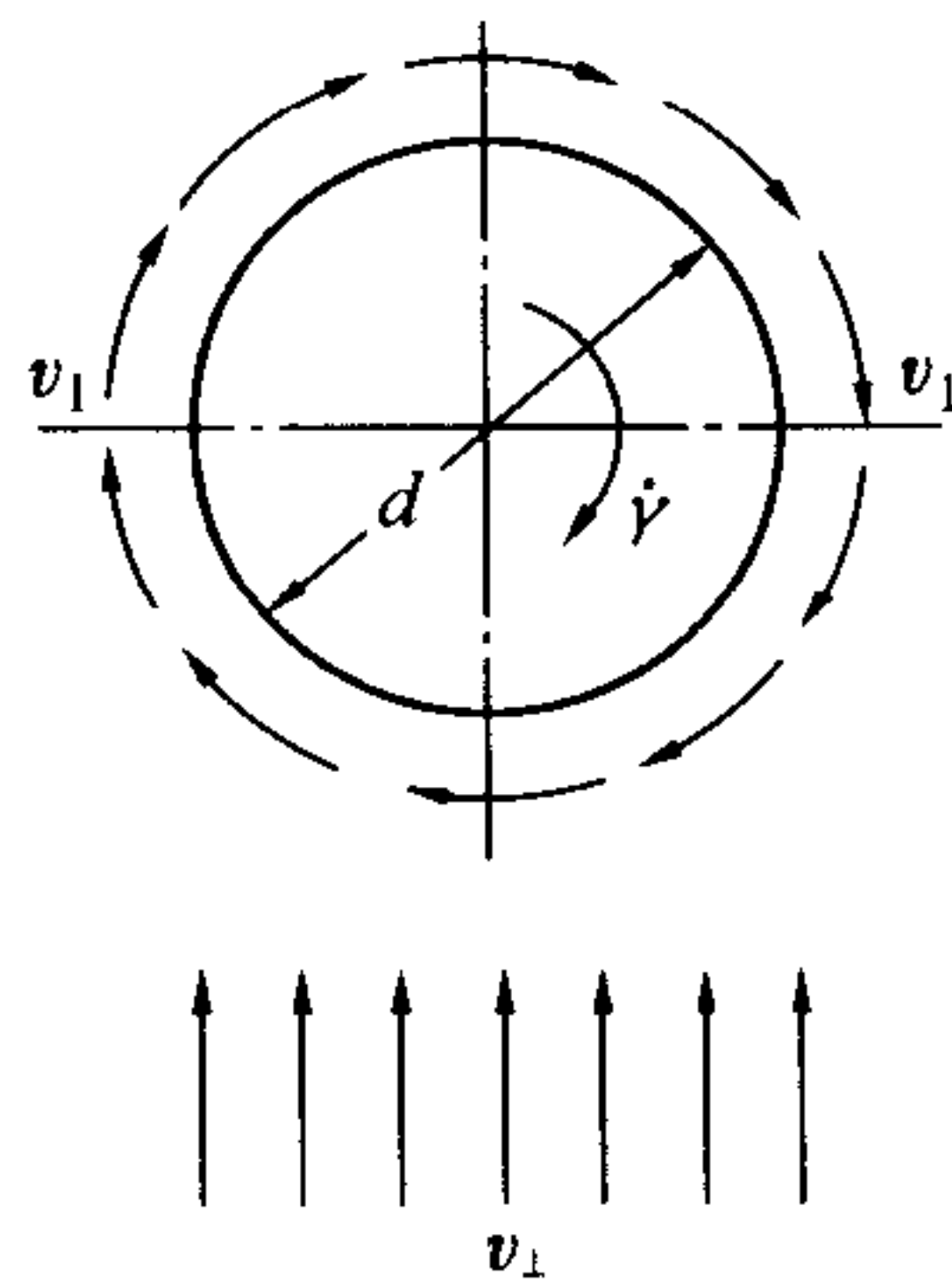


图 8.10 旋转体产生马格努斯力的机理之一

对右旋弹, 按照伯努利效应, 便产生一个自右向左的力, 此力即为马格努斯力。它对质心的力矩, 就是马格努斯力矩。马格努斯力只有升力的百分之几, 它对火箭运动影响甚微。但马格努斯力矩是一个不稳定因素, 在稳定性分析时是需要考虑的。较深入的研究发现, 按上述的马格努斯效应的机理不能得出准确的定量计算结果。马丁在 1955 年提出, 当弹丸旋转且存在攻角时, 弹体四周的附面层将发生畸变, 这种畸变对攻角平面不是左右对称的。由于附面层被看成是紧贴于弹体侧面的一个“薄壳体”, 它等效地改变了弹体的气动外形, 因而改变了所产生的气动力。不对称的“壳体”必然引起左右不平衡的力。但马丁理论只适用于全层流情况, 而且不能表达马格努斯效应的非线性现象。在此基础上又出现了丰恩理论。认为旋转弹体上的马格努斯力的主要来源有二: 一是上述附面层位移厚度沿周向发生畸变; 另一个是攻角平面两侧弹体附面层中的周向速度分布不同, 两侧附面层中的离心力不同, 因而径向压力梯度亦不同, 必然提供侧向力。不过在大攻角时, 附面层在弹体背风面要发



生分离,此时由丰恩理论所算出的结果也不能令人满意。

对尾翼弹,马格努斯机理与弹体截然不同。如图 8.9 所示,当攻角  $\delta = 0$  时,斜置尾翼各翼片上的法向力将与对应翼片上的法向力量值相等而方向相反。若有攻角  $\delta (> 0)$ ,则位于弹身背风面上的翼片会处于弹身的涡迹区内,该翼片上的法向力将会减小。这样,上、下翼片的法向力便合成一个侧向力——马格努斯力,它使图 8.11 所示弹头向右偏转。同时由于弹体绕轴旋转又产生当地升力(沿翼展方向线性增加,它们形成极阻尼力矩),其方向与上述法向力方向相反,也因弹身涡迹使翼片当地升力减小而致上、下翼片合力构成为侧向力。该二侧向力方向相反,一般前者大于后者。

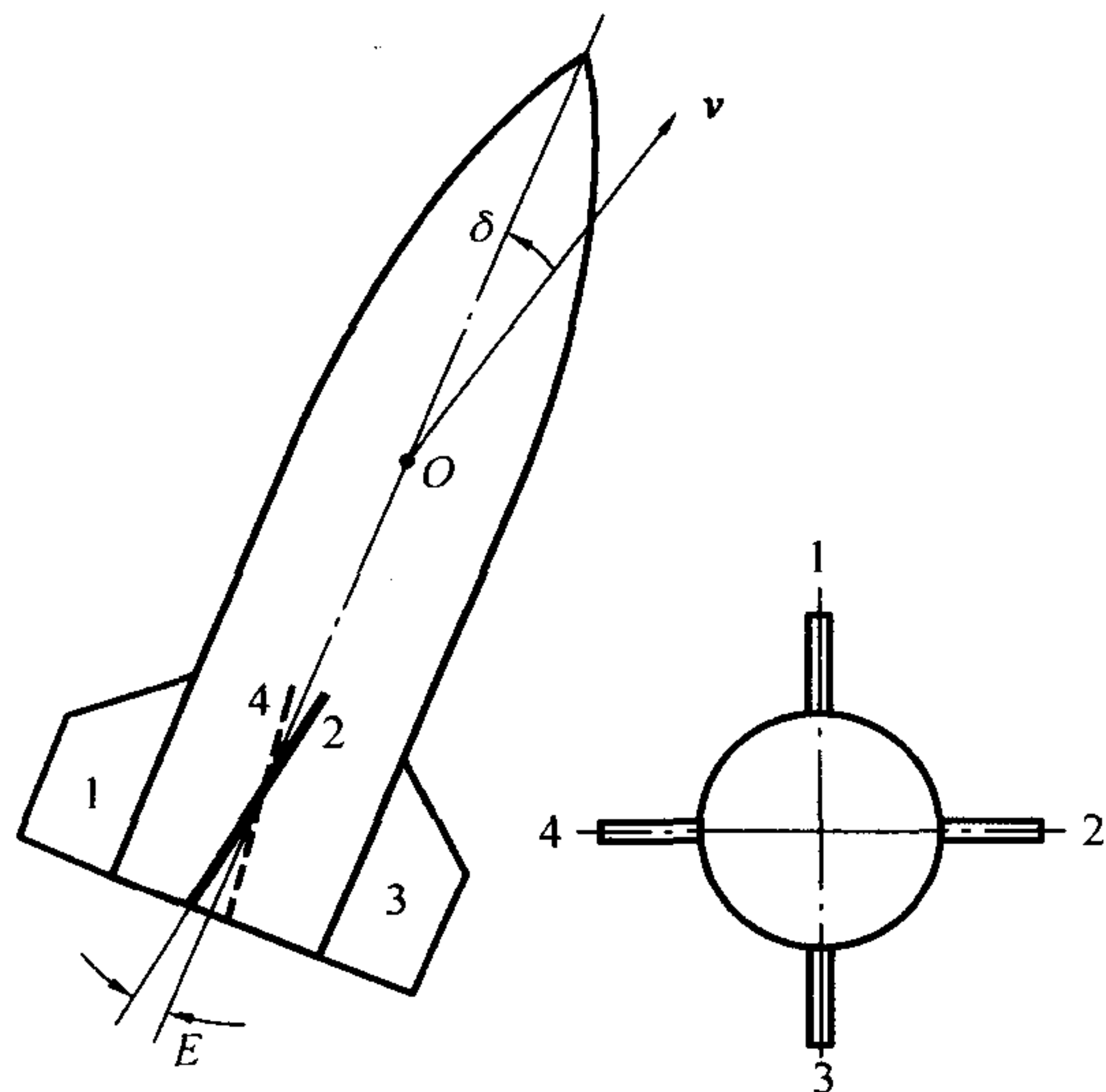


图 8.11 存在攻角时的斜置尾翼弹

除了弹体遮盖这个机理之外,还有因翼片斜置且存在攻角时所引起的偏航(侧向)力矩。如图 8.11 所示,假定翼片 1、3 处于攻角平面内,当  $\delta > 0$  时,翼 4 与矢量  $v$  之间的夹角(等于  $\delta + E$ )将大于翼 2 与  $v$  之间的夹角(等于  $\delta - E$ ),那么翼 4 比 2 受到的法向力及阻力都要大,它们各自在弹轴方向上的合力所形成的偏航力矩使弹头向左偏转。反之若  $\delta < 0$ ,则弹头向右偏转。此偏航力矩与转速无关,甚至在零转速下也存在这个力矩。而且对展长稍大的斜置尾翼弹来说,这个力矩在总的偏航力矩中占据着相当重要的地位。此外,因旋转所引起的附加攻角分布,对左、右翼片来说是反对称的,有效来流速度也是反对称的,也产生偏航力矩。当今,人们习惯将运动参数(如  $\delta$ 、 $\omega_\xi$ 、 $\omega_a$ )耦合所引起的诸偏航力矩都称为马格努斯力矩。综合上述,马格努斯力矩至少来源于四个方面:尾翼斜置角,弹身滚转,翼面滚转,弹身干扰。其一般表达式为

$$M_y = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_y \quad (8.81)$$

当攻角  $\delta$  甚小时,马格努斯力矩系数  $m_y$  采用下列线性式

$$m_y = m'_y \delta \quad (8.82)$$

此式常用于斜置尾翼弹,马格努斯力矩系数导数

$$m'_y = \frac{\partial m_y}{\partial \delta} \quad (8.83)$$

对于  $m_y$  与转速  $\omega_\xi$  有关的情况,通常取二阶导数形式

$$m_y = m''_y \left( \frac{\omega_\xi d}{v} \right) \delta \quad (8.84)$$





式中

$$m_y'' = \frac{\partial^2 m_y}{\partial \left( \frac{\omega_\xi d}{v} \right) \partial \delta} \quad (8.85)$$

约定马格努斯力矩矢量  $M_y$  与矢量  $\omega_\xi \times (\omega_\xi \times v)$  一致时,  $m_y'$  ( $m_y''$ ) 取正值; 反之取负值。

#### 8.4.4 有风时的气动力

空气动力取决于火箭与空气的相对速度、空气特性及弹体形状与飞行姿态。在有风的情况下, 相对速度  $v_r$ , 并不等于飞行速度  $v$ , 它们之间的相对关系依赖于纵风  $w_x$  和横风  $w_z$ , 见图 8.12。图中略去了在通常情况下较小的铅直风。由于  $\psi_2$  很小, 可认为  $w_z$  与  $oz_2$  轴一致;  $w_{x\perp}$  与  $w_{\parallel}$  是  $w_x$  对  $v$  的垂直与平行分量, 并且①

$$w_{x\perp} = w_x \sin \theta_1 \quad w_{\parallel} = w_x \cos \theta_1 \quad (8.86)$$

显然

$$v_r = v - w_{\parallel} - w_{x\perp} - w_z \quad (8.87)$$

在所规定的  $w_x$  和  $w_z$  为正向的情况下, 相对速度  $v_r$  将偏向飞行速度  $v$  的左上方, 向上偏离的角度  $\alpha_{w1}$  为

$$\alpha_{w1} = \arctan \frac{w_{x\perp}}{v - w_{\parallel}} \quad (8.88)$$

向左偏离的角度  $\alpha_{w2}$  为

$$\alpha_{w2} = \arcsin \frac{w_z}{v_r} \quad (8.89)$$

相对速度  $v_r$  的大小, 根据式(8.87)或图 8.12 的几何关系可知

$$v_r = \sqrt{(v - w_{\parallel})^2 + w_{x\perp}^2 + w_z^2} \quad (8.90)$$

在有风条件下气动力的计算, 应该以  $v_r$  及其与弹轴间的夹角为依据。比如阻力将不在矢量  $v$  的方向上, 而与  $v_r$  反向, 这就需要投影到弹道坐标系中。下面用矢量形式写出诸空气动力和力矩的表达式, 然后把力投影到坐标系  $o - x_2 y_2 z_2$  中, 把力矩投影到  $o - \xi \eta \zeta$  坐标系中。

在有风的情况下, 阻力面是  $v_r$  和弹轴所确定的平面, 并以  $\xi$  表示  $o\xi$  (弹轴) 的单位矢量。为了区别有风与无风条件, 在气动力诸符号下加脚注“r”, 以示为有风情形。下面首先给出在姿态角不大的情况下的较为精确的气动力表达式, 以便用于解析求解绕心运动规律, 这种情况

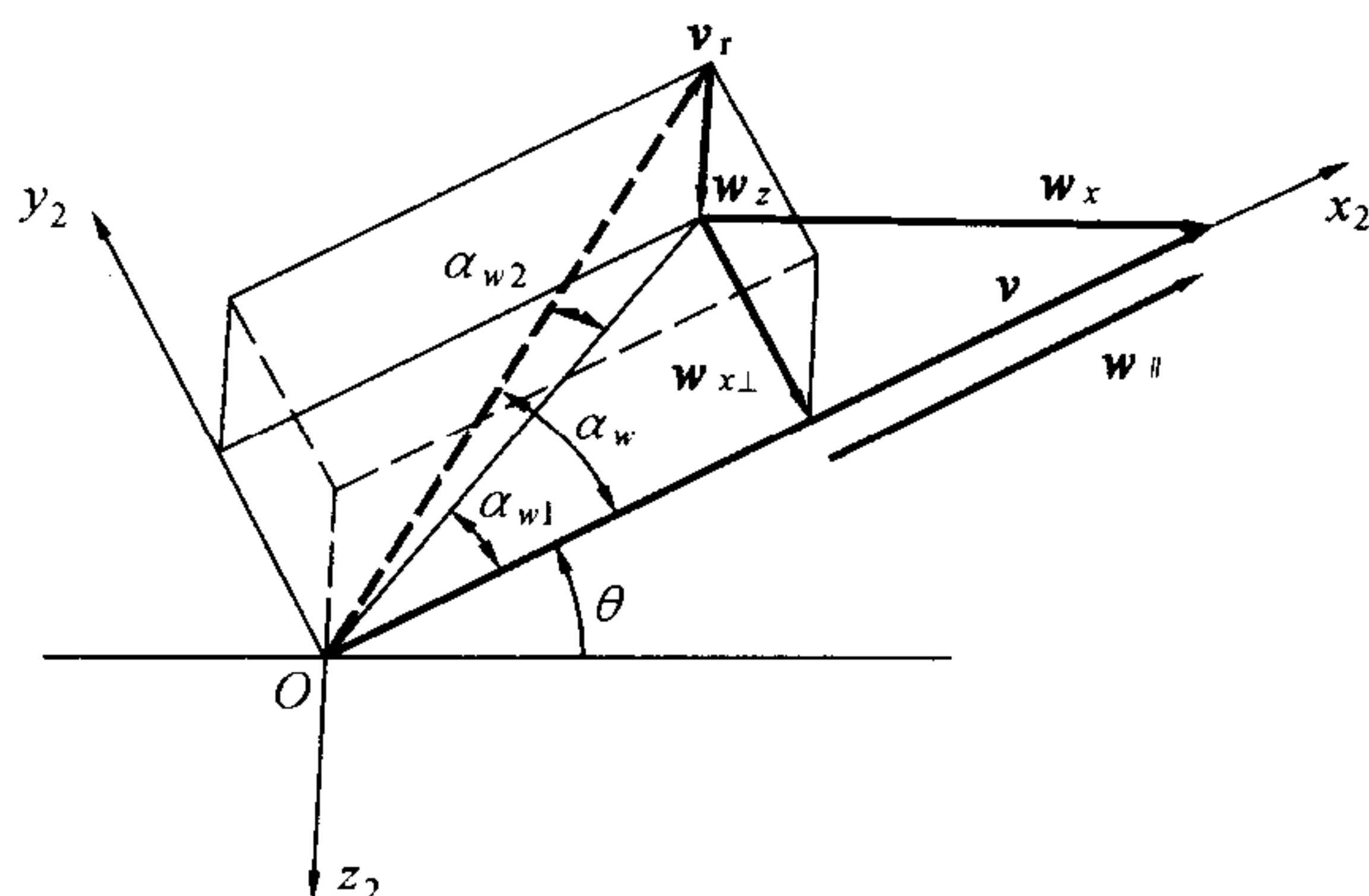


图 8.12  $v$  与  $v_r$  的关系

① 在某种特殊情况下还要计及铅直风  $w_y$ , 届时亦仿此将  $w_y$  以矢量  $v$  为基准分成两个分量叠加到式(8.86)中



就是近似认为第一弹轴系与第二弹轴系相重合。对于二者不重合的一般情况下的气动力表达式,亦将给出具体的推导方法,以便利用方程组(8.60)做更精确的弹道计算。

### 1. 阻力 $R_{xr}$

$R_{xr}$  与  $\mathbf{v}_r$  反向,可写为下式形式

$$R_{xr} = -\frac{1}{2} \rho S C_x v_r \mathbf{v}_r \quad (8.91)$$

由图 8.12 知  $\mathbf{v}_r$  在弹道坐标系  $o-x_2y_2z_2$  三轴上的分量构成为列矩阵

$$\begin{bmatrix} v_{rx_2} \\ v_{ry_2} \\ v_{rz_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v - w_{//} \\ w_{x\perp} \\ -w_z \end{bmatrix} \quad (8.92)$$

故  $R_{xr}$  亦有三分量构成列矩阵为

$$\begin{bmatrix} R_{xrx_2} \\ R_{xry_2} \\ R_{xrz_2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \rho S C_x v_r \begin{bmatrix} v - w_{//} \\ w_{x\perp} \\ -w_z \end{bmatrix} \quad (8.93)$$

### 2. 升力 $R_{yr}$

$R_{yr}$  在  $\xi$  和  $\mathbf{v}_r$  所决定的阻力平面内,垂直  $\mathbf{v}_r$  并与  $\xi$  位于  $\mathbf{v}_r$  的同一侧,故可表示为

$$R_{yr} = \frac{1}{2} \rho S C_y \mathbf{v}_r \times (\xi \times \mathbf{v}_r) \delta_r / \sin \delta_r \quad (8.94)$$

$$\text{而} \quad \mathbf{v}_r \times (\xi \times \mathbf{v}_r) = v_r^2 \xi - (\mathbf{v}_r \cdot \xi) \mathbf{v}_r \quad (8.95)$$

由表 8.3 知,  $\xi$  在  $o-x_2y_2z_2$  三轴上的分量为

$$\begin{bmatrix} \xi_{x_2} \\ \xi_{y_2} \\ \xi_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_1 \cos \delta_2 \\ \cos \delta_2 \sin \delta_1 \\ \sin \delta_2 \end{bmatrix} \quad (8.96)$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \mathbf{v}_r \cdot \xi &= (v - w_{//}) \cos \delta_1 \cos \delta_2 + w_{x\perp} \cos \delta_2 \sin \delta_1 - w_z \sin \delta_2 \approx \\ &v - w_{//} + w_{x\perp} \delta_1 - w_z \delta_2 \end{aligned} \quad (8.97)$$

将式(8.96)、(8.97)代入式(8.95)得  $\mathbf{v}_r \times (\xi \times \mathbf{v}_r)$  在  $o-x_2y_2z_2$  三轴上的分量为

$$\begin{aligned} &v_r^2 \begin{bmatrix} \cos \delta_1 \cos \delta_2 \\ \cos \delta_2 \sin \delta_1 \\ \sin \delta_2 \end{bmatrix} - (v - w_{//} + w_{x\perp} \delta_1 - w_z \delta_2) \begin{bmatrix} v - w_{//} \\ w_{x\perp} \\ -w_z \end{bmatrix} \approx \\ &\begin{bmatrix} w_{z\perp}^2 + w_z^2 - w_{x\perp}(v - w_{//})\delta_1 + w_z(v - w_{//})\delta_2 \\ v_r^2 \delta_1 - (v - w_{//})w_{x\perp} \\ v_r^2 \delta_2 - (v - w_{//})w_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$





则升力列阵为(以下取  $\delta_r/\sin\delta_r \approx 1$ )

$$\begin{bmatrix} R_{yrx_2} \\ R_{yry_2} \\ R_{y rz_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho S C'_y \begin{bmatrix} w_{x\perp}^2 + w_z^2 - w_{x\perp}(v - w_{//})\delta_1 + w_z(v - w_{//})\delta_2 \\ v_r^2 \delta_1 - (v - w_{//})w_{x\perp} \\ v_r^2 \delta_2 - (v - w_{//})w_z \end{bmatrix} \quad (8.98)$$

### 3. 静力矩 $M_{zr}$

$$M_{zr} = \frac{1}{2} \rho S l m'_z v_r \mathbf{v}_r \times \xi \delta_r / \sin\delta_r \quad (8.99)$$

对该力矩, 必须在弹轴坐标系内求得三分量,  $\mathbf{v}_r$  和  $\xi$  在  $o - \xi\eta\zeta$  三轴上的分量分别构成列矩阵为

$$\begin{bmatrix} v_{r\xi} \\ v_{r\eta} \\ v_{r\zeta} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

故  $\mathbf{v}_r \times \xi$  的三分量为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{r\zeta} \\ -v_{r\eta} \end{bmatrix}$$

由表 8.3 知

$$\begin{bmatrix} v_{r\xi} \\ v_{r\eta} \\ v_{r\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta_1 \cos\delta_2 & \cos\delta_2 \sin\delta_1 & \sin\delta_2 \\ -\sin\delta_1 & \cos\delta_1 & 0 \\ -\sin\delta_2 \cos\delta_1 & -\sin\delta_2 \sin\delta_1 & \cos\delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{rx_2} \\ v_{ry_2} \\ v_{rz_2} \end{bmatrix} \quad (8.100)$$

将式(8.92)代入, 略去高阶小量得

$$\begin{bmatrix} v_{r\xi} \\ v_{r\eta} \\ v_{r\zeta} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} v - w_{//} \\ -(v - w_{//})\delta_1 + w_{x\perp} \\ -(v - w_{//})\delta_2 - w_z \end{bmatrix}$$

于是得静力矩列阵

$$\begin{bmatrix} M_{zr\xi} \\ M_{zr\eta} \\ M_{zr\zeta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho S l m'_z v_r \begin{bmatrix} 0 \\ -(v - w_{//})\delta_2 - w_z \\ (v - w_{//})\delta_1 - w_{x\perp} \end{bmatrix} \quad (8.101)$$

### 4. 赤道阻尼力矩 $M_{zdr}$

$M_{zdr}$  的方向恰与弹轴摆动角速度  $\omega_a$  相反, 故

$$M_{zdr} = -\frac{1}{2} \rho v_r S l^2 m'_{zd} \omega_a \quad (8.102)$$



$\omega_a$  三分量为式(8.43), 故  $M_{zdr}$  之矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} M_{zdr\xi} \\ M_{zdr\eta} \\ M_{zdr\zeta} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \rho v_r S l^2 m'_{zd} \begin{bmatrix} \omega_\zeta \tan \varphi_2 \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} \quad (8.103)$$

其轴向分量很小, 一般可略去。

5. 尾翼导转力矩  $M_{xwr}$  和极阻尼力矩  $M_{xdr}$

它们都只有一个轴向分量, 前者与轴向角速度  $\omega_\xi$  方向一致, 后者方向相反。

$$M_{xwr} = \frac{1}{2} \rho v_r^2 S l^2 m_{xw} \xi \quad (8.104)$$

$$M_{xdr} = -\frac{1}{2} \rho v_r S l d m'_{xd} \omega_\xi \xi \quad (8.105)$$

6. 马格努斯力矩  $M_{yr}$

设马格努斯力矩  $M_{yr}$  的方向与二重矢量  $\xi \times (\xi \times v_r)$  相同

$$M_{yr} = \frac{1}{2} \rho v_r S l m'_y \xi \times (\xi \times v_r) \delta_r / \sin \delta_r \quad (8.106)$$

当  $M_{yr}$  与  $\xi \times (\xi \times v_r)$  方向相反时,  $m'_y$  取负值。若用  $m''_y$  表示, 根据式(8.82)与(8.84), 将式(8.106)中的  $m'_y$  用  $m''_y (\omega_\xi d / v_r)$  替代即可。由于

$$\xi \times (\xi \times v_r) = (\xi \cdot v_r) \xi - v_r$$

又因  $\xi \cdot v_r = v_r \xi$ , 则  $\xi \times (\xi \times v_r)$  的三分量为

$$\begin{bmatrix} v_r \xi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_r \xi \\ v_r \eta \\ v_r \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (v - w_{//}) \delta_1 - w_{x\perp} \\ (v - w_{//}) \delta_2 + w_z \end{bmatrix}$$

故  $M_{yr}$  在  $o - \xi\eta\zeta$  内的三分量构成列矩阵

$$\begin{bmatrix} M_{yr\xi} \\ M_{yr\eta} \\ M_{yr\zeta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho S l m'_y v_r \begin{bmatrix} 0 \\ (v - w_{//}) \delta_1 - w_{x\perp} \\ (v - w_{//}) \delta_2 + w_z \end{bmatrix} \quad (8.107)$$

#### 8.4.5 柯里奥利惯性力

对射程较远的火箭, 需计及柯里奥利惯性力。在图 8.13 中, 火箭所在位置在北半球的  $O$  点, 地理纬度是  $\Lambda$ ,  $ON$  为正北方向,  $OE$  为正东方向。

设射击平面(或射向  $ox$ )与正北向  $ON$

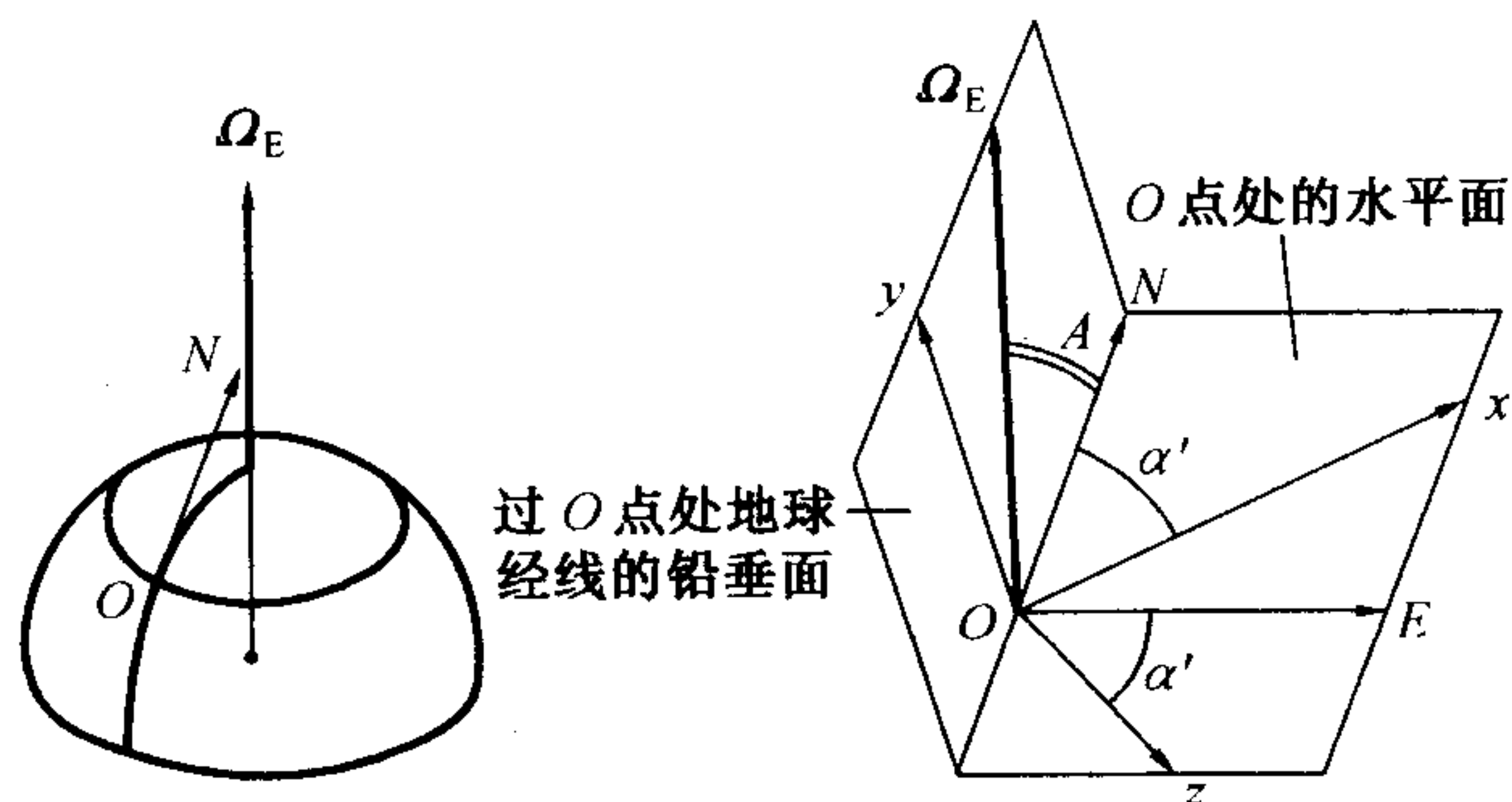


图 8.13 火箭在北半球的方位





的夹角为  $\alpha'$ 。则地球旋转角速度  $\Omega_E$  在地面坐标系内的分量为

$$\begin{bmatrix} \Omega_{Ex} \\ \Omega_{Ey} \\ \Omega_{Ez} \end{bmatrix} = \Omega_E \begin{bmatrix} \cos\Lambda \cos\alpha' \\ \sin\Lambda \\ -\cos\Lambda \sin\alpha' \end{bmatrix} \quad (8.108)$$

而柯里奥利惯性力  $F_C$  为

$$F_C = 2m\mathbf{v} \times \Omega_E \quad (8.109)$$

在弹道坐标系内表示为

$$F_C = 2m \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{13} \\ v & 0 & 0 \\ \Omega_{Ex_2} & \Omega_{Ey_2} & \Omega_{Ez_2} \end{vmatrix} = 2m(-v\Omega_{Ez_2}\mathbf{e}_{12} + v\Omega_{Ey_2}\mathbf{e}_{13}) \quad (8.110)$$

根据表 8.2 及式(8.108)知

$$\begin{cases} \Omega_{Ey_2} = -\Omega_E \cos\Lambda \cos\alpha' \sin\theta_1 + \Omega_E \sin\Lambda \cos\theta_1 \\ \Omega_{Ez_2} = -\Omega_E \cos\Lambda \cos\alpha' \sin\psi_2 \cos\theta_1 - \Omega_E \sin\Lambda \sin\psi_2 \sin\theta_1 - \\ \quad \Omega_E \cos\Lambda \sin\alpha' \cos\psi_2 \approx -\Omega_E \cos\Lambda \sin\alpha' \end{cases} \quad (8.111)$$

代入式(8.110)得  $F_C$  的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} F_{Cx_2} \\ F_{Cy_2} \\ F_{Cz_2} \end{bmatrix} = 2m\Omega_E v \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\Lambda \sin\alpha' \\ \sin\Lambda \cos\theta_1 - \cos\Lambda \sin\alpha' \sin\theta_1 \end{bmatrix} \quad (8.112)$$

#### 8.4.6 诸力和力矩之综合

至此,可以把式(8.60)中的  $F_{x_2}$ 、 $F_{y_2}$ 、 $F_{z_2}$ 、 $M_\xi$ 、 $M_\eta$ 、 $M_\zeta$  具体地表示出来。由式(8.62)、(8.67)、(8.93)、(8.98)和(8.112)得

$$F_{x_2} = F_P \cos\delta_1 \cos\delta_2 - \frac{1}{2} \rho S C_x v_r (v - w_{//}) + \frac{1}{2} \rho S C_y [w_{x\perp}^2 + w_z^2 - w_{x\perp}(v - w_{//})\delta_1 + w_z(v - w_{//})\delta_2] - mg \sin\theta_1 \cos\psi_2 \quad (8.113)$$

$$F_{y_2} = F_P \cos\delta_2 \sin\delta_1 - \frac{1}{2} \rho S C_x v_r w_{x\perp} + \frac{1}{2} \rho S C_y [v_r^2 \delta_1 - (v - w_{//})w_{x\perp}] - mg \cos\theta_1 + 2m\Omega_E v \cos\Lambda \sin\alpha' \quad (8.114)$$

$$F_{z_2} = F_P \sin\delta_2 + \frac{1}{2} \rho S C_x v_r w_z + \frac{1}{2} \rho S C_y [v_r^2 \delta_2 + (v - w_{//})w_z] + mg \sin\theta_1 \sin\psi_2 + 2m\Omega_E v (\sin\Lambda \cos\theta_1 - \cos\Lambda \cos\alpha' \sin\theta_1) \quad (8.115)$$

由(8.66)、(8.69)、(8.101)、(8.103)、(8.104)、(8.105)、(8.107)诸式知



$$M_{\xi} = M_{xP} + \frac{1}{2} \rho v_r^2 S l m_{xw} - \frac{1}{2} \rho v_r S l d m'_{xd} \omega_{\xi} \quad (8.116)$$

$$M_{\eta} = F_P (L_{z_1} \cos \gamma + L_{y_1} \sin \gamma) - \frac{1}{2} \rho S l m'_z v_r [(v - w_{//}) \delta_2 + w_z] - \frac{1}{2} \rho v_r S l^2 m'_{zd} \omega_{\eta} + \frac{1}{2} \rho S l m'_y v_r [(v - w_{//}) \delta_1 - w_{x\perp}] \quad (8.117)$$

$$M_{\zeta} = F_P (L_{z_1} \sin \gamma + L_{y_1} \cos \gamma) + \frac{1}{2} \rho S l m'_z v_r [(v - w_{//}) \delta_1 - w_{x\perp}] - \frac{1}{2} \rho v_r S l^2 m'_{zd} \omega_{\zeta} + \frac{1}{2} \rho S l m'_y v_r [(v - w_{//}) \delta_2 + w_z] \quad (8.118)$$

### 8.4.7 气动力的精确表达式

#### 1. 阻力

阻力表达式为式(8.91),  $v_r$  在平动系中的列阵为

$$[v_{r,d}] = \begin{bmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{bmatrix} \quad (8.119)$$

则在弹道系中的表达式为

$$[v_{r,t}] = C_{td} [v_{r,d}] \quad (8.120)$$

由式(8.13)、(8.4)、(8.5)及式(8.29)、(8.119)代入,并稍加整理得

$$[v_{r,t}] = \begin{bmatrix} v - w_x \cos \theta_1 \cos \phi_2 - w_y \sin \theta_1 \cos \phi_2 - w_z \sin \phi_2 \\ w_x \sin \theta_1 - w_y \cos \theta_1 \\ w_x \cos \theta_1 \sin \phi_2 + w_y \sin \theta_1 \sin \phi_2 - w_z \cos \phi_2 \end{bmatrix} \quad (8.121)$$

那么阻力在平动系和弹道系中的表达式分别为

$$[R_{x,d}] = - \frac{R_x}{v_r} \begin{bmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{bmatrix} \quad (8.122)$$

$$[R_{x,t}] = - \frac{R_x}{v_r} \begin{bmatrix} v - w_x \cos \theta_1 \cos \phi_2 - w_y \sin \theta_1 \cos \phi_2 - w_z \sin \phi_2 \\ w_x \sin \theta_1 - w_y \cos \theta_1 \\ w_x \cos \theta_1 \sin \phi_2 + w_y \sin \theta_1 \sin \phi_2 - w_z \cos \phi_2 \end{bmatrix} \quad (8.123)$$

#### 2. 升力

由式(8.71)、(8.72)(该两式中的  $v$  和  $\delta$  均需以  $v_r$ 、 $\delta_r$  替代)、(8.94)、(8.95)可知升力表达式为

$$R_y = \frac{R_y}{\sin \delta_r} (e_{a1} - \cos \delta_r e_{r1}) \quad (8.124)$$





$e_{rl}$ 在平动系中的列阵由式(8.119)及式(8.8)、(8.10)、(8.11)可得

$$[e_{rl,d}] = \frac{[v_{r,d}]}{v_r} = \frac{1}{v_r} \begin{bmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r \cos\psi_r \\ \sin\theta_r \cos\psi_r \\ \sin\psi_r \end{bmatrix} \quad (8.125)$$

弹轴单位矢量  $e_{a1}$ 在平动系中的列阵为

$$[e_{a1,d}] = C_{da} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [C_2(-\varphi_2)C_3(\varphi_a)]^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_a \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_a \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 \end{bmatrix} \quad (8.126)$$

将式(8.125)、(8.126)代入式(8.124)便得升力在平动系中的列阵为

$$[R_{y,d}] = \frac{R_y}{\sin\delta_r} \begin{bmatrix} \sin\varphi_a \cos\varphi_2 - \cos\delta_r \cos\theta_r \cos\psi_r \\ \sin\varphi_a \cos\varphi_2 - \cos\delta_r \sin\theta_r \cos\psi_r \\ \sin\varphi_2 - \cos\delta_r \cos\psi_r \end{bmatrix} \quad (8.127)$$

在弹道系中,  $e_{a1}$ 的列阵式为

$$[e_{a1,t}] = \begin{bmatrix} \cos\delta_1 \cos\delta_2 \\ \sin\delta_1 \cos\delta_2 \\ \sin\delta_2 \end{bmatrix} \quad (8.128)$$

则升力在弹道系中的列阵为

$$[R_{y,t}] = \frac{R_y}{\sin\delta_r} \left[ [e_{a1,t}] - \cos\delta_r \frac{[v_{r,t}]}{v_r} \right] \quad (8.129)$$

将式(8.121)、(8.128)代入,而得具体展开式。

### 3. 马格努斯力

马格努斯力表示为

$$R_{zm} = \frac{R_{zm}}{\sin\delta_r} e_{a1} \times e_{rl} \quad (8.130)$$

其中标量式参见(8.164)。为便于矩阵运算,现介绍矢量叉乘的一般运算关系:若  $c = a \times b$  且每一矢量各有 3 个坐标分量,则  $c$  之坐标列阵为

$$[c] = \tilde{a}[b] = -\tilde{b}[a] \quad (8.131)$$

式中带波浪号的符号表示矢量的坐标方阵或叉乘矩阵,比如

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.132)$$

式(8.131)可经矢量积的运算直接验证。于是马格努斯力的坐标列阵的表达式为



$$[\mathbf{R}_{zm}] = \frac{R_{zm}}{\sin \delta_r} \tilde{\mathbf{e}}_{a1} [\mathbf{e}_{r1}] \quad (8.133)$$

将上面给出的 $[\mathbf{e}_{a1}]$ 和 $[\mathbf{e}_{r1}]$ 的表达式代入,即可得到在平动系或弹道系中的表达式。

#### 4. 静力矩

静力矩表达式由式(8.99)为

$$\mathbf{M}_z = \frac{M_z}{\sin \delta_r} \mathbf{e}_{r1} \times \mathbf{e}_{a1} \quad (8.134)$$

式中 $M_z$ 参见式(8.73),但需取相对速度 $v_r$ 和相对攻角 $\delta_r$ 。现求 $\mathbf{M}_z$ 在弹轴系中的坐标列阵,为此需先知道 $[\mathbf{e}_{a1,a}]$ 及 $[\mathbf{e}_{r1,a}]$ ,易见

$$[\mathbf{e}_{a1,a}] = [1 \ 0 \ 0]^T \quad (8.135)$$

又

$$[\mathbf{e}_{r1,a}] = \mathbf{C}_{ar} [1 \ 0 \ 0]^T \quad (8.136)$$

式中

$$\mathbf{C}_{ar} = \mathbf{C}_{aa'} \mathbf{C}_{a'r} = \mathbf{C}_1(\alpha_{ar}) \mathbf{C}_2(-\delta_{r2}) \mathbf{C}_3(\delta_{r1}) \quad (8.137)$$

利用矩阵式(8.3)~(8.5),将式(8.137)代入式(8.136)得

$$\mathbf{e}_{r1,a} = \begin{bmatrix} \cos \delta_{r1} \cos \delta_{r2} \\ -(\sin \delta_{r1} \cos \alpha_{ar} + \cos \delta_{r1} \sin \delta_{r2} \sin \alpha_{ar}) \\ \sin \delta_{r1} \sin \alpha_{ar} - \cos \delta_{r1} \sin \delta_{r2} \cos \alpha_{ar} \end{bmatrix} \quad (8.138)$$

将式(8.135)按式(8.132)构成 $\tilde{\mathbf{e}}_{a1,a}$ ,再由式(8.134)及式(8.131)、(8.138)得静力矩在弹轴系中的列阵

$$[\mathbf{M}_{z,a}] = \frac{M_z}{\sin \delta_r} (-\tilde{\mathbf{e}}_{a1,a} [\mathbf{e}_{r1,a}]) = \frac{M_z}{\sin \delta_r} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \delta_{r1} \sin \alpha_{ar} - \cos \delta_{r1} \sin \delta_{r2} \cos \alpha_{ar} \\ \sin \delta_{r1} \cos \alpha_{ar} + \cos \delta_{r1} \sin \delta_{r2} \sin \alpha_{ar} \end{bmatrix} \quad (8.139)$$

#### 5. 马格努斯力矩

参见式(8.81)、(8.106)等式,易知马格努斯力矩在弹轴系中的列阵

$$[\mathbf{M}_{y,a}] = \frac{M_y}{\sin \delta_r} (\cos \delta_r [\mathbf{e}_{a1,a}] - [\mathbf{e}_{r1,a}]) \quad (8.140)$$

将式(8.135)、(8.138)代入上式,并采纳式(8.59),得

$$[\mathbf{M}_{y,a}] = \frac{M_y}{\sin \delta_r} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \delta_{r1} \cos \alpha_{ar} + \cos \delta_{r1} \sin \delta_{r2} \sin \alpha_{ar} \\ -\sin \delta_{r1} \sin \alpha_{ar} + \cos \delta_{r1} \sin \delta_{r2} \cos \alpha_{ar} \end{bmatrix} \quad (8.141)$$

#### 6. 其他气动力矩

赤道阻尼力矩 $\mathbf{M}_{zd}$ 、尾翼导转力矩 $\mathbf{M}_{xu}$ 及极阻尼力矩 $\mathbf{M}_{xd}$ 均采用式(8.103)、(8.104)和式





(8.105)。

最后指出,在进行精确的弹道解算时,则需以式(8.122)、(8.129)、(8.133)、(8.139)、(8.141)诸式取代式(8.93)~(8.107)中的诸气动力和力矩;在较大姿态角或风速较大时,这种取代是必要的,但在二者都较小时则可不必要。此外,在特殊情况下(比如尾翼弹大攻角飞行),则应在方程组(8.60)中计及8.6节的其他次要力和力矩。

## 8.5 扰动运动方程组及其简化

第一章建立的理想弹道方程组(1.61)是在六条基本假设条件下得出的。由该方程组所确定的理想弹道大致上反映了火箭质心运动规律。现在不受基本假设的约束,建立了火箭运动的一般方程组(8.60),用这个方程组计算出来的弹道将偏离理想弹道。如果把理想弹道作为标准弹道,那么在理想弹道方程组中所没有考虑到的其他任何因素,都将作为扰动因素。这些扰动因素使弹道偏离理想弹道,而且诸运动参数都与理想弹道运动参数有偏差;这个偏差量就是(8.60)与(1.61)两方程组的计算结果之差。为了便于区别,不妨将方程组(1.61)的理想弹道参数用脚注“i”标记,即知

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = a_{Pi} - a_{xi} - g \sin \theta_i \\ \frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{g \cos \theta_i}{v_i} \\ \frac{dy_i}{dt} = v_i \sin \theta_i \\ \frac{dx_i}{dt} = v_i \cos \theta_i \end{cases} \quad (8.142)$$

显然,  $v_i, \theta_i, x_i, y_i$  都是时间  $t$  的已知函数。可将方程组(8.60)中与此有关的参数表示为

$$\begin{cases} v = v_i + \Delta v \\ \theta_1 = \theta_i + \psi_1 \\ \varphi_a = \theta_i + \varphi_1 \\ y = y_i + \Delta y \\ x = x_i + \Delta x \end{cases} \quad (8.143)$$

将式(8.143)代入式(8.60)中,便可解出一切与理想弹道方程(8.142)运动参数之差值:  $\Delta v, \psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2, \delta_1, \delta_2, \Delta x, \Delta y, z$  等。这样的方程组,就是对理想弹道的扰动运动方程组。十分清楚,扰动运动方程组中的上述运动参数偏差量,都是以理想弹道为基准来度量的。要精确地求解这些量,需要用电子计算机计算。为了对扰动运动的物理本质有所了解,同时为了进行散布和稳定性分析,可对扰动方程组加以合理地简化,以寻求具有准确性不太差的解析解。



首先,把这个问题建立在小扰动的基点上,认为角度  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \delta_1, \delta_2$  都是小量。而且认为风速比飞行速度  $v$  要小得多,且取  $v_r \approx v$ 。再就是在一定范围内,可把气动系数的诸导数及弹体参数如  $A, m$  等取作常数。此外,还将略去次要的力和力矩,如柯里奥利力;与第七章对方程组进行简化一样,仍取  $\Delta v = 0$ 。为了书写方便,将方程组(8.60)的质心运动方程和弹轴摆动运动方程分别进行简化,并采用下列符号

$$\left\{ \begin{array}{l} b_x = \frac{\rho S C_x}{2m} \\ b_y = \frac{\rho S C_y'}{2m} \\ k_z = \frac{\rho S l m_z'}{2A} \\ k_{zd} = \frac{\rho S l^2 m_{zd}'}{2A} \\ k_y = \frac{\rho S l m_y'}{2A} \\ k = \sqrt{|k_z|} \end{array} \right. \quad (8.144)$$

式(8.60)①变为

$$\frac{dv}{dt} = a_P - b_x v^2 - g \sin \theta_i \quad (8.145)$$

式(8.60)②变为

$$v \frac{d\psi_1}{dt} + v \frac{d\theta_i}{dt} = a_P \delta_1 + b_y v^2 \left( \delta_1 - \frac{w_{x\perp}}{v} \right) - b_x v w_{x\perp} - g \cos \theta_i + g \sin \theta_i \psi_1$$

由式(8.142)第二式代入得

$$v \frac{d\psi_1}{dt} = a_P \delta_1 + b_y v^2 \left( \delta_1 - \frac{w_{x\perp}}{v} \right) - b_x v w_{x\perp} + g \sin \theta_i \psi_1 \quad (8.146)$$

式(8.60)③变为

$$v \frac{d\psi_2}{dt} = a_P \delta_2 + b_y v^2 \left( \delta_2 + \frac{w_z}{v} \right) + b_x v w_z + g \sin \theta_i \psi_2 \quad (8.147)$$

将式(8.147)两端乘以虚数  $i$ , 此  $i = \sqrt{-1}$ ; 再与(8.146)式相加, 得

$$v \frac{d\Psi}{dt} = a_P \Delta + b_y v^2 \left( \Delta + \frac{w_{\perp}}{v} \right) + b_x v w_{\perp} + g \sin \theta_i \Psi \quad (8.148)$$

式中

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \psi_1 + i\psi_2, \text{为复偏角} \\ \Delta = \delta_1 + i\delta_2, \text{为复攻角} \\ w_{\perp} = -w_{x\perp} + iw_z, \text{为复垂直风} \end{array} \right\} \quad (8.149)$$





方程(8.148)即为实际速度方向偏离理想弹道切线方向的偏差量方程。如上章所述,计算诸扰动因素所对应的角偏差量是散布分析中的重要任务。求解方程(8.148)的关键在于知道复攻角  $\Delta$  的函数关系,为此须依赖转动方程。下面研究一下转动方程组的简化问题。

将式(8.60)④、⑤、⑥中较次要项略去,即可简化为下型

$$\begin{cases} C \frac{d\omega_\xi}{dt} = M_\xi \\ A \frac{d\omega_\eta}{dt} + C\omega_\xi\omega_\zeta = M_\eta + (A - C) \frac{d}{dt}(\beta_{D\eta}\omega_\xi) \\ A \frac{d\omega_\zeta}{dt} - C\omega_\xi\omega_\eta = M_\zeta + (A - C) \frac{d}{dt}(\beta_{D\zeta}\omega_\xi) \end{cases} \quad (8.150)$$

由式(8.60)⑦、⑧、⑨得简化式

$$\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\gamma} \\ \omega_\eta = -\dot{\varphi}_2 \\ \omega_\zeta = \dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}_i \end{cases} \quad (8.151)$$

代入式(8.150)得

$$C\ddot{\gamma} = M_\xi \quad (8.152)$$

$$-A\ddot{\varphi}_2 + C\dot{\gamma}\dot{\varphi}_1 + C\dot{\gamma}\dot{\theta}_i = M_\eta + (A - C)(\ddot{\gamma}\beta_{D\eta} + \dot{\gamma}\dot{\beta}_{D\eta}) \quad (8.153)$$

$$A\ddot{\varphi}_1 + C\dot{\gamma}\dot{\varphi}_2 + A\ddot{\theta}_i = M_\zeta + (A - C)(\ddot{\gamma}\beta_{D\zeta} + \dot{\gamma}\dot{\beta}_{D\zeta}) \quad (8.154)$$

$\gamma$  角可根据式(8.152)单独求出其近似值,它就是已知函数了。式(8.154)和(8.145)是描述弹轴运动的方程,可合并成一个复数形式的方程。将式(8.153)乘以  $(-i)$ ,再与式(8.154)相加,得(省略  $\theta_i$  的脚注)

$$A\ddot{\Phi} - iC\dot{\gamma}\dot{\Phi} = f + iC\dot{\gamma}\dot{\theta} - A\ddot{\theta} + (A - C)\beta_D(\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})e^{i\gamma} \quad (8.155)$$

式中,  $\Phi$  是复摆动角,  $f$  是力矩的等效力。

$$\Phi = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad (8.156)$$

$$f = M_\zeta - iM_\eta = -iM \quad (8.157)$$

$$M = M_\eta + iM_\zeta$$

式(8.155)右边最后一项是利用式(8.49)代入后整理得到的,其中

$$\beta_D = \beta_{D1} + i\beta_{D2} \quad (8.158)$$

$\beta_D$  是在弹体坐标系内表示的复动不平衡角。方程(8.155)就是旋转条件下的弹轴摆动方程,它适于解析分析之用。又由方程组(8.60)的⑯、⑰式知

$$\varphi_2 \approx \psi_2 + \delta_2$$

$$\varphi_1 \approx \psi_1 + \delta_1$$

故

$$\Phi = \Psi + \Delta \quad (8.159)$$



这样式(8.148)、(8.155)和(8.159)便构成联立方程组。在具体寻求  $f$  的表达式之前,需说明  $f$  的意义,以及如何形象地表示各复角。

如果以单位长度为半径作一球面,那么球面上的弧长与相应的球心角(以 rad 为单位)在数值上是相等的。为了清楚起见,以火箭质心  $o$  为球心作单位球面,如图 8.14 所示,图中  $o - x_{2i}y_{2i}z_{2i}$  是理想弹道的弹道坐标系,  $ox_{2i}$  轴是理想弹道切线方向,它与单位球面相交于点  $T_i$ 。弹轴与单位球面相交于  $B$  点,速度矢量  $v$  与单位球面相交于  $T$  点。显然,只要知道了  $B$  点和  $T$  点的位置,就等于知道了弹轴和速度的方位。不妨在单位球面上作正交线族(相当于地球的经纬线),于是单位球面上的弧长  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ , 便确定了  $B$  和  $T$  的位置。这样  $B$  点在单位球面上画出的运动轨迹,就表示出弹轴在空间的运动过程;同样,  $T$  点的运动轨迹,便表示速度  $v$  之方向的变化过程。这是一种形象的表示方法。

但是,单位球面用起来还显得不甚方便。地理工作者为了表示一个局部地区(比如一个国家)的地理情况,便将地球仪的相应部分展开成平面图。同样,考虑到  $B$  点到  $T$  点只可能在  $T_i$  点附近的一个局部范围内变化,这一局部本来就接近平面,干脆就展开成平面,从球心向前看,示于图 8.15 中。以  $T_i$  作为原点<sup>①</sup>,以  $x_{2i}oy_{2i}$  平面与球面交线为纵轴,它是度量  $\varphi_1$  和  $\psi_1$  的坐标轴,沿  $oy_{2i}$  方向为正向;横轴垂直于纵轴,沿  $oz_{2i}$  方向为正,以此度量  $\varphi_2$  和  $\psi_2$ 。把纵轴作为实轴,横轴作为虚轴,便构成一个复平面,复数  $\Phi$  和  $\Psi$  正是表示  $B$  点和  $T$  点的位置,复攻角  $\Delta$  正是二者之差。

现在的问题是,研究弹轴的运动已转化为在复平面上研究  $B$  点的运动;对速度  $v$  方向变化的研究亦转化为研究  $T$  点在复平面上的运动。用这个观点再看方程(8.155),  $\dot{\Phi}$  和  $\ddot{\Phi}$  正是  $B$  点在复平面上的速度和加速度。把赤道转动惯量  $A$  视为质点  $B$  的“质量”时,则质量与加速度之积应等于诸外力与惯性力之和。这样  $f$  就是“外力”了,它的具体含义如图 8.16 所示。

若在  $B$  点有一数值等于  $M_\zeta$  且方向与  $o\eta$  轴一致的力  $f_\eta$ , 另一与  $f_\eta$  大小相等方向相反的  $-f_\eta$  作用于  $o$  点,则此二力构成一个力偶,显然,该力偶等效于  $M_\zeta$  的作用。同样,若在  $o$  点加一数值等于  $M_\eta$  且方向与  $o\zeta$  一致的力  $f_\zeta$ , 另一与  $f_\zeta$  大小相等方向相反的力  $-f_\zeta$  作用于  $B$  点,该

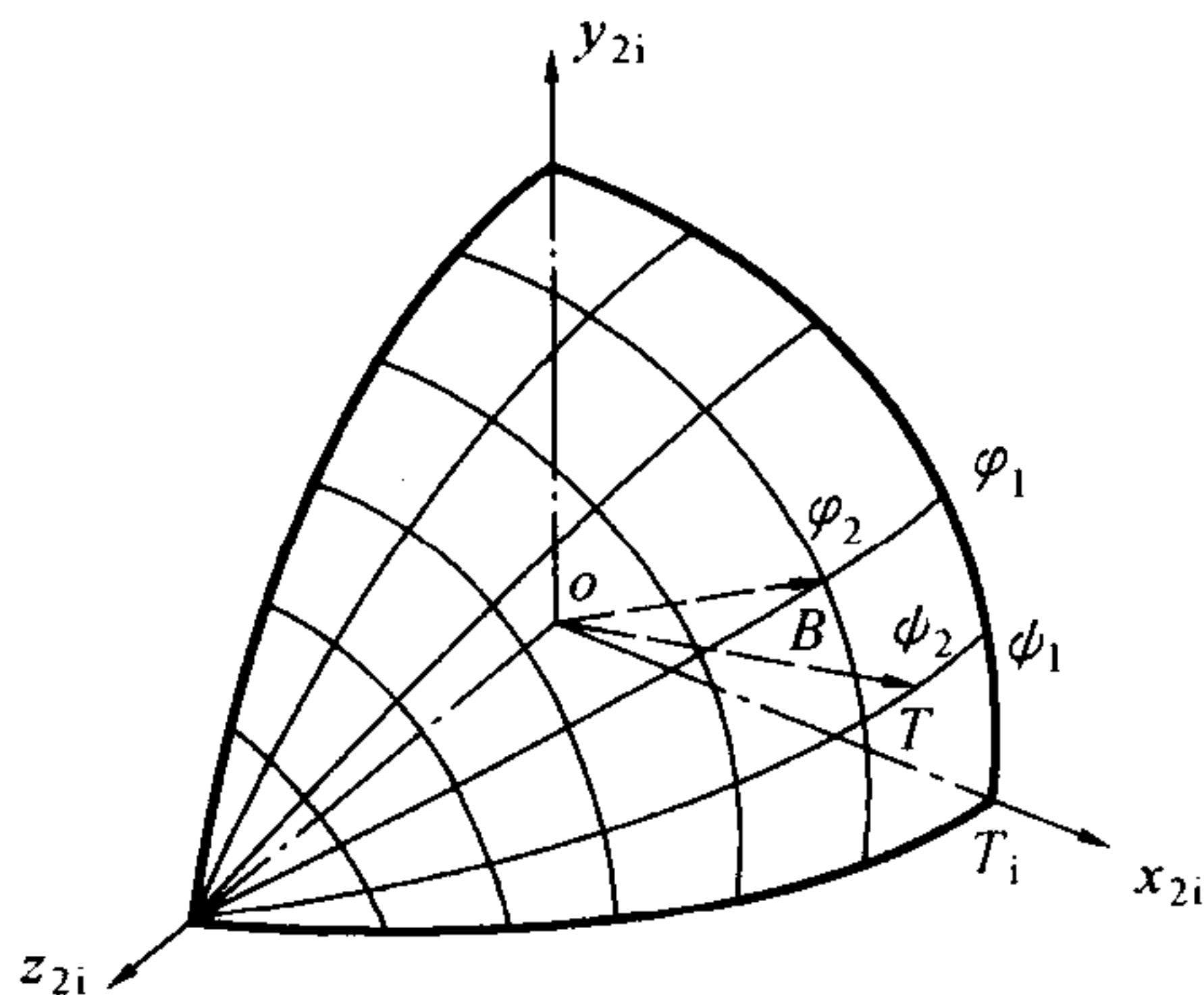


图 8.14 单位球面

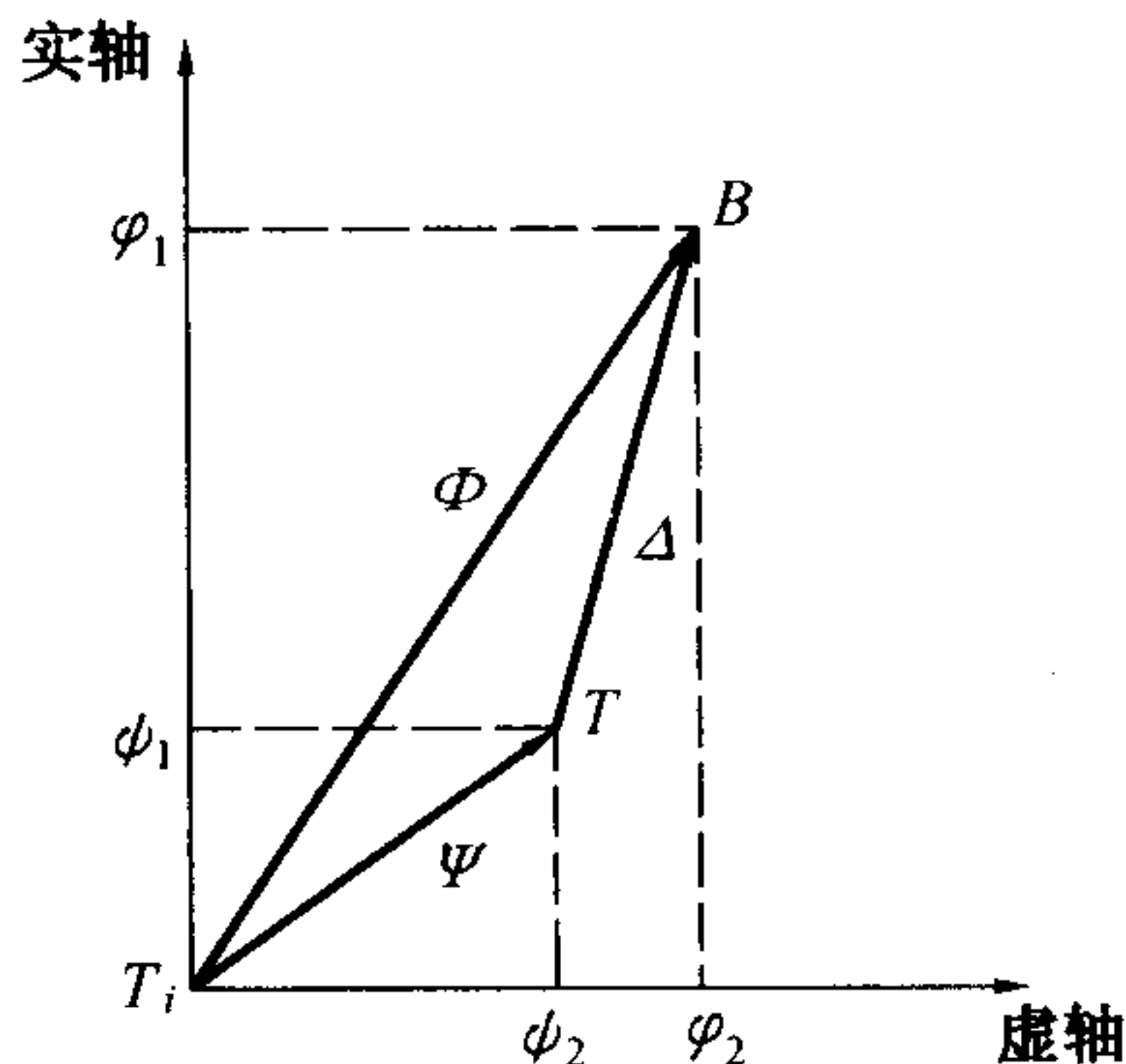


图 8.15 复平面

① 往后,原点仍以  $o$  表示。





力偶亦等效于  $M_\eta$  的作用, 这样在  $B$  点就有二力  $f_\eta$  和  $-f_\zeta$  作用, 写成复数形式为

$$f = f_\eta + if_\zeta = M_\zeta - iM_\eta$$

这正是式(8.157)所定义的。可见等效力  $f$  是作用于  $B$  点, 等效于对弹轴摆动起作用的力矩  $M_\eta$  和  $M_\zeta$  之力。其方向可理解为: 当弹轴静止时, 若有力矩  $M$  作用其上, 作用瞬间弹轴摆动时  $B$  点的运动方向。

引入等效力的概念之后, 方程(8.155)所描述的弹轴摆动运动, 便从形式上描述成质点  $B$  的平面运动了。式中  $iC\dot{\gamma}\dot{\theta} - A\ddot{\theta}$  是与重力有关的项, 是由弹道弯曲引起的, 其中  $iC\dot{\gamma}\dot{\theta}$  被称为重力陀螺项。最后一项是动不平衡惯性力矩的等效力。利用式(8.144)的符号, 将(8.117)和(8.118)两式进行简化得

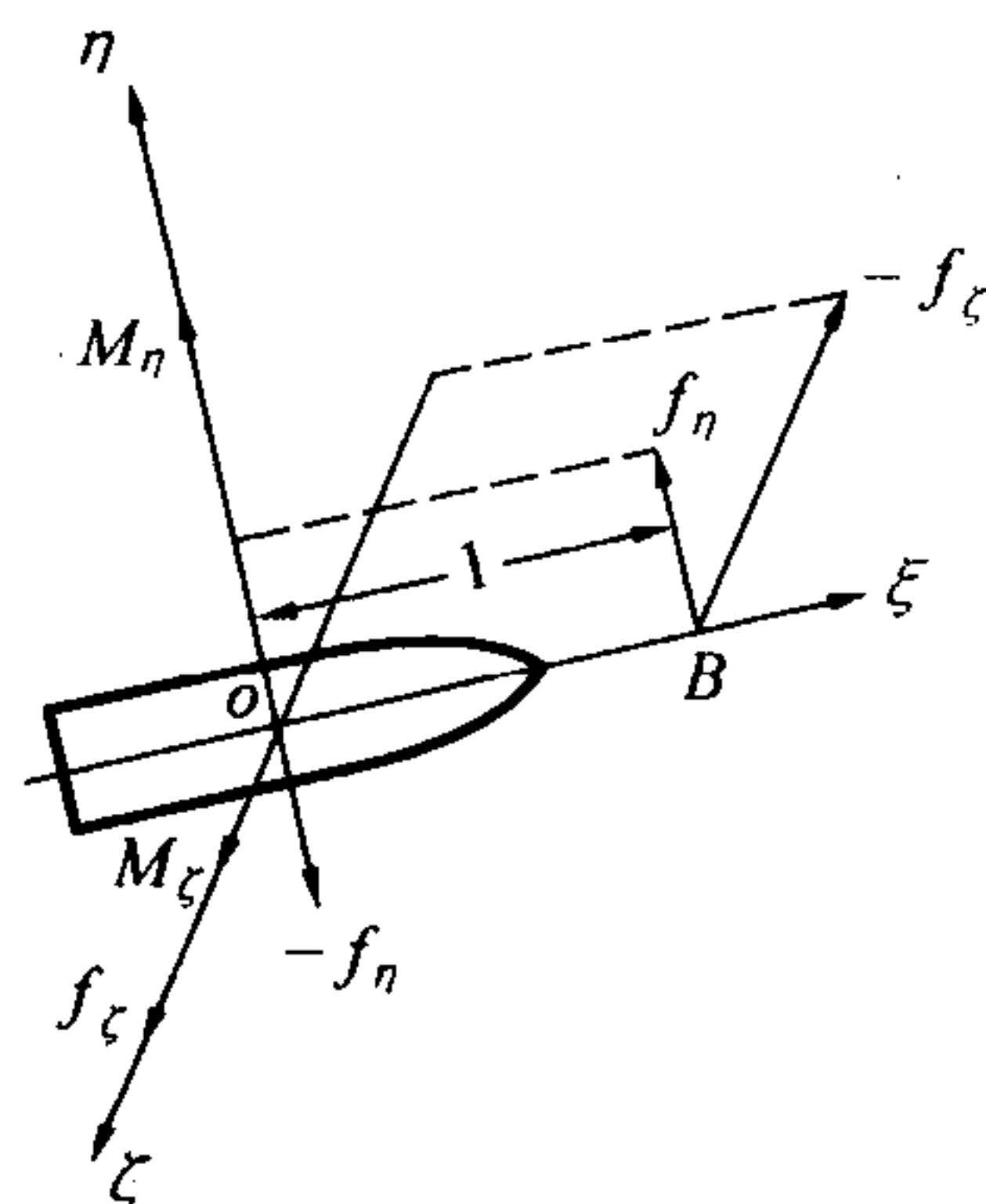


图 8.16 等效力

$$\begin{cases} M_\eta = F_P(L_{z_1} \cos \gamma + L_{y_1} \sin \gamma) - Ak_z v^2 \left( \delta_2 + \frac{w_z}{v} \right) + \\ \quad Ak_{zd} v \dot{\varphi}_2 + Ak_y v^2 \left( \delta_1 - \frac{w_{x\perp}}{v} \right) \\ M_\zeta = F_P(L_{z_1} \sin \gamma - L_{y_1} \cos \gamma) - Ak_z v^2 \left( \delta_1 - \frac{w_{x\perp}}{v} \right) - \\ \quad Ak_{zd} v (\dot{\varphi}_1 + \dot{\theta}) + Ak_y v^2 \left( \delta_2 + \frac{w_z}{v} \right) \end{cases} \quad (8.160)$$

将式(8.160)代入式(8.157)得

$$f = -F_P L e^{i\gamma} + Ak_z v^2 \left( \Delta + \frac{w_\perp}{v} \right) - Ak_{zd} v \dot{\Phi} - \\ Ak_{zd} v \dot{\theta} - iAk_y v^2 \left( \Delta + \frac{w_\perp}{v} \right) \quad (8.161)$$

式中

$$L = L_{y_1} + iL_{z_1} \quad (8.162)$$

将式(8.161)代入式(8.155)并与式(8.148)联立得

$$\begin{cases} v\dot{\Psi} = a_P \Delta + b_\gamma v^2 \left( \Delta + \frac{w_\perp}{v} \right) + b_x v w_\perp + g \sin \theta \Psi \\ \ddot{\Phi} - i \frac{C}{A} \dot{\gamma} \dot{\Phi} - (k_z - i k_y) v^2 \left( \Delta + \frac{w_\perp}{v} \right) + k_{zd} v \dot{\Phi} = \\ \quad - \frac{F_P}{A} L e^{i\gamma} + \left( 1 - \frac{C}{A} \right) \beta_D (\dot{\gamma}^2 - i \ddot{\gamma}) e^{i\gamma} + i \frac{C}{A} \dot{\gamma} \dot{\theta} - \ddot{\theta} - k_{zd} v \dot{\theta} \\ \Phi = \Psi + \Delta \end{cases} \quad (8.163)$$

初始条件( $t = t_0$  时)为

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0, \Phi = \Phi_0, \Psi = \Psi_0$$



方程组(8.163)就是扰动运动方程组的简化形式,在以后进行散布和稳定性分析时,用该方程组可求出解析解。

## 8.6 含有其他次要力和力矩以及扰动因素的扰动运动方程组

有时为了更全面地分析弹箭的飞行稳定性和散布,需要考虑到某些次要力和力矩,以及曾提及过的一些次要性的扰动因素。若将它们并入到式(8.163)中,便得到全力组全力矩作用下的并含有各种扰动因素的扰动运动方程组。

### 8.6.1 力和力矩

#### 1. 马格努斯力

马格努斯力的表达式为

$$R_{zm} = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_{zm} \quad (8.164)$$

马格努斯力系数  $C_{zm}$  常取线性式

$$C_{zm} = C_{zm}'' \left( \frac{\omega_{\xi} d}{v} \right) \delta \quad (8.165)$$

马格努斯力系数二次导数

$$C_{zm}'' = \frac{\partial^2 C_{zm}}{\partial \left( \frac{\omega_{\xi} d}{v} \right) \partial \delta} \quad (8.166)$$

约定矢量  $R_{zm}$  与矢量  $(\xi \times v)$  一致时,  $C_{zm}''$  取正值,反之取负值。 $R_{zm}$  垂直于攻角平面,且滞后复攻角  $\Delta$  为  $90^\circ$ ,则用复数表示为

$$R_{zm} = -i m b_{zm} v \omega_{\xi} \Delta \quad (8.167)$$

式中

$$b_{zm} = \frac{\rho S d}{2m} C_{zm}'' \quad (8.168)$$

#### 2. 周期性诱导力和力矩

尾翼弹由于攻角的存在,特别当攻角较大时,弹身背风面所拖出的旋涡将会影响处于涡迹区内之翼片的受力状态。在对马格努斯效应的机理进行分析时,已计及弹体遮盖所引起的侧向力及力矩。而这里还将计及的,是在翼片随弹体自转的过程中所引起的周期性侧向力——通常称之为诱导侧向力,以及该力所形成的诱导侧向力矩和轴向诱导滚转力矩。

将某翼片与攻角平面的夹角以  $r$  表示,带有  $n_w$  片相同尾翼的旋转对称弹箭,当它对攻角平面处于镜面对称时,其  $r = 0$  或  $\pi/n_w$ ,如图 8.17 所示。此时弹体尾部横截面上的旋涡分布是左右对称的,旋涡所引起的左右两边压力相等。若  $r = \pi/(2n_w)$  时,那么左右两边就不对称





了,右边翼片受涡迹遮盖较左边多,便产生了向右的侧向力,而且此时的侧向力最大。此力对质心形成侧向力矩,对弹轴形成滚转力矩。不难看出,这三个量都是周期为  $2\pi/n_w$  的奇函数,可以用傅里叶正弦级数来表示。在最简单的情况下,拟取下述表达式。

诱导侧向力为

$$R_S = \frac{1}{2} \rho v^2 S C'_S \delta \sin n_w r \quad (8.169)$$

式中,  $C'_S$  是诱导侧向力系数导数。记

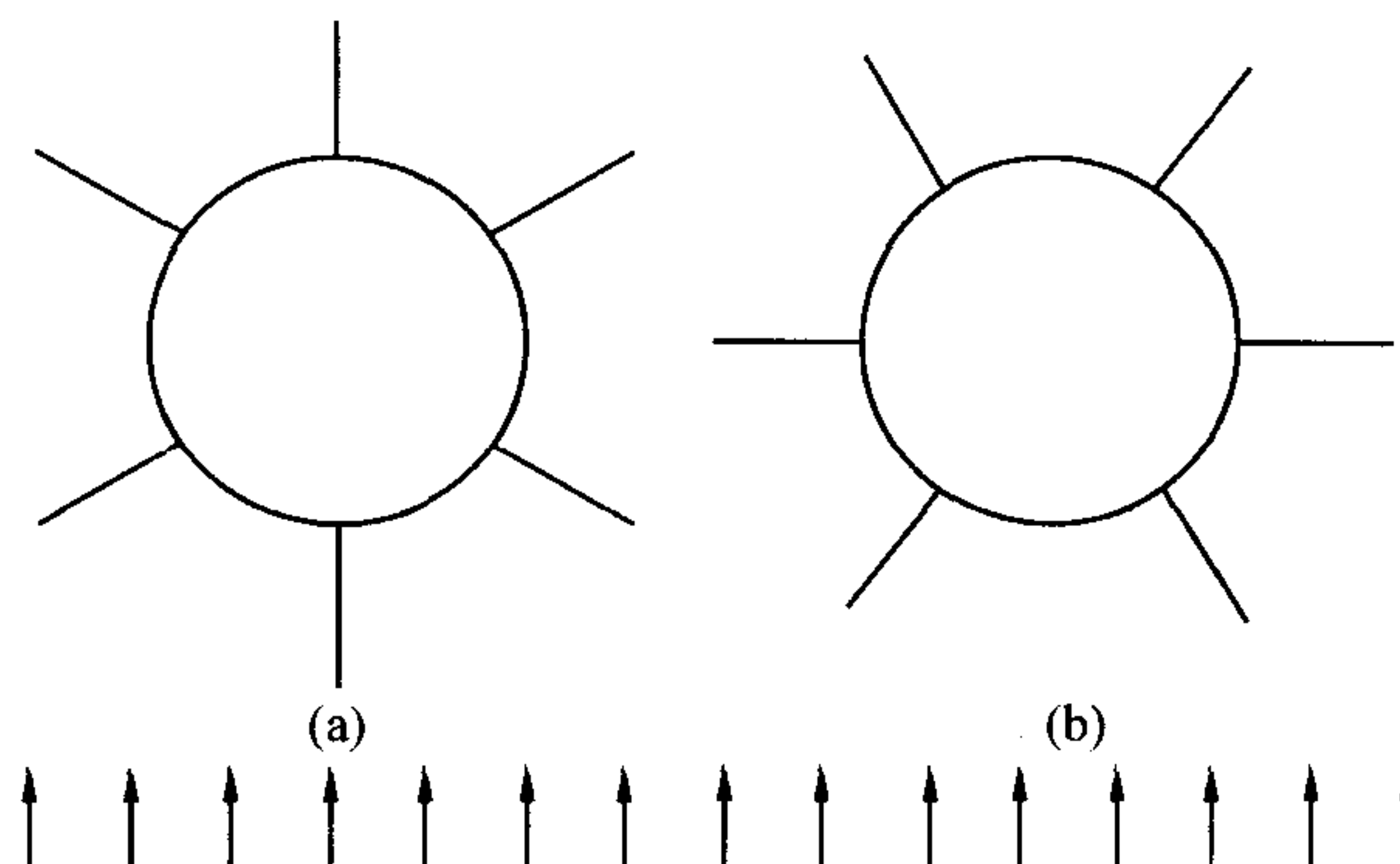


图 8.17 尾翼弹对攻角平面处于镜面对称状态

(a)  $r=0$ , (b)  $r = \frac{\pi}{n_w}$

$$b_S = \frac{\rho S C'_S}{2m} \sin n_w r \quad (8.170)$$

则用复数表示为

$$R_S = i m b_S v^2 \Delta \quad (8.171)$$

诱导侧向力矩为

$$M_S = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m'_S \delta \sin n_w r \quad (8.172)$$

式中,  $m'_S$  是诱导侧向力矩系数导数。记

$$k_S = \frac{\rho S l m'_S}{2A} \sin n_w r \quad (8.173)$$

则该力矩的等效力为

$$f_S = -i A k_S v^2 \Delta \quad (8.174)$$

周期性诱导滚转力矩为

$$M_{rc} = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_{rc}(\delta) \sin n_w r \quad (8.175)$$

式中,  $m_{rc}(\delta)$  是周期性诱导滚转力矩系数。

### 3. 非周期性诱导滚转力矩

本章曾介绍马格努斯效应的机理时,提及弹身遮盖所引起的马格努斯力,该力对质心的侧向力矩属马格努斯力矩的一部分;况且它还将形成滚转力矩。此外,目前一些火箭弹采用了卷弧翼,即使在零攻角、零斜置角的情况下,弧翼上也能产生自诱导滚转力矩<sup>[53,55]</sup>,其大小和方向取决于弧翼厚度与中弧线曲率半径之比,翼剖面前缘形状,翼区弹身直径的阶跃变化,来流马赫数等。由上述两方面所形成的非周期性诱导滚转力矩表示为



$$M_{ro} = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_{ro}(\delta) \quad (8.176)$$

式中,  $m_{ro}(\delta)$  是非周期性诱导滚转力矩系数。

#### 4. 由横向转速引起的马格努斯力矩

当旋转弹(不管是否有尾翼)具有横向转速时,便由诱导横向气流速度加之弹体的滚转,而产生马格努斯效应;遂至就有附加的空气动力和相应的力矩。通常将前者忽略不计,而对很细长的尾翼式火箭,后者则是值得考虑的。因为该力矩与轴向转速  $\omega_\xi$  及弹轴摆动角速度  $\omega_a$  成正比,这与陀螺力矩类似(但有本质不同),故在空气动力学中称为空气陀螺力矩,表达式为

$$M_G = \frac{1}{2} \rho S d l^2 m_G'' \omega_\xi \omega_a \quad (8.177)$$

约定当矢量  $M_G$  的方向超前  $\omega_a$  为  $90^\circ$  时,空气陀螺力矩系数导数  $m_G''$  取正值,反之取负值。在复平面上,该力矩的等效力可简化为下式

$$f_G = i A k_G \dot{\gamma} \Phi \quad (8.178)$$

式中

$$k_G = \frac{\rho S d l^2}{2A} m_G'' \quad (8.179)$$

#### 5. 下洗延迟力矩

此是阻滞攻角角速度变化的力矩,其作用与赤道阻尼力矩类似,表达式为

$$M_{z\delta} = \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_{z\delta} \quad (8.180)$$

下洗延迟力矩系数  $m_{z\delta}$  与其导数的关系为

$$m_{z\delta} = m_{z\delta}' \left( \frac{l \dot{\delta}}{v} \right) \quad (8.181)$$

记

$$k_{z\delta} = \frac{\rho S l^2 m_{z\delta}'}{2A} \quad (8.182)$$

则该力矩的等效力为

$$f_{z\delta} = -A k_{z\delta} v \dot{\Delta} \quad (8.183)$$

该力矩与赤道阻尼力矩之和,称为横向阻尼力矩。

#### 6. 燃气惯性力矩

在式(1.87)中的燃气惯性力  $F_{gas}$  将产生横向力矩,依据变质点系刚化原理,此力矩是当作外力矩看待的,它对绕心运动的影响很小,一般可不予计及。

### 8.6.2 某些扰动因素

#### 1. 质量偏心 $L_m$

在弹体坐标系内,质量偏心用复数  $L_m$  表示,它在弹轴坐标系内表示为  $L_m e^{i\gamma}$ ;从表 8.3 看出,在弹道系内亦近似为  $L_m e^{i\gamma}$ 。由于全弹质心绕全弹几何中心旋转,将要产生一法向加速度





为

$$\frac{d^2}{dt^2}[L_m e^{i\gamma}] = -L_m(\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})e^{i\gamma}$$

相应的法向惯性力为

$$F_{L_m} = mL_m(\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})e^{i\gamma} \quad (8.184)$$

### 2. 角推力偏心 $\beta_P$

角推力偏心  $\beta_P$  与弹体固连, 它随弹体一道旋转, 它在弹道系内所引起的法向力为

$$F_{\beta_P} = F_P \beta_P e^{i\gamma} \quad (8.185)$$

式中  $\beta_P$  是在弹体坐标系内测得角推力偏心二分量在复平面上表示的复数。

### 3. 气动偏心 $\delta_M$ 和 $\delta_N$

$\delta_M$  是静力矩为零时的攻角,  $\delta_N$  是升力为零时的攻角。将静力矩及升力中的  $\delta$  分别以  $(\delta - \delta_M)$  和  $(\delta - \delta_N)$  替代即可。

## 8.6.3 全力组扰动运动方程

把上述诸法向力和横向力矩的等效力加入到式(8.163)中, 并稍加整理便得

$$\begin{cases} \ddot{\Psi} - \left[ \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) + i \left( b_s - \frac{b_{zm}\dot{\gamma}}{v} \right) \right] v\Delta - \frac{g \sin \theta}{v} \Psi = \\ \quad f_1(t) e^{i\gamma} + (b_x + b_y) w_{\perp} \\ \ddot{\Phi} + \left[ k_{zd}v - i \left( \frac{C}{A} + k_G \right) \dot{\gamma} \right] \dot{\Phi} + k_z \delta v \dot{\Delta} - [k_z - i(k_s + k_y)] v^2 \Delta = \\ \quad f_2(t) e^{i\gamma} + (k_z - i k_y) v w_{\perp} - \ddot{\theta} + i \frac{C}{A} \dot{\gamma} \dot{\theta} - k_{zd} v \dot{\theta} \\ \Phi - \Psi - \Delta = 0 \\ \text{当 } t = t_0 \text{ 时, } \dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0, \Phi = \Phi_0, \Psi = \Psi_0 \end{cases} \quad (8.186)$$

式中

$$f_1(t) = \frac{a_P}{v} \beta_P + (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma}) \frac{1}{v} L_m - b_y v \Delta_N \quad (8.187)$$

$$f_2(t) = -\frac{F_P}{A} L + \left( 1 - \frac{C}{A} \right) (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma}) \beta_D - k_z v^2 \Delta_M \quad (8.188)$$

若考虑气动系数的非线性, 只需把  $b_x, b_y, k_z, k_y, \dots$  等表示成非线性展开式即可。

为了确定自转角  $\gamma$  的变化规律, 可由式(8.152)、(8.116)以及式(8.175)、(8.176)得方程

$$C\ddot{\gamma} = M_{xP} + \frac{1}{2} \rho v^2 S l m_{xw} - \frac{1}{2} \rho v S l d m'_{xd} \dot{\gamma} + \frac{1}{2} \rho v^2 S l [m_{ro}(\delta) + m_{rc}(\delta) \sin n_w r] \quad (8.189)$$

## 第九章 尾翼式旋转火箭弹的扰动运动

### 9.1 前言

现代的尾翼式火箭弹,大都绕其纵轴旋转。旋转的主要目的,在于减小某些不对称的干扰因素所引起的散布,诸如推力偏心、气动偏心之类。由于影响不旋转火箭散布的主要因素是推力偏心,因而人们赋予转速的出发点,首先便放在减小推力偏心引起的散布上面。至于被动段,人们也赋予一定的转速,比如可用斜置尾翼的方法,以消除气动偏心及质量偏心的影响。实践和理论都证明,只要赋予较低的转速(即使是每波长内半转),就能在被动段内造成良好的效果。至于主动段,影响散布的主要因素仍然是起始扰动、推力偏心和风。随着转速的增加,动不平衡的影响将会明显起来,这也是一个影响散布的因素。关于气动偏心、质量偏心、推力偏心角,它们对一般不旋转尾翼弹的散布影响很小,对旋转火箭的影响亦将很小,这里从略。

与第七章一样,将在飞行稳定性得到保障的前提下研究绕心运动,从而讨论散布问题。对稳定性的研究将放在第十三章。研究问题的方法与第七章相似,即求攻角和偏角,以考察绕心运动的规律,并进行散布分析。

应该指出,当转速在一定条件下,低速旋转火箭弹的散布计算和分析可以用比较简单的公式,起始扰动和风的散布公式,可直接应用第七章的结果。

### 9.2 运动微分方程的变量变换

引方程组(8.163)如下(注意尾翼弹  $m'_z < 0$ , 而设  $m'_y > 0$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} v\dot{\Psi} = a_P\Delta + b_y v^2 \left( \Delta + \frac{w_\perp}{v} \right) + b_x v w_\perp + g \sin\theta \Psi \\ \ddot{\Phi} - i \frac{C}{A} \dot{\gamma} \dot{\Phi} + (k^2 + i k_y) v^2 \left( \Delta + \frac{w_\perp}{v} \right) + k_{zd} v \dot{\Phi} = \\ \quad - \frac{F_P}{A} L e^{i\gamma} + \left( 1 - \frac{C}{A} \right) \beta_D (\dot{\gamma}^2 - i \ddot{\gamma}) e^{i\gamma} + i \frac{C}{A} \dot{\gamma} \dot{\theta} - \ddot{\theta} - k_{zd} v \dot{\theta} \\ \Phi = \Psi + \Delta \\ \text{当 } t = t_0 \text{ 时, } \dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0, \Phi = \Phi_0, \Psi = \Psi_0 \end{array} \right.$$

其中重力加速度分量  $g \sin\theta \Psi$  对散布影响小,可不考虑。马格努斯力矩对稳定性有影响,在稳定





性分析中要考虑;但对散布分析来说,因为  $|k_y|$  比  $k^2$  要小得多,在保证飞行稳定条件下,它对散布影响很小,是可略去的。为简化书写,不妨记第二个方程等式右边的和式为  $E$ ,即

$$E = -\frac{F_P}{A}Le^{i\gamma} + \left(1 - \frac{C}{A}\right)\beta_D(\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})e^{i\gamma} + i\frac{C}{A}\dot{\gamma}\dot{\theta} - \ddot{\theta} - k_{zd}\dot{\theta} \quad (9.1)$$

于是采用如下方程组

$$\begin{cases} v\dot{\Psi} = a_P\Delta + b_y v^2\left(\Delta + \frac{w_\perp}{v}\right) + b_x v w_\perp & \textcircled{1} \\ \ddot{\Phi} - i\frac{C}{A}\dot{\gamma}\dot{\Phi} + k^2 v^2\left(\Delta + \frac{w_\perp}{v}\right) + k_{zx}v\dot{\Phi} = E & \textcircled{2} \\ \Phi = \Psi + \Delta & \textcircled{3} \\ \text{当 } t = t_0 \text{ 时, } \dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0, \Phi = \Phi_0, \Psi = \Psi_0 \end{cases} \quad (9.2)$$

仿式(7.32),仍取

$$u = ks$$

则

$$\frac{d\Psi}{dt} = kv\Psi' \quad (9.3)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = kv\Phi' \quad (9.4)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = (kv)^2\Phi'' + k\frac{dv}{dt}\Phi'$$

对  $dv/dt$  可取式(7.35),则

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = (kv)^2\Phi'' + k(a_P - b_x v^2 - g\sin\theta)\Phi' \quad (9.5)$$

将式(9.4)和式(9.5)代入式(9.2)②,得

$$\Phi'' + \frac{1}{k}\left(\frac{a_P - g\sin\theta}{v^2} - b_x + k_{zd} - i\frac{C}{A}\Gamma\right)\Phi' + \Delta = -\frac{w_\perp}{v} + \frac{E}{(kv)^2} \quad (9.6)$$

式中

$$\Gamma = \frac{\dot{\gamma}}{v} \quad (9.7)$$

$\Gamma$  叫转速比,多数情况下可取为常量。

类似式(7.38),取

$$W = v\Delta \quad (9.8)$$

则

$$\begin{aligned} W' &= v'\Delta + v\Delta' \\ \Delta' &= \frac{W'}{v} - \frac{v'}{v}\frac{W}{v} \end{aligned} \quad (9.9)$$

又

$$\Phi' = \Psi' + \Delta' \quad (9.10)$$

将(9.3)式代入(9.2)①知



$$\Psi' = \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \Delta + \frac{b_x + b_y}{k} \left( \frac{w_{\perp}}{v} \right) \quad (9.11)$$

将(9.9)和(9.11)式代入(9.10)式,得

$$\Phi' = \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \Delta + \frac{b_x + b_y}{k} \left( \frac{w_{\perp}}{v} \right) + \frac{W'}{v} - \frac{v'}{v} \frac{W}{v} =$$

$$\frac{W'}{v} + \left( \frac{a_P}{kv^2} + \frac{b_y}{k} - \frac{v'}{v} \right) \frac{W}{v} + \frac{b_x + b_y}{k} \left( \frac{w_{\perp}}{v} \right)$$

又

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{v} \frac{dv}{du} = \frac{1}{kv^2} (a_P - b_x v^2 - g \sin \theta)$$

则

$$\Phi' = \frac{W'}{v} + b^* \frac{W}{v} + \frac{b_x + b_y}{k} \left( \frac{w_{\perp}}{v} \right) \quad (9.12)$$

$b^*$  定义见式(7.41)。

对式(9.12)再求导一次,仿式(7.42),有

$$\Phi'' = \frac{W''}{v} + \left( b^* - \frac{v'}{v} \right) \frac{W'}{v} - b^* \frac{v'}{v^2} W - \frac{b_x + b_y}{k} \left( \frac{v'}{v} \right) \left( \frac{w_{\perp}}{v} \right) \quad (9.13)$$

将式(9.12)和式(9.13)代入式(9.6),略去二阶小量经整理得

$$W'' + 2(b - i\sqrt{S_g})W' + W = -w_{\perp} + \frac{E}{k^2 v} \quad (9.14)$$

式中  $b$  定义见式(7.44);  $S_g$  是一个综合参数,来源于陀螺力矩,叫做陀螺稳定因子

$$S_g = \left( \frac{\Gamma}{2nk} \right)^2 \quad (9.15)$$

$n$  为转动惯量之比

$$n = \frac{A}{C} \quad (9.16)$$

由常系数二阶微分方程(9.14)解出攻角  $\Delta$  后,再代入式(9.11),便可得偏角  $\Psi$ ,式(9.14)和(9.11)是两个很重要的角运动方程式。

## 9.3 起始扰动所引起的攻角和偏角

### 9.3.1 攻角和偏角公式

求解起始扰动引起的攻角,需要解式(9.14)的齐次方程,即

$$W'' + 2(b - i\sqrt{S_g})W' + W = 0 \quad (9.17)$$

初始条件( $u = u_0$  时)为

$$W' = W'_0, W = W_0 = v_0 \Delta_0 = v_0 (\Phi_0 - \Psi_0) \quad (9.18)$$

$W'_0$  可由式(9.12)及式(9.4)知





$$W'_0 = \frac{\dot{\Phi}_0}{k} \quad (9.19)$$

这里假定  $\Gamma$  为常数, 即转速  $\dot{\gamma}$  与飞行速度  $v$  是正比关系, 那么  $S_g$  也视为常量。

方程(9.17)的二特征根为

$$r_{1,2} = -b + i\sqrt{S_g} \pm \sqrt{(b - i\sqrt{S_g})^2 - 1} \quad (9.20)$$

一般火箭的  $\sqrt{S_g}$  要比  $b$  大, 因而可近似取  $(b - i\sqrt{S_g})^2 \approx -S_g$ , 则

$$r_{1,2} = -b + i(\sqrt{S_g} \pm \sqrt{S_g + 1})$$

令

$$\begin{cases} h_1 = \sqrt{S_g + 1} + \sqrt{S_g} \\ h_2 = \sqrt{S_g + 1} - \sqrt{S_g} \end{cases} \quad (9.21)$$

则方程(9.17)有如下形式的解

$$W = e^{-b(u-u_0)} [C_1 e^{ih_1(u-u_0)} + C_2 e^{-ih_2(u-u_0)}] \quad (9.22)$$

将初始条件(9.18)代入式(9.22), 可决定出参数  $C_1$  和  $C_2$

$$\begin{aligned} C_1 &= -i \frac{\dot{\Phi}_0}{2k\sqrt{S_g+1}} + \frac{h_2}{2\sqrt{S_g+1}} v_0 \Delta_0 \\ C_2 &= i \frac{\dot{\Phi}_0}{2k\sqrt{S_g+1}} + \frac{h_1}{2\sqrt{S_g+1}} v_0 \Delta_0 \end{aligned}$$

则由式(9.22)得攻角为

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2\sqrt{S_g+1}v} e^{-b(u-u_0)} \left\{ -i \frac{\dot{\Phi}_0}{k} [e^{ih_1(u-u_0)} - e^{-ih_2(u-u_0)}] + \right. \\ &\quad \left. (\Phi_0 - \Psi_0) v_0 [h_2 e^{ih_1(u-u_0)} + h_1 e^{-ih_2(u-u_0)}] \right\} \end{aligned} \quad (9.23)$$

这就是起始扰动  $\dot{\Phi}_0$ 、 $\Phi_0$  和  $\Psi_0$  所引起攻角的综合表达式。仍引入特征函数概念, 它表示单位外界扰动所引起的偏差量, 将  $\dot{\Phi}_0$ 、 $\Phi_0$  和  $\Psi_0$  分别取为 1 时, 得攻角特征函数表达式如下

$$\Delta_{\dot{\Phi}_0}^* = \frac{i}{2kv\sqrt{S_g+1}} e^{-b(u-u_0)} [e^{ih_1(u-u_0)} - e^{-ih_2(u-u_0)}] \quad (9.24)$$

$$\Delta_{\Phi_0}^* = \frac{1}{2\sqrt{S_g+1}} \cdot \frac{v_0}{v} e^{-b(u-u_0)} [h_2 e^{ih_1(u-u_0)} + h_1 e^{-ih_2(u-u_0)}] \quad (9.25)$$

$$\Delta_{\Psi_0}^* = -\Delta_{\Phi_0}^* \quad (9.26)$$

则

$$\Delta = \dot{\Phi}_0 \Delta_{\dot{\Phi}_0}^* + \Phi_0 \Delta_{\Phi_0}^* + \Psi_0 \Delta_{\Psi_0}^* \quad (9.27)$$

该式与式(7.56)在形式上是一致的, 只不过如今是复数罢了。由此可见,  $\Delta$  亦是由三部分叠加



起来的,这也就是式(7.57)的三种初始条件解的叠加,只不过当今之起始扰动量是复数而已。

下面来求偏角。将式(9.24)代入式(9.11),积分便得  $\dot{\Phi}_0$  引起偏角  $\Psi_{\dot{\Phi}_0}$  的特征函数  $\Psi_{\dot{\Phi}_0}^*$

$$\Psi_{\dot{\Phi}_0}^* = \int_{u_0}^u \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \Delta \dot{\Phi}_0 du = \frac{i}{2\sqrt{S_g + 1}} \int_{u_0}^u \frac{a_P + b_y v^2}{kv^2} e^{-b(u-u_0)} \times \frac{1}{kv} [e^{ih_1(u-u_0)} - e^{-ih_2(u-u_0)}] du \quad (9.28)$$

精确积分上式是困难的,但可仿第七章 7.4 的近似处理方法,仍利用有效滑轨长度概念,并且由式(7.62)之  $v^2 = 2as$  代入上式,然后近似取

$$\left( \frac{a_P}{a} + 2b_y s \right) e^{-b(u-u_0)} \approx \frac{a_P}{a} + 2b_y s_0 = C_3 \quad (9.29)$$

则得

$$\Psi_{\dot{\Phi}_0}^* = - \frac{i}{2\sqrt{S_g + 1}} \times \frac{C_3}{\sqrt{2ak}} \int_{u_0}^u \frac{1}{2u\sqrt{u}} [e^{ih_1(u-u_0)} - e^{-ih_2(u-u_0)}] du \quad (9.30)$$

在第七章已定义下列函数

$$B(y_0, y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{2y} \sqrt{\frac{y_0}{y}} e^{i(y-y_0)} dy \quad (9.31)$$

其实部为

$$B_R(y_0, y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{2y} \sqrt{\frac{y_0}{y}} \cos(y - y_0) dy$$

其虚部为

$$B_I(y_0, y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{2y} \sqrt{\frac{y_0}{y}} \sin(y - y_0) dy$$

$B_R$  和  $B_I$  列于附表 14 中。

那么对函数

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{2u} \sqrt{\frac{u_0}{u}} e^{ih(u-u_0)} du$$

的计算可利用  $B(y_0, y)$  这个函数解决。事实上

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{2u} \sqrt{\frac{u_0}{u}} e^{ih(u-u_0)} du = \int_{hu_0}^{hu} \frac{1}{2hu} \sqrt{\frac{hu_0}{hu}} e^{i(hu-hu_0)} d(hu) = B(hu_0, hu)$$

式中

$$B(hu_0, hu) = B_R(hu_0, hu) + iB_I(hu_0, hu) \quad (9.32)$$

于是用  $\sqrt{u_0}$  乘式(9.30)分子和分母之后,便得

$$\Psi_{\dot{\Phi}_0}^* = - \frac{iC_3}{2kv_0\sqrt{S_g + 1}} [B(h_1 u_0, h_1 u) - \bar{B}(h_2 u_0, h_2 u)] \quad (9.33)$$





式中  $\bar{B}$  是  $B$  的共轭复数, 为

$$\bar{B}(y_0, y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{2y} \sqrt{\frac{y_0}{y}} e^{-i(y-y_0)} dy \quad (9.34)$$

下面求起始摆动角  $\Phi_0$  (或  $\Delta_0$ ) 引起偏角  $\Psi_{\Phi_0}$  的特征函数  $\Psi_{\Phi_0}^*$  (或  $\Psi_{\Delta_0}^*$ )。可将式(9.25) 改写一下形式

$$\begin{aligned} \Delta_{\Phi_0}^* &= \frac{1}{2\sqrt{S_g+1}} \frac{v_0}{v} e^{-b(u-u_0)} [h_1 e^{-ih_2(u-u_0)} - h_1 e^{ih_1(u-u_0)} + h_1 e^{ih_1(u-u_0)} + h_2 e^{ih_1(u-u_0)}] = \\ &\quad - ih_1 kv_0 \left( -\frac{i}{2kv\sqrt{S_g+1}} \right) e^{-b(u-u_0)} [e^{ih_1(u-u_0)} - e^{-ih_2(u-u_0)}] + \\ &\quad \frac{v_0}{v} e^{-b(u-u_0)} \times e^{ih_1(u-u_0)} = \\ &\quad - ih_1 kv_0 \Delta_{\Phi_0}^* + \frac{v_0}{v} e^{-b(u-u_0)} \times e^{ih_1(u-u_0)} \end{aligned}$$

代入式(9.11) 积分便得

$$\Psi_{\Phi_0}^* = -ih_1 kv_0 \Psi_{\Phi_0}^* + C_3 B(h_1 u_0, h_1 u) \quad (9.35)$$

再求  $\Psi_{\Psi_0}^*$ , 由于

$$\Delta_{\Psi_0}^* = -\Delta_{\Phi_0}^*$$

代入式(9.11) 积分(注意初始条件  $\Psi_0$  的存在), 得

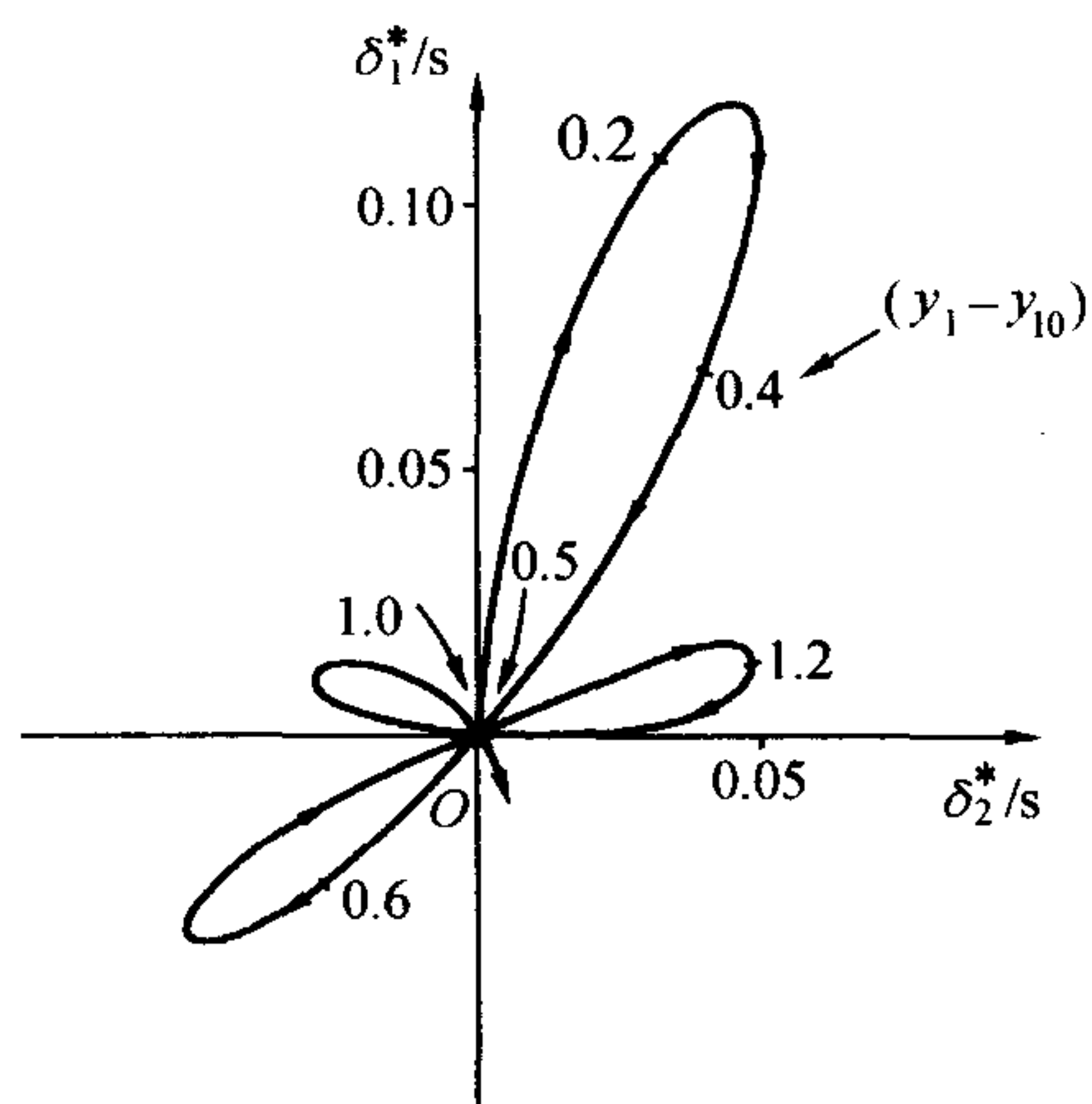
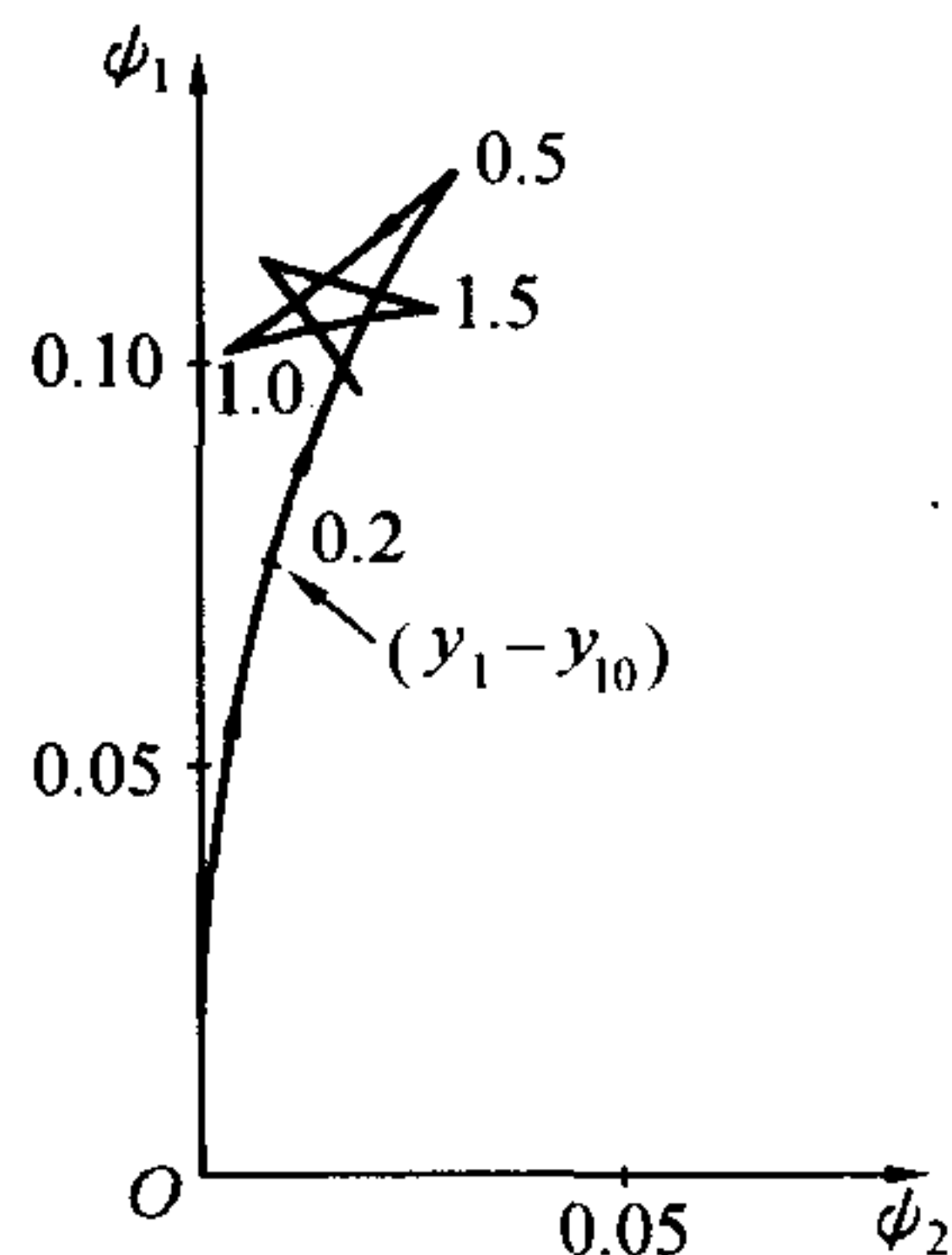
$$\Psi_{\Psi_0}^* = 1 - \Psi_{\Phi_0}^* \quad (9.36)$$

### 9.3.2 攻角和偏角的特性

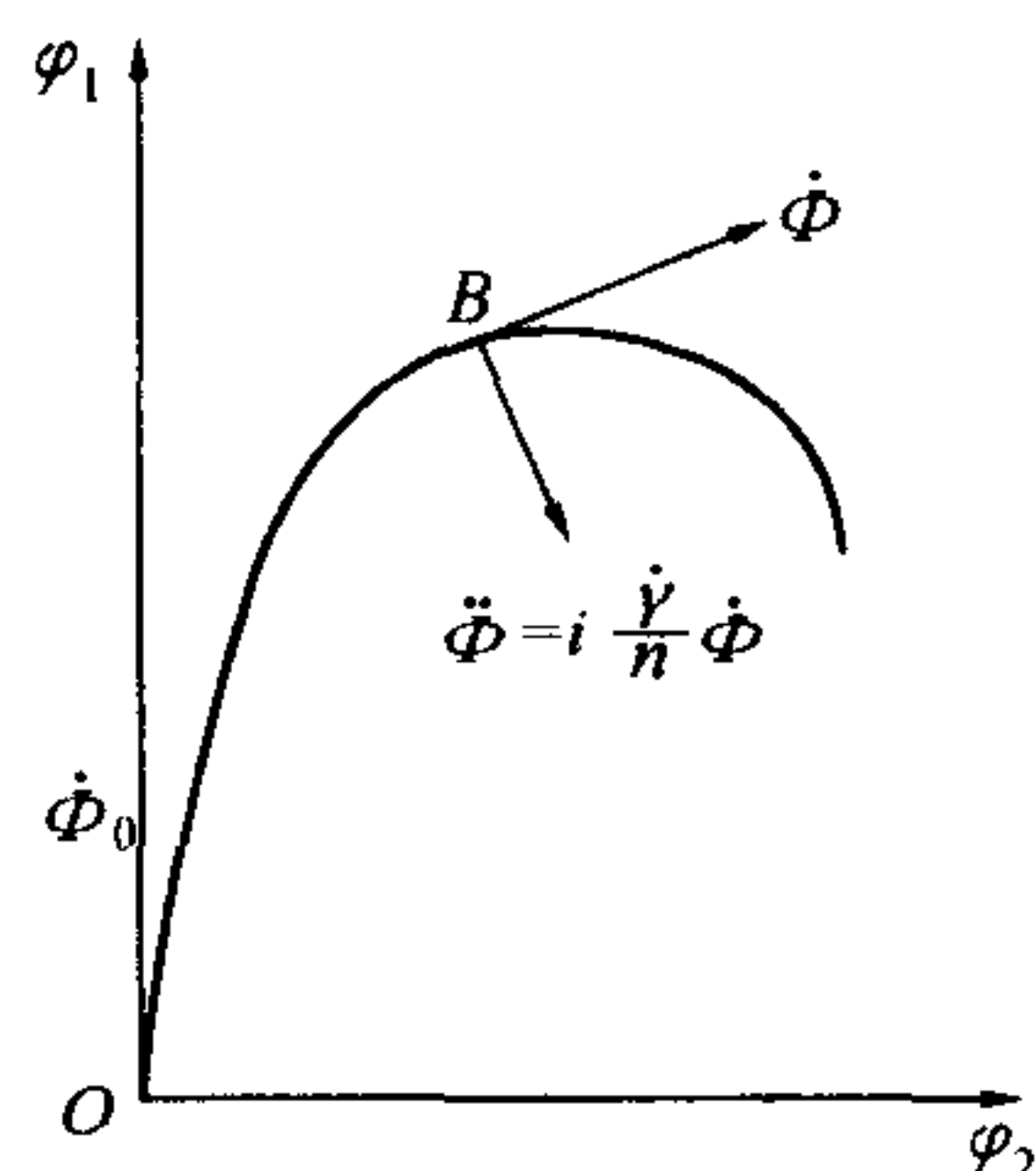
以  $\Delta_{\Phi_0}^*$  和  $\Psi_{\Phi_0}^*$  为例来研究攻角和偏角的特性。图 9.1 绘出了  $\Delta_{\Phi_0}^*$  的复平面示意图, 图中自变量  $y_1 = s/\lambda_1$ ,  $\lambda_1 = \lambda/\sqrt{S_g+1}$ ,  $\lambda_1$  是章动角变化一周期内火箭飞行的弹道弧长, 即波长, 见式(9.39)。图 9.2 是  $\Psi_{\Phi_0}^*$  的复平面示意图。箭头表示曲线的变化方向。

由图 9.1 及式(9.24) 看出, 攻角已不局限于一个平面内变化, 并且弹轴绕速度  $v$  作空间运动, 这个运动是由两个圆运动合成的。其中一个圆运动频率稍高, 一个频率稍低。为了更清楚地看出合成运动的性质, 不妨将式(9.24) 变换一下, 应用欧拉公式, 可得

$$\begin{aligned} \Delta_{\Phi_0}^* &= -\frac{i}{2kv\sqrt{S_g+1}} e^{-b(u-u_0)} e^{i\sqrt{S_g}(u-u_0)} [e^{i\sqrt{S_g+1}(u-u_0)} - e^{-i\sqrt{S_g+1}(u-u_0)}] = \\ &\quad \frac{1}{kv\sqrt{S_g+1}} e^{-b(u-u_0)} e^{i\sqrt{S_g}(u-u_0)} \sin \sqrt{S_g+1}(u-u_0) \end{aligned} \quad (9.37)$$

图 9.1  $\Delta\dot{\phi}_0^*$  曲线图 9.2  $\Psi\dot{\phi}_0^*$  曲线

攻角平面不仅沿弹体旋转方向回转,而且在攻角平面内,弹轴又作衰减的正弦摆动。旋转体绕对称轴自转将产生惯性力矩,也就是陀螺力矩,由式(8.145)看出,其等效力为  $iC\dot{\gamma}\dot{\Phi}$ ;再由式(8.153)第二式看出,单由陀螺力矩产生的弹轴上  $B$  点(图 8.14)加速度  $\ddot{\Phi}$ ,是与  $B$  点的速度  $\dot{\Phi}$  垂直的,且比  $\dot{\Phi}$  超前 90 度,如图 9.3 所示。因此在攻角平面内一有摆动角速度产生,便由陀螺力矩产生弹轴垂直于攻角平面的运动。在外弹道学中,通常把弹轴在攻角平面内的摆动叫做章动,把攻角平面绕速度矢量的回转叫进动。显然,弹轴相对于速度  $v$  的运动,就是章动和进动的合成。由式(9.37)知道,相对于自变量  $u$  来讲,进动的角速度为  $\sqrt{S_g}$  (必须注意,这里指的角速度是以  $u$  为自变量的,如以时间  $t$  为自变量时,进动角速度则是变量),这从图 9.1 也可看得出来。由此可知,攻角平面偏离起始扰动作用面的速度,是由陀螺稳定因子  $S_g$  所决定。 $S_g$  越大,攻角平面进动得越快;反之亦然。若  $S_g = 0$ ,即不旋转情况,则无进动运动产生,这时的攻角表达式变成式(7.53)。

图 9.3  $\dot{\Phi}$  与  $\ddot{\Phi}$  的关系

下面再看看章动情况。不妨把在攻角平面内观测到的章动角之特征函数用  $\delta^*$  表示,则自式(9.37)有

$$\delta^* = \frac{1}{kv\sqrt{S_g+1}} e^{-b(u-u_0)} \sin \sqrt{S_g+1}(u-u_0) \quad (9.38)$$

比较上式与式(7.53),可知旋转条件下的章动与不旋转条件下的平面摆动,其攻角变化规律并无原则上的不同。特别对野战火箭弹,  $S_g$  很小,这种差异就更小。但有两点差异也值得注意。其





一是章动的幅值减小为不旋转时的  $1/\sqrt{S_g + 1}$  倍。其二是章动一周周期质心移动的弹道弧长, 即波长有些变化, 由

$$\sqrt{S_g + 1}(\Delta u) = \sqrt{S_g + 1}k\lambda_1 = 2\pi$$

$$\text{得} \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{S_g + 1}} \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda}{\sqrt{S_g + 1}} \quad (9.39)$$

可见波长也是不旋转情况时的  $1/\sqrt{S_g + 1}$  倍。

关于偏角  $\Psi_{\dot{\phi}_0}^*$  有三点值得注意。一是其变化趋向取决于攻角, 就是从原点到攻角曲线上某一点的连接(割线), 平行于偏角曲线上相应自变量处的切线方向, 偏角曲线两尖点之间的范围对应半个波长。二是刚出炮口后的前半波长内偏角幅值增加很快, 以后变化就不多了, 最后趋于一个极限位置点。三是该极限位置点偏离实轴的程度取决于  $S_g$ ,  $S_g$  越大, 偏离越大, 反之亦然; 而且偏角幅值随  $S_g$  增加而减小。

对第一点可从受力情况来解释。因攻角割线在攻角平面内, 且垂直速度矢量  $\mathbf{v}$ ; 而推力法向分量及升力正好又是这个方向, 这两个法向力必然使速度矢量沿此方向偏转, 亦即偏角沿攻角割线方向变化。从数学关系式

$$\Psi' = \frac{1}{k} \left( \frac{a_p}{v^2} + b_y \right) \Delta$$

来看, 也是一目了然的。因攻角割线每半个波长改变一次正反方向, 故偏角曲线相应出现尖点。

关于第二点, 在第七章 7.4.2 已经说明理由, 这里就不重复。要明确的一点是, 这里也存在临界段。

关于第三点, 因为  $S_g$  体现陀螺效应的强弱,  $S_g$  大时, 陀螺效应就强, 攻角在前半个波长内偏离初始扰动平面就明显, 偏角相应地便沿攻角平面方向偏离实轴越大。因为攻角幅值随  $S_g$  增大而减小, 故而偏角幅值也减小。

总之, 与不旋转情况比起来, 影响攻角和偏角的因素多了一个体现陀螺效应强弱的稳定因子  $S_g$ , 它使攻角平面回转, 使攻角和偏角幅值减小, 使波长减小, 并使偏角在垂直于扰动作用方向上也产生了分量, 这些都是与不旋转情况的主要区别。

### 9.3.3 起始扰动引起的散布

设  $\dot{\phi}_0$  的两个分量为  $\dot{\phi}_{10}$  和  $\dot{\phi}_{20}$ ,  $\dot{\phi}_{10}$  就是射击面内的起始摆动角速度,  $\dot{\phi}_{20}$  是横向摆动角速度。而偏角特征函数  $\Psi_{\dot{\phi}_0}^*$  也有两个分量, 即  $\psi_{1\dot{\phi}_0}^*$  和  $\psi_{2\dot{\phi}_0}^*$ , 则

$$\Psi_{\dot{\phi}_0} = (\dot{\phi}_{10} + i\dot{\phi}_{20})(\psi_{1\dot{\phi}_0}^* + i\psi_{2\dot{\phi}_0}^*) = \dot{\phi}_{10}\psi_{1\dot{\phi}_0}^* - \dot{\phi}_{20}\psi_{2\dot{\phi}_0}^* + i(\dot{\phi}_{10}\psi_{2\dot{\phi}_0}^* + \dot{\phi}_{20}\psi_{1\dot{\phi}_0}^*)$$

由于  $\dot{\phi}_{10}$  和  $\dot{\phi}_{20}$  被看作两个相互独立的随机变量, 且服从正态分布律, 其中间误差分别为  $B(\dot{\phi}_{10})$  和  $B(\dot{\phi}_{10})$ , 则得高低和方向上的角散布(中间误差)分别为



$$B(\psi_1 \dot{\phi}_0) = \sqrt{[B(\dot{\phi}_{10}) \psi_1^* \dot{\phi}_0]^2 + [B(\dot{\phi}_{20}) \psi_2^* \dot{\phi}_0]^2} \quad (9.40)$$

$$B(\psi_2 \dot{\phi}_0) = \sqrt{[B(\dot{\phi}_{10}) \psi_2^* \dot{\phi}_0]^2 + [B(\dot{\phi}_{20}) \psi_1^* \dot{\phi}_0]^2} \quad (9.41)$$

在很多情况下,可近似取  $B(\dot{\phi}_{10}) = B(\dot{\phi}_{20}) = B(\dot{\phi}_0)$ ,则可得统一的计算公式

$$B(\psi \dot{\phi}_0) = B(\dot{\phi}_0) |\Psi_{\dot{\phi}_0}^*| \quad (9.42)$$

关于  $B(\dot{\phi}_0)$  的数量级,现有野战火箭大致为  $(0.01 \sim 0.10) \text{ rad/s}$ 。一般来讲增加炮口转速(增加  $\Gamma$ ),使  $B(\dot{\phi}_0)$  可能加大。

**例题 9.1** 若例题 7.1 所述火箭旋转,已知  $\dot{\gamma}_0 = 55 \text{ rad/s}$ ,  $\bar{C} = 0.1176 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,其他数据不变,求起始扰动引起的落点方向散布。

解

$$\Gamma = \frac{\dot{\gamma}_0}{v_0} = \frac{55}{66.33} = 0.829$$

$$n_\lambda = \frac{\Gamma}{k} = \frac{0.829}{0.08383} = 9.89$$

$$n = \frac{A}{C} = \frac{4.90}{0.1176} = 41.7$$

$$S_g = \left(\frac{n_\lambda}{2n}\right)^2 = 0.0141$$

$$h_1 = \sqrt{S_g + 1} + \sqrt{S_g} = 1.007 + 0.119 = 1.126$$

$$h_2 = \sqrt{S_g + 1} - \sqrt{S_g} = 0.888$$

$$h_1 u_0 = 0.472 \quad h_1 u_K = 13.1$$

$$h_2 u_0 = 0.372 \quad h_2 u_K = 10.4$$

查表:

$$B(h_1 u_0, h_1 u_K) = 0.3356 + 0.2626i$$

$$\bar{B}(h_2 u_0, h_2 u_K) = 0.3825 - 0.2799i$$

则

$$B(h_1 u_0, h_1 u_K) - \bar{B}(h_2 u_0, h_2 u_K) = -0.0469 + 0.5425i$$

代入式(9.33)

$$\begin{aligned} \Psi_{\dot{\phi}_0 K}^* &= -\frac{iC_3}{2kv_0\sqrt{S_g+1}}[B(h_1 u_0, h_1 u_K) - \bar{B}(h_2 u_0, h_2 u_K)] = \\ &= -\frac{i1.02}{2 \times 0.08383 \times 66.33 \times 1.007}(-0.0469 + 0.5425i) = 0.0494 + 0.00427i \end{aligned}$$

再代入式(9.35)

$$\begin{aligned} \Psi_{\dot{\phi}_0 K}^* &= -ih_1 kv_0 \Psi_{\dot{\phi}_0 K}^* + C_3 B(h_1 u_0, h_1 u_K) = \\ &= -i1.126 \times 0.08383 \times 66.33 \times (0.0494 + 0.00427i) + \end{aligned}$$





$$1.02 \times (0.3356 + 0.2626i) = 0.369 - 0.0414i$$

代入式(9.36)

$$\Psi_{\Psi_0 K}^* = 1 - \Psi_{\Phi_0 K}^* = 0.631 + 0.0414i$$

主动段末的角散布分别为

$$B(\psi_{\Phi_0 K}) = B_{\Phi_0} |\Psi_{\Phi_0 K}^*| = 0.10 \sqrt{0.0494^2 + 0.00427^2} \text{ rad} = 49.6 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$B(\psi_{\Phi_0 K}) = B_{\Phi_0} |\Psi_{\Phi_0 K}^*| = 4.0 \times 10^{-4} \sqrt{0.369^2 + 0.0414^2} \text{ rad} = 1.49 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$B(\psi_{\Psi_0 K}) = B_{\Psi_0} |\Psi_{\Psi_0 K}^*| = 7.0 \times 10^{-4} \sqrt{0.631^2 + 0.0414^2} \text{ rad} = 4.43 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

三者合起来的角散布为

$$B(\psi_K) = \sqrt{B^2(\psi_{\Phi_0 K}) + B^2(\psi_{\Phi_0 K}) + B^2(\psi_{\Psi_0 K})} = 49.8 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

于是

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\psi_K)}{\cos \theta_K} = \frac{49.8 \times 10^{-4}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{142}$$

从此例题计算结果与例题 7.1 之结果比较可见, 对此种  $S_g \ll 1$  的火箭, 考虑陀螺效应与否, 对散布计算的结果影响很小。

## 9.4 推力线偏心的影响

### 9.4.1 攻角和偏角公式

对推力线偏心引起的攻角, 可通过解微分方程式(9.14)的特解得到。然后将攻角代入(9.11)式, 便可求得偏角。然而, 这一数学运算过程是冗长而繁琐的, 这里仍然采用第七章 7.7 中指出的格林函数法。省略推导过程, 可直接写出表达式[须注意式(9.1)第一项有负号], 仿式(7.91)和式(7.92)如下

$$\Delta_L = - \int_{t_0}^t \frac{a_P L e^{i\gamma_n}}{R_A^2} \Delta_{\Phi_0}^*(u_n, u) dt_n \quad (9.43)$$

$$\Psi_L = - \int_{t_0}^t \frac{a_P L e^{i\gamma_n}}{R_A^2} \Psi_{\Phi_0}^*(u_n, u) dt_n \quad (9.44)$$

将  $\Delta_{\Phi_0}^*$  的表达式(9.24)及  $\Psi_{\Phi_0}^*$  的表达式(9.33)分别代入, 并注意将  $\Delta_{\Phi_0}^*$  及  $\Psi_{\Phi_0}^*$  中的  $u_0$  改为参数  $u_n, v_0$  改为  $v_n$ , 那么(9.43)和(9.44)两式是可能积分的。但不大可能利用现有的已知函数求得最后精确结果, 因而只好寻求近似积分的途径。

另外, 还须知道  $\gamma$  是  $u$  的什么函数。当假定火箭等加速自转时,  $\dot{\gamma}$  和  $v$  都与时间  $t$  成正比, 那



么  $\dot{\gamma}$  和  $v$  之比值[见式(9.7)]  $\Gamma$  是常数。这样,对式(9.7) 积分得

$$\gamma = \Gamma(s - s_0) \quad (9.45)$$

也就是说,从离轨时算起的自转角  $\gamma$  与离轨时算起的弹道弧长成正比。或将式(9.45) 写成下式

$$\gamma = n_\lambda(u - u_0) \quad (9.46)$$

式中  $n_\lambda$  由式(7.76) 及式(9.39) 可表示为

$$n_\lambda = \frac{\Gamma}{k} = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} = \sqrt{S_g + 1} \frac{\Gamma\lambda_1}{2\pi} = \sqrt{S_g + 1} n_{\lambda 1} \quad (9.47)$$

由于  $n_\lambda = \Gamma\lambda/(2\pi)$ , 该式分子相应于不旋转火箭一个波长内的自转角(以 rad 为单位), 以  $2\pi$  除之, 即表示一个波长内的自转周数。现代小初速野战尾翼式火箭弹,  $n_\lambda$  的数值大致为  $5 \sim 8$ , 但反坦克增程弹只有 2 左右。 $n_{\lambda 1}$  则表示尾翼式旋转弹章动一周期内的转数。具体型号火箭应具体选取最佳值, 不可千篇一律。

因为直接从式(9.44) 求  $\Psi_L$  的近似式比较困难, 于是先由较简单一些的式(9.43) 求  $\Delta_L$  的近似式, 然后代入式(9.11) 积分得  $\Psi_L$ 。

将式(9.24) 代入式(9.43), 得  $\Delta_L$  的特征函数(取  $L = 1$ )

$$\begin{aligned} \Delta_L^* = & -\frac{a_P}{k_z R_A^2} \left( -\frac{i}{2k_z v \sqrt{S_g + 1}} \right) \int_{u_0}^u \exp[-b(u - u_n)] \exp[in_\lambda(u_n - u_0)] \{ \exp[ih_1(u - u_n)] - \\ & \exp[-ih_2(u - u_n)] \} \frac{du_n}{v_n} = \\ & -\frac{a_P}{k_z R_A^2} \left( -\frac{i}{2k_z v \sqrt{S_g + 1}} \right) \int_{u_0}^u \frac{1}{v_n} \exp[-b(u - u_n)] \{ \exp(ih_1 u) \exp[i(n_\lambda - h_1)u_n - \\ & \exp(-ih_2 u) \exp[i(n_\lambda + h_2)u_n] \} \exp(-in_\lambda u_0) du_n \end{aligned} \quad (9.48)$$

在被积函数中, 中括号内的函数  $\exp[(in_\lambda - h_1)u_n]$  和  $\exp[i(n_\lambda + h_2)u_n]$  是频率较高的圆周期函数, 相对此函数来讲,  $(1/v_n)$  是单调减小的函数, 变化得远不及那么快, 因此在积分时, 可近似取某一平均值。考虑到偏角在刚出炮口一段形成的特性, 故可取为炮口值, 即

$$v_n \approx v_0 \quad (9.49)$$

这样, 对式(9.48) 就可积分得

$$\begin{aligned} \Delta_L^* = & -\frac{a_P}{k R_A^2} \left( -\frac{i}{2kv \sqrt{S_g + 1}} \right) \frac{1}{v_0} \left\{ \frac{i(h_1 + h_2)}{[b + i(n_\lambda - h_1)][b + i(n_\lambda + h_2)]} e^{in_\lambda(u - u_0)} - \right. \\ & \left. e^{-b(u - u_0)} \left[ \frac{1}{b + i(n_\lambda - h_1)} e^{ih_1(u - u_0)} - \frac{1}{b + i(n_\lambda + h_2)} e^{-ih_2(u - u_0)} \right] \right\} \end{aligned}$$

略去上式分母中的  $b$ , 并从式(9.21) 知

$$h_1 + h_2 = 2\sqrt{S_g + 1}$$

则





$$\Delta_L^* = -\frac{a_P}{kR_A^2} \left( -\frac{i}{2kv\sqrt{S_g+1}} \right) \frac{i}{v_0} \left\{ \left[ \frac{1}{n_\lambda - h_1} e^{ih_1(u-u_0)} - \frac{1}{n_\lambda + h_2} e^{-ih_2(u-u_0)} \right] \times \right. \\ \left. e^{-b(u-u_0)} - \frac{2\sqrt{S_g+1}}{(n_\lambda + h_2)(n_\lambda - h_1)} e^{in_\lambda(u-u_0)} \right\} \quad (9.50)$$

上式表明,周期性的推力偏心矩所引起的攻角是三个圆运动的合成:其中两个圆运动的圆频率(以  $u$  为自变量)即是绕心运动的固有圆频率( $h_1, h_2$ ),它们构成的合运动称为自由运动;第三个圆运动的圆频率即是周期性干扰力矩的圆频率( $n_\lambda$ ),此为受迫运动。总的运动是自由运动和受迫运动的合成。不失一般性,归结为下列三圆合成运动类型

$$\Delta = A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} + A_3 e^{i\phi_3} \quad (9.51)$$

式中  $A_j = A_{j0} \exp[d_j(s - s_0)]$ ,  $j = 1, 2, 3$  ( $d_j$  是阻尼指数,其中  $d_3 = 0$ )

$\phi_j = \phi_j'(s - s_0)$  ( $\phi_j'$  是幅角  $\phi_j$  对弹道弧长  $s$  的导数)

在靶道测量中,常用到此三圆运动模式。更一般的情况,再加上一个非周期项。在复平面上,式(9.50)的  $\Delta$  可表示成三个旋转矢量( $A_1, A_2, A_3$ )之和。

再回到式(9.50),当  $n_\lambda \gg h_1$  (随之  $n_\lambda \gg h_2$ ) 时,受迫运动项的幅值便远小于自由运动项的幅值,在近似计算中,可将前者略去。于是得近似式为

$$\Delta_L^* \approx -\frac{ia_P}{kn_\lambda v_0 R_A^2} \left( -\frac{i}{2kv\sqrt{S_g+1}} \right) [e^{ih_1(u-u_0)} - e^{-ih_2(u-u_0)}] e^{-b(u-u_0)}$$

将式(9.24)代入,并注意到  $kn_\lambda v_0 = \Gamma v_0 = \dot{\gamma}_0$ , 则

$$\Delta_L^* \approx -\frac{ia_P}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} \Delta_{\dot{\Phi}_0}^*(u_0, u) \quad (9.52)$$

或

$$\Delta_L \approx -i \frac{a_P L}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} \Delta_{\dot{\Phi}_0}^*(u_0, u) \quad (9.53)$$

可在上面所述条件下,推力偏心矩的作用相当于某一起始摆动角速度为

$$\dot{\Phi}_L \approx -iL \frac{a_P}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} \quad (9.54)$$

的作用效果,  $\dot{\Phi}_L$  被称为线推力偏心的等效起始扰动。这样,由  $L$  所引起的攻角和偏角分别为

$$\Delta_L = L \Delta_L^* = \dot{\Phi}_L \Delta_{\dot{\Phi}_0}^* \quad (9.55)$$

$$\Psi_L = L \Psi_L^* = \dot{\Phi}_L \Psi_{\dot{\Phi}_0}^* \quad (9.56)$$

#### 9.4.2 $\Delta_L^*$ 和 $\Psi_L^*$ 的特性

上述结论与受迫振动理论是一致的。下面不妨回顾一种简单的受迫振动方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \sin pt$$



当  $\omega \neq p$  时的通解为

$$x = a \sin(\omega t + \varepsilon) - \frac{f}{p^2 - \omega^2} \sin pt$$

式中  $a$  及  $\varepsilon$  由初始条件决定。在零初始条件下, 上式变为

$$x = \frac{f}{p^2 - \omega^2} \left( \frac{p}{\omega} \sin \omega t - \sin pt \right) \quad (*)$$

可见在干扰力作用下, 此系统不仅会被激起一个圆频率等于干扰力圆频率  $p$  的受迫振动分量, 而且还被激起一个圆频率等于系统固有圆频率的自由振动分量。这两个振动分量的振幅都与干扰力的幅值成正比。当  $p \gg \omega$  时, 受迫振动分量可以近似略去, 自由振动起决定性作用。此时干扰力引起的振动, 与齐次方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

在初始条件(起始扰动):  $t = 0$  时,  $x = x_0 = 0, \dot{x} = \dot{x}_0$  下的解

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (**)$$

具有大致相同的变化规律。若令上式中的  $\dot{x}_0$  为

$$\dot{x}_0 = \frac{fp}{p^2 - \omega^2} \approx \frac{f}{p}$$

(\*\*) 式即为(\*)式的自由振动。也就是说, 当干扰力圆频率远大于固有圆频率时, 周期性干扰力的作用相当于一等效起始扰动的作用。火箭在周期性推力偏心矩作用下的绕心运动, 不过是上述等效起始扰动的一般概念的具体应用而已<sup>[32]</sup>。

既然式(9.55)、(9.66)表明, 推力偏心矩的作用, 等效于某一起始摆动角速度  $\dot{\Phi}_0$  的作用, 那么攻角和偏角的变化规律便与  $\Delta_{\dot{\Phi}_0}^*$  和  $\Psi_{\dot{\Phi}_0}^*$  相同。当然, 这是近似的说法, 其差别还是有的, 尤其临近炮口一段。但从全局来看, 前面的说法是对的, 不能因为临炮口一段的差异而不承认总的变化趋势。

图 9.4 和图 9.5 所示的  $\Delta_L^*$  和  $\Psi_L^*$  曲线是解方程求得的计算结果。这两幅曲线图, 正好与虚轴负方向上作用一起始摆动角速度的曲线相似, 可以将图 9.1 和图 9.2 逆时针方向转  $90^\circ$  后, 再与图 9.4 和图 9.5 进行比较, 便可清楚地看出来。同样也说明了推力偏心矩与等效起始扰动(摆动角速度)的作用方向是虚轴负方向, 式(9.54)中  $L$  乘上  $-i$ , 正表明  $\Phi_L$  比  $L$  的位相滞后  $90^\circ$ 。也就是说, 沿实轴正向的推力线偏心(即推力线在弹体质心的上方), 所相应的等效起始扰动是

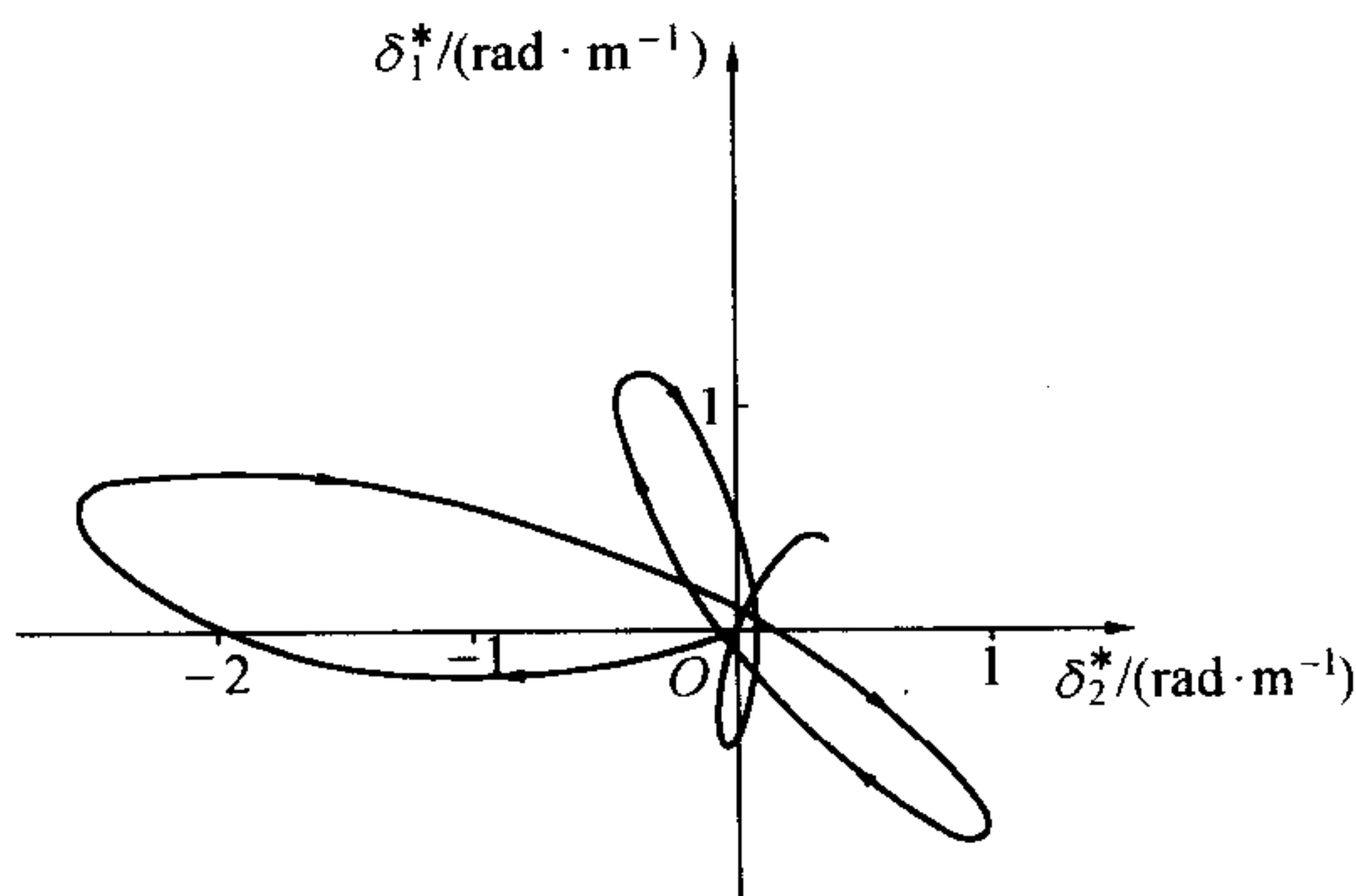


图 9.4  $\Delta_L^*$  图





指向虚轴负方向的。从其运动过程也可理解这一点。

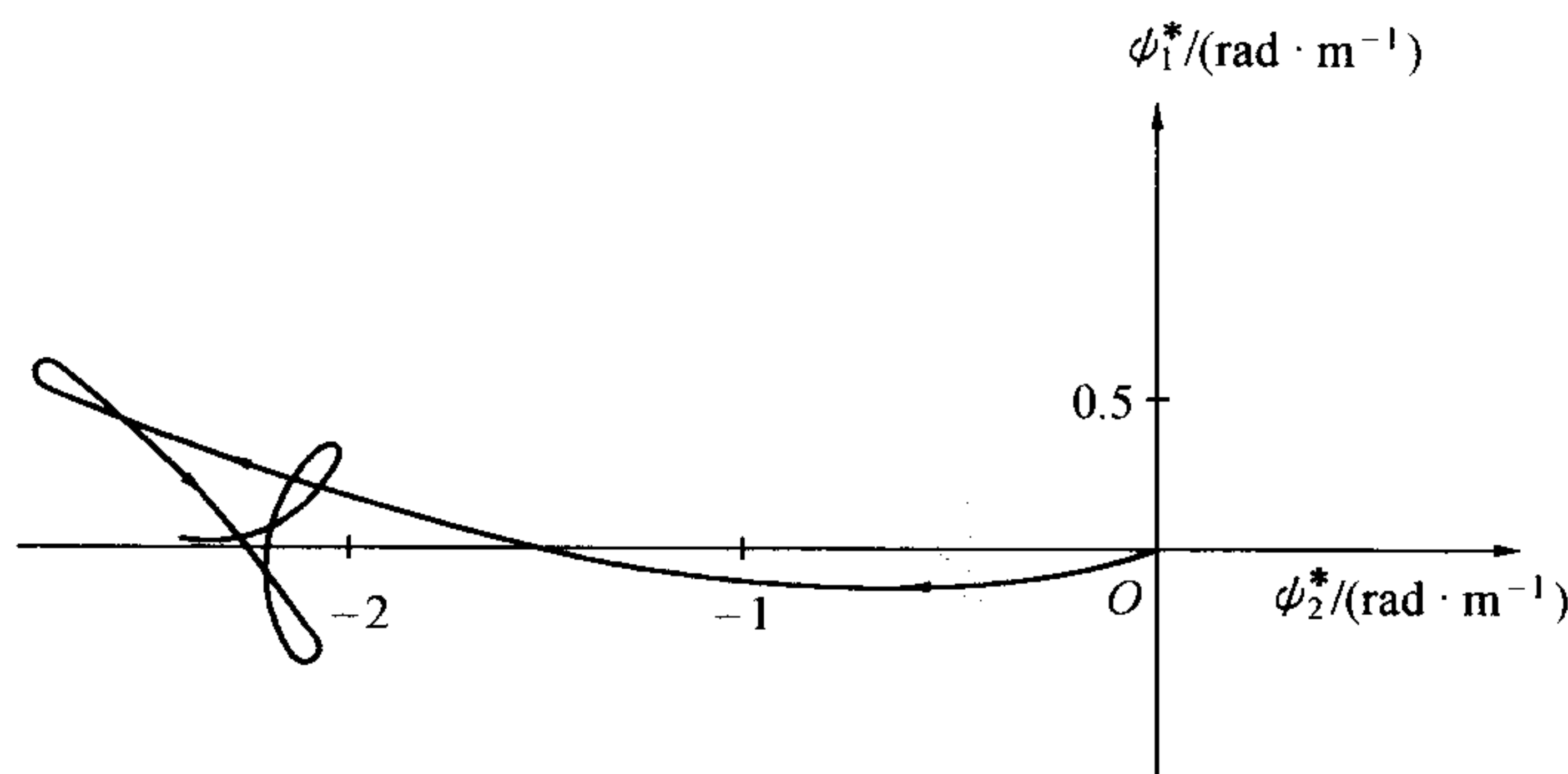


图 9.5  $\Psi_L^*$  图

设刚出炮口时推力线在质心上方,推力矩便使弹轴向上偏转,由于弹轴摆动周期比自转周期要长得多,以致在铅垂面内还来不及形成摆动角速度,推力偏心矩便就很快随弹体自转而改变方向——推力线转向质心的右方(从后朝前看)。在右方停留自转半周的时间,推力矩将使弹轴向左摆动。由于这段时间内的转速低,陀螺力矩甚小,弹轴可全然向左摆动,从而形成了一个向左的摆动角速度。在此摆动角速度的驱动下,弹轴将进行进动和章动。此后的推力偏心矩仍然在起作用,但由于自转速度的加快,其作用便基本上在正负方向上趋于对消了。可见炮口附近的摆动角速度将起决定性作用。

再看看  $\dot{\Phi}_L$  的性质。其幅值为

$$|\dot{\Phi}_L| = \frac{a_P L}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} = \frac{m a_P L}{m R_A^2 \dot{\gamma}_0} = \frac{M_P}{A} = \frac{1}{\dot{\gamma}_0} \quad (9.57)$$

式(9.57)说明  $|\dot{\Phi}_L|$  与炮口的转速  $\dot{\gamma}_0$  成反比,故常将式(9.57)叫反比公式。此外,还说明了等效起始摆动角速度,正好等于由推力偏心矩单独作用,在时间  $1/\dot{\gamma}_0$  内产生的弹轴摆动角速度。可见等效起始扰动与炮口转速  $\dot{\gamma}_0$  及赤道转动惯量  $A$  成反比,与推力偏心矩  $M_P$  成正比。

### 9.4.3 影响散布的因素

假定  $L$  的二分量正态分布,其中间误差为  $B_L$ ,则角散布为

$$B(\phi_L) = B_L \frac{a_P}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} |\Psi_{\dot{\Phi}_0}^*| \quad (9.58)$$

在低速旋转范围内,  $\Psi_{\dot{\Phi}_0}^*$  可取  $S_g = 0$  时的值,即为式(7.67)的  $\phi_{\dot{\Phi}_0}^*$ ,于是

$$B(\phi_L) = B_L \frac{a_P}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} \phi_{\dot{\Phi}_0}^* \quad (9.59)$$



计算表明,只要赋予适当的转速,便可把不旋转火箭的推力偏心引起的散布,减小到原有的数分之一到十几分之一,甚至在总散布中降为次要地位。

影响  $B(\psi_L)$  的因素,有  $k$ 、 $s_0$ 、 $\dot{\gamma}_0$ 、 $a_P$  以及弹长等。与  $k$  及  $s_0$  的关系类似图 7.21 和图 7.22 的规律,是随  $k$  及  $s_0$  增加而衰减的。 $B(\psi_L)$  与  $\dot{\gamma}_0$  是反比关系。 $\dot{\gamma}_0$  大到一定值后,再增大  $\dot{\gamma}_0$  的作用就不明显了,故没有必要求过高的转速(图 9.6)。转速增加使角偏差减小的根本原因,是使推力偏心矩的作用更趋于对称,从而更好地对消其影响之故。推力加速度的影响问题,一方面等效起始扰动随  $a_P$  增加而增加,当  $\dot{\gamma}_0$  与  $v_0$  成正比变化,而  $v_0$  满足式(7.79)的关系时;再考虑到式(9.33)的  $|\Psi_{\dot{\phi}_0}^*|$  与  $v_0$  成反比,则  $B(\psi_L)$  与  $a_P$  无关。这与不旋转火箭的结论是一致的。若是初速和炮口转速都与推力加速度无关,对这种特殊情况,当然  $B(\psi_L)$  随  $a_P$  增加而增加。此外,  $B(\psi_L)$  与弹长  $l$  的关系不明显。

#### 9.4.4 转速规律对 $B(\psi_L)$ 的影响

现有尾翼弹的导转方式很多。有斜置喷管式、燃烧室切向孔式、斜置尾翼式、螺旋滑轨式等。这样就使自转速度  $\dot{\gamma}$  的变化规律各不相同。对纯斜置喷管式或切向孔式,可以认为  $\dot{\gamma}$  与  $v$  为成正比关系,这种方法采用甚多,上面公式推导时也是假定此类情况。如单是螺旋滑轨式或由其他手段赋予火箭以一定转速,则在刚出炮口一段可视为等转速运动,但由于起决定性作用的是临界段内的转速,故对等速情况,还是可以取等加速情况下的公式计算散布,此时取  $\Gamma = \dot{\gamma}_0/v_0$ 。计算表明,这样的计算结果只比转速为常量时的准确值略小百分之几,对散布分析来说是允许的。

至于其他转速规律,仍应以炮口转速和初速之比为据进行估算,预料不会带来明显误差。若初始弹道段的转速变化剧烈,则需另作处置。

**例题 9.2** 计算例题 9.1 所述火箭的落点方向散布。数据由例题 7.1、7.2、9.1 给出。

**解** 由公式(9.58)

$$B(\psi_{LK}) = B_L \frac{a_P}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} |\Psi_{\dot{\phi}_0 K}^*| = 8.0 \times 10^{-4} \times \frac{440}{\frac{4.90}{39.20} \times 55} \times 49.6 \times 10^{-3} = 2.54 \times 10^{-3}$$

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\psi_{LK})}{\cos \theta_K} = \frac{2.34 \times 10^{-3}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{278}$$

由此例可见,只要给予尾翼式火箭弹以足够的自转速度,推力偏心引起的散布就可以降到次要

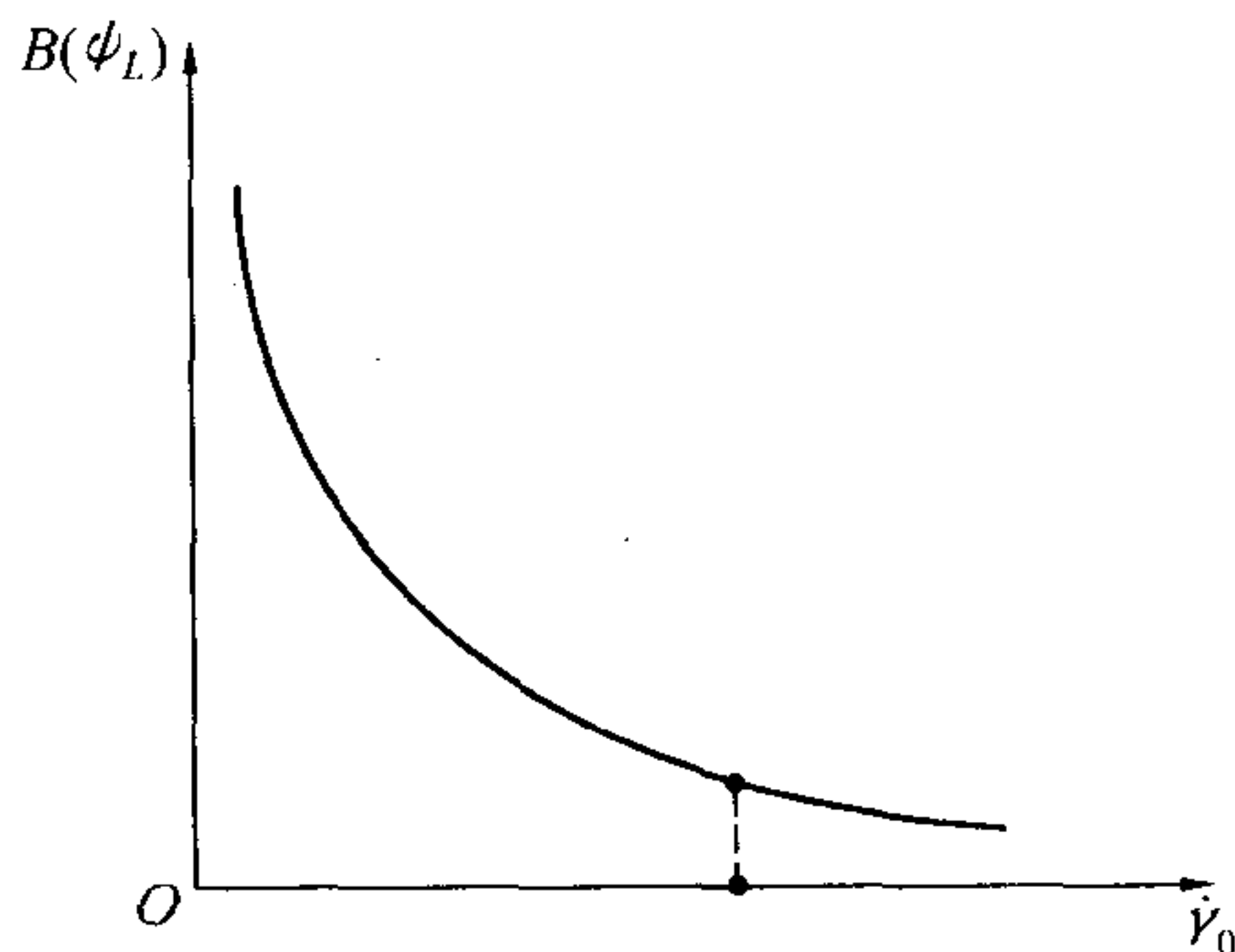


图 9.6  $B(\psi_L) - \dot{\gamma}_0$  曲线





的地位。

## 9.5 低速旋转范围内推力线偏心引起偏角的另一散布公式

上节的反比公式适用于  $n_\lambda \gg 1$  的情况,随着  $n_\lambda$  的减小,则准确性就会变差。尤其对某类小转速的火箭弹,其  $n_\lambda$  甚至不到 2,反比公式的误差就会更大。本节将推导一种适用于低速旋转范围的线推力偏心引起的散布公式。

在低速旋转范围,可取

$$\Psi_{\dot{\phi}_0}^* = \psi_{\dot{\phi}_0}^* = C_3 \sqrt{\frac{\pi}{k a}} R_{\dot{\phi}_0}$$

则式(9.44)为下式(去掉积分号前的负号,以与式(7.92)一致)

$$\begin{aligned} \Psi_L &= \frac{a_P L}{k R_A^2} C_3 \int_{u_0}^u \sqrt{\frac{\pi}{k a}} \exp[i n_\lambda (u_n - u_0)] R_{\dot{\phi}_0}(u_n, u) \frac{du_n}{v_n} = \\ &= \frac{C_3 L}{k R_A^2} \left( \frac{a_P}{a} \right) \int_{u_0}^u \exp[i n_\lambda (u_n - u_0)] \sqrt{\frac{\pi}{2 u_n}} R_{\dot{\phi}_0}(u_n, u) du_n \end{aligned} \quad (9.60)$$

根据函数  $R_{\dot{\phi}_0}(u_n, u)$  的特性,它是随  $u_n$  单调递减的函数(见图 7.15),再乘上  $\sqrt{\pi/(2u_n)}$ ,更是  $u_n$  的减函数,可用一衰减的指数型函数作为  $\sqrt{\pi/(2u_n)} R_{\dot{\phi}_0}(u_n, u)$  的逼近函数,即取

$$\sqrt{\frac{\pi}{2 u_n}} R_{\dot{\phi}_0}(u_n, u) \approx C e^{-\alpha(u_n - u_0)} \quad (9.61)$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \int_{u_0}^u \exp[i n_\lambda (u_n - u_0)] \sqrt{\frac{\pi}{2 u_n}} R_{\dot{\phi}_0}(u_n, u) du_n &\approx C \int_{u_0}^u \exp[(i n_\lambda - \alpha)(u_n - u_0)] du_n = \\ &= C \frac{\exp[(i n_\lambda - \alpha)(u_n - u_0)]}{i n_\lambda - \alpha} \Big|_{u_0}^u \end{aligned}$$

由于偏角主要在刚出炮口后一段弹道内形成,在主动段末段弹道内变化甚微,故对  $K$  点处偏角,  $u_K$  可取足够大。这样,对上述积分结果可取为

$$\frac{C}{\alpha - i n_\lambda}$$

那么  $K$  点偏角为

$$\Psi_L = \frac{C_3 L}{k R_A^2} \left( \frac{a_P}{a} \right) \frac{C}{\alpha - i n_\lambda} \quad (9.62)$$

取其绝对值为

$$|\Psi_L| = \frac{C_3 |L|}{k R_A^2} \left( \frac{a_P}{a} \right) \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 + n_\lambda^2}} \quad (9.63)$$



到此,还不知道参数  $C$  和  $\alpha$  的具体值。为此,特考虑以下两点:

(1) 为使逼近函数与真实函数在临界段内相差小,应使之在炮口之值相等,由式(9.61),当取  $u_n = u_0$  时

$$C = \sqrt{\frac{\pi}{2u_0}} R_{\dot{\varphi}_0}(u_0, u_K) \quad (9.64)$$

(2) 当火箭不旋转时,即  $n_\lambda = 0$  的特殊情况下,式(9.63)与式(7.96)相等,即得

$$\frac{C}{\alpha} = R_L(u_0, u_K)$$

于是

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2u_0}} \frac{R_{\dot{\varphi}_0}}{R_L} \quad (9.65)$$

将  $\alpha$  和  $C$  值代入式(9.63),并整理之,可得角散布公式为(取  $\bar{a} \approx a_P$ )

$$B(\phi_{LK}) = B_L \frac{C_3}{kR_A^2} k_\gamma R_L(u_0, u_K) \quad (9.66)$$

$$\text{式中} \quad k_\gamma = \left[ 1 + \left( \sqrt{\frac{2u_0}{\pi}} n_\lambda \frac{R_L}{R_{\dot{\varphi}_0}} \right)^2 \right]^{-1/2} = \left[ 1 + \left( 2n_\lambda u_0 \frac{R_L}{B_I} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (9.67)$$

比较一下(9.66)和(7.98)两式,可清楚地看出,它们的不同点就是旋转情况下多了一个系数  $k_\gamma$  (不妨叫旋转影响系数)。它表明了由旋转而使  $B(\phi_L)$  减小的程度。转速对  $B(\phi_L)$  的影响,只要作出  $k_\gamma - n_\lambda$  曲线就一目了然,见图9.7。据此曲线,便不难选取适当的  $n_\lambda$  值。其他因素对  $B(\phi_L)$  的影响,仍如上节所述。

**例题 9.3** 试用式(9.66)对例题 9.2 进行计算。

**解** 由式(9.67)知

$$k_\gamma = \left[ 1 + \left( 2n_\lambda u_0 \frac{R_L}{B_I} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

从例题 7.1,  $B_I = 0.2709$ , 从例题 7.2,  $R_L = 0.2731$ 。

$$k_\gamma = \left[ 1 + \left( 2 \times 9.89 \times 0.419 \times \frac{0.2731}{0.2709} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{8.41}$$

这表明由于旋转使推力偏心引起的散布为不旋转情况的  $1/8.41$ , 从例题 7.2 知,不旋转弹的  $B_L$  引起的散布为  $1/33$ , 故旋转情况下的散布为  $1/278$ 。

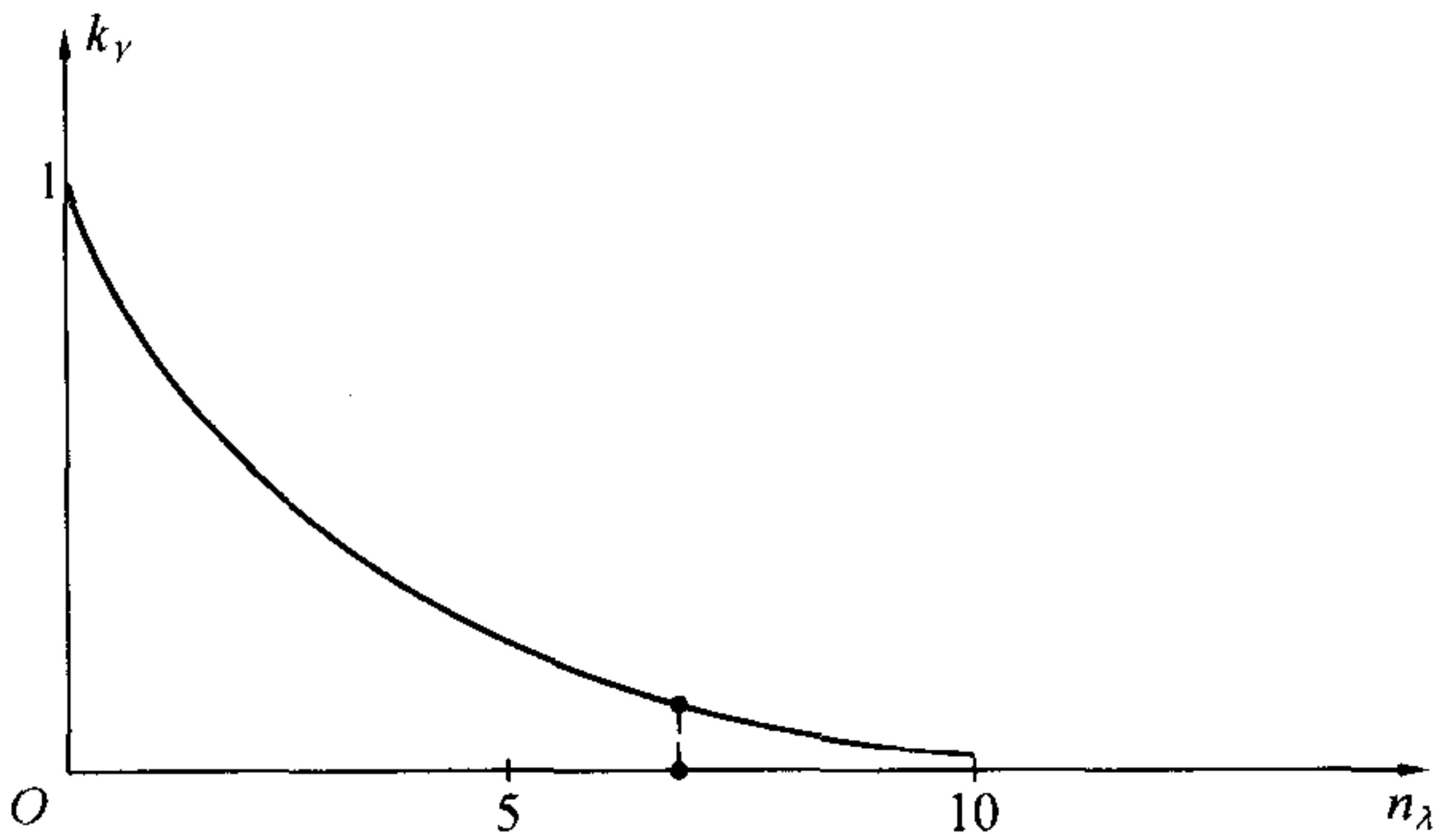


图 9.7  $k_\gamma - n_\lambda$  曲线





## 9.6 风的影响

### 9.6.1 垂直风引起的攻角 $\Delta_w$ 和偏角 $\Psi_w$ 公式推导

要推导出  $\Delta_w$  和  $\Psi_w$  公式,可从微分方程(9.14)解出与非齐次项  $-w_{\perp}$  相应的特解,以得到  $\Delta_w$ ,然后代入式(9.11)积分得  $\Psi_w$ 。这一过程将与求解式(7.110)到式(7.120)的过程相似。为使读者掌握更多的方法,这里采用格林函数法(在下一章还将介绍相对运动法)。

第七章7.7指出了格林函数构成的一般方法。由方程组(9.2)有关  $w_{\perp}$  的非齐次项(各方程最高导数的系数项为1)  $(b_x + b_y)w_{\perp}$  和  $-k_z^2 v w_{\perp}$ ,以及起始偏角  $\Psi_0$  和起始摆动角速度  $\dot{\Phi}_0$  的特征函数,可知

$$\Delta_w = \int_{t_0}^t k^2 v_n w_{\perp} \Delta_{\dot{\Phi}_0}^*(u_n, u) dt_n + \int_{t_0}^t (b_x + b_y) w_{\perp} \Delta_{\Psi_0}^*(u_n, u) dt_n \quad (9.68)$$

$$\Psi_w = - \int_{t_0}^t k^2 v_n w_{\perp} \Psi_{\dot{\Phi}_0}^*(u_n, u) dt_n + \int_{t_0}^t (b_x + b_y) w_{\perp} \Psi_{\Psi_0}^*(u_n, u) dt_n \quad (9.69)$$

计算表明,式(9.68)第二项比第一项要小得多,近似计算时可略去,将式(9.24)代入得

$$\begin{aligned} \Delta_w &= \frac{i}{2\sqrt{S_g + 1}} \frac{w_{\perp}}{v} \int_{u_0}^u \exp[-b(u - u_n)] \{ \exp[ih_1(u - u_n)] - \exp[-ih_2(u - u_n)] \} du_n = \\ &= \frac{i}{2\sqrt{S_g + 1}} \frac{w_{\perp}}{v} \left\{ \frac{-1}{ih_1 - b} \exp[(ih_1 - b)(u - u_n)] + \right. \\ &\quad \left. \frac{-1}{ih_2 + b} \exp[-(ih_2 + b)(u - u_n)] \right\} \Big|_{u_0}^u \end{aligned}$$

由于  $b \ll h_1, b \ll h_2$ , 则

$$\begin{aligned} \Delta_w &= \frac{i}{2\sqrt{S_g + 1}} \frac{w_{\perp}}{v} \left\{ \frac{1}{h_1} \exp[(ih_1 - b)(u - u_0) - 1] + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{h_2} [\exp[-(ih_2 + b)(u - u_0)] - 1] \right\} \end{aligned}$$

分子分母同乘以  $h_1 h_2$ , 并注意  $h_1 h_2 = 1$ , 则得

$$\begin{aligned} \Delta_w &= \frac{w_{\perp}}{v_0} \frac{i}{2\sqrt{S_g + 1}} \frac{v_0}{v} \exp[-b(u - u_0)] \{ h_2 \exp[ih_1(u - u_0)] + \\ &\quad h_1 \exp[-ih_2(u - u_0)] \} - \frac{w_{\perp}}{v} \end{aligned}$$

再将式(9.25)代入,得

$$\Delta_w = \frac{w_{\perp}}{v_0} \Delta_{\dot{\Phi}_0}^* - \frac{w_{\perp}}{v} \quad (9.70)$$



其特征函数为

$$\Delta_w^* = \frac{1}{v_0} \Delta_{\Phi_0}^* - \frac{1}{v} \quad (9.71)$$

比较上式与式(7.116),可知它们在形式上完全一致,只不过现在是复数而已。

下面求偏角  $\Psi_w$ 。直接积分式(9.69)比较麻烦,仍采取一贯的方法,将攻角代入式(9.11)积分得偏角。于是将式(9.71)代入,得特征函数

$$\Psi_w^* = \frac{1}{v_0} \int_{u_0}^u \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \Delta_{\Phi_0}^* du - \int_{u_0}^u \frac{a_P}{kv^3} du + \int_{u_0}^u \frac{b_x}{k} \frac{du}{v}$$

此式亦和式(7.117)形式一样,第一项积分为  $(1/v_0) \Psi_{\Phi_0}^*$ ,第二、三项为

$$- \int_{u_0}^u \frac{a_P - b_x v^2}{kv^3} du \approx - \int_{u_0}^u \frac{du}{kv^3} \frac{dv}{dt} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = - \left( \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right)$$

$$\text{故得} \quad \Psi_w^* = \frac{1}{v_0} \Psi_{\Phi_0}^* - \left( \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right) \quad (9.72)$$

此式在形式上与式(7.119)完全一致。亦可写为下式

$$\Psi_w^* = - \frac{1}{v_0} \Psi_{\Psi_0}^* + \frac{1}{v} \quad (9.73)$$

### 9.6.2 $\Delta_w^*$ 和 $\Psi_w^*$ 的特点

图 9.8 的攻角曲线,是根据式(9.71)绘出的。式(9.71)说明攻角仍是两部分组成,一是相对攻角,一是相对速度与飞行速度间的夹角,即平均攻角。可见弹轴仍是绕相对速度摆动,并且弹轴的平均位置是相对速度方向。由于相对速度矢量总是偏向逆风向一边,故推力法向分量的指向与风向相反,因而速度朝逆风向偏转,图 9.9 绘出了偏角曲线,亦清楚地表明了这点。与不旋转情况不同的地方在于陀螺效应的影响,使攻角和偏角都产生了垂直干扰平面的分量,并且随  $S_g$  增加而增加。

将式(9.72)写成实部和虚部两部分,即

$$\Psi_w^* = \psi_{1w}^* + i\psi_{2w}^* \quad (9.74)$$

垂直风  $w_{\perp}$  由(8.106)式为

$$w_{\perp} = -w_x \sin\theta + iw_z \quad (9.75)$$

则

$$\Psi_w = (-w_x \sin\theta + iw_z)(\psi_{1w}^* + i\psi_{2w}^*)$$

其二分量分别为

$$\psi_{1w}^* = -w_x \sin\theta \cdot \psi_{1w}^* - w_z \psi_{2w}^* \quad (9.76)$$

$$\psi_{2w}^* = w_z \psi_{1w}^* - w_x \sin\theta \psi_{2w}^* \quad (9.77)$$





式中,  $\theta$  可近似取为  $\theta_0$ 。

可见纵风不仅引起切线倾角角偏差, 也产生侧向偏角; 横风不仅产生侧向偏角, 也产生切线倾角角偏差。但对野战尾翼式火箭弹来说, 多数稳定因子  $S_g$  都很小,  $\phi_{2w}^*$  远小于  $\phi_{1w}^*$ , 故角偏差主要在垂直风所在平面内, 即纵风主要引起切线倾角偏差, 横风主要产生侧偏。

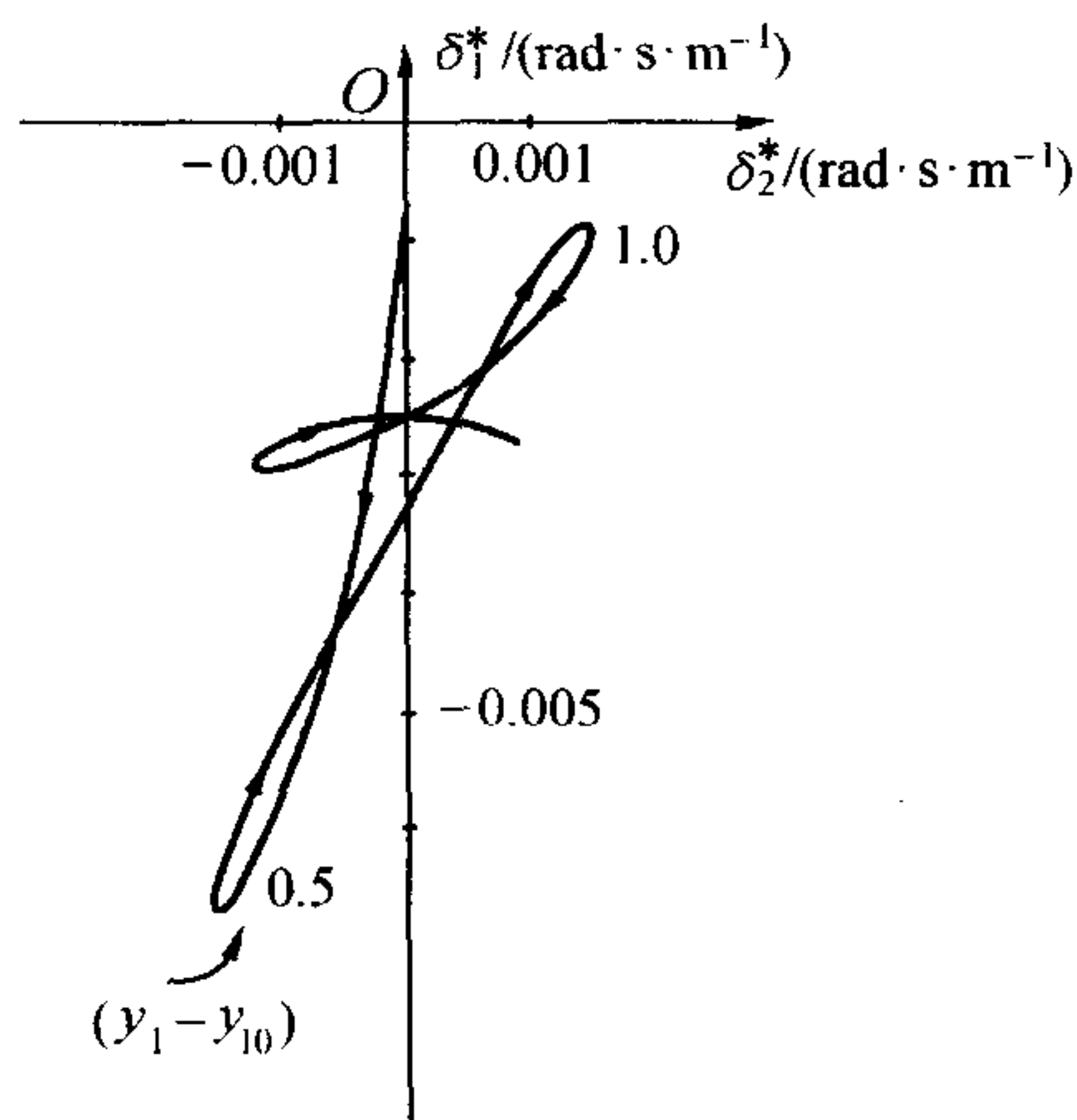


图 9.8  $\Delta_w^*$  图

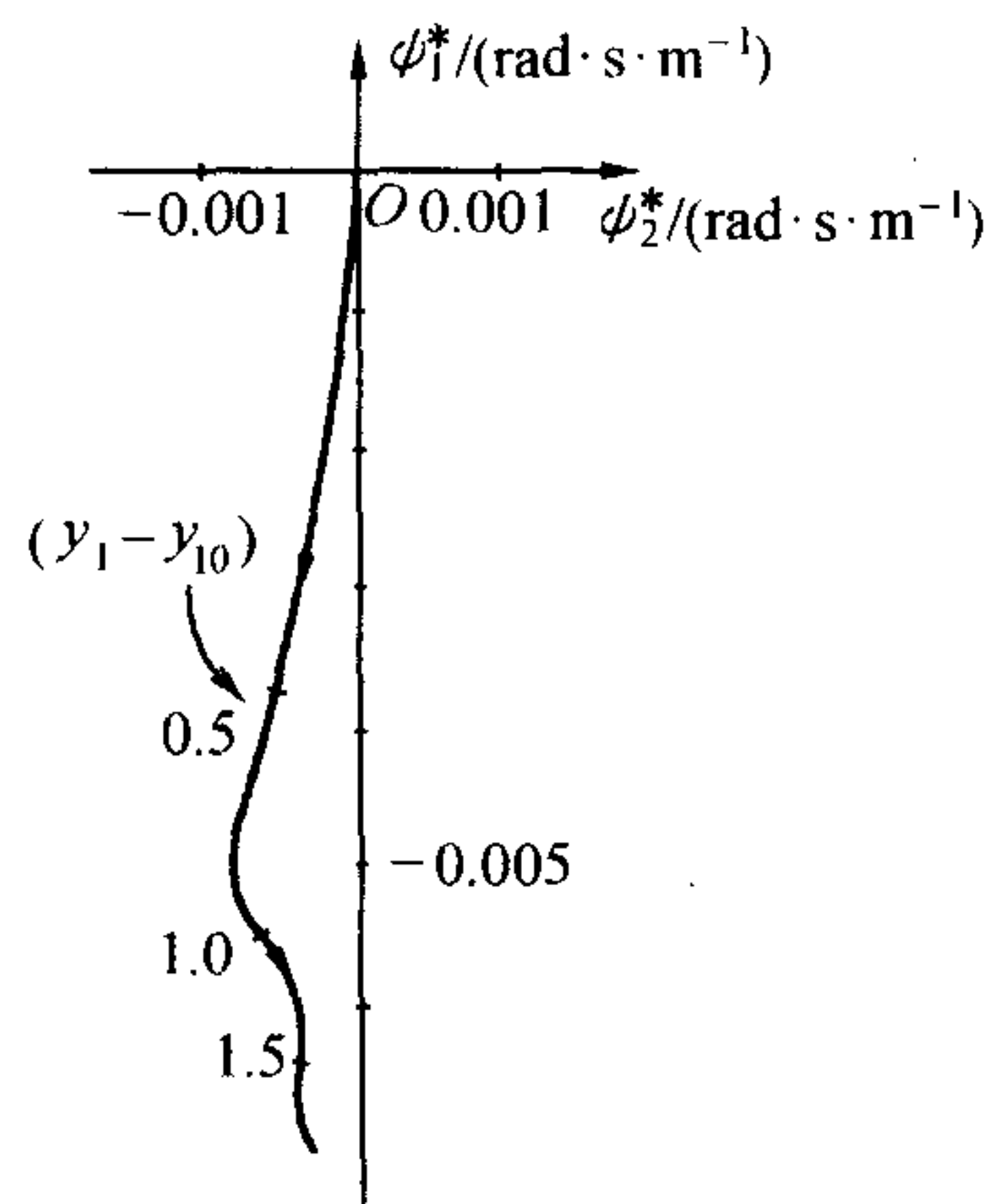


图 9.9  $\Psi_w^*$  图

### 9.6.3 风引起的角散布

假定纵风  $w_x$  或横风  $w_z$  都服从正态分布律, 并且中间误差都是  $B_w$ , 则据(9.76)和(9.77)两式, 得角散布公式

$$B(\phi_{1w}) = B_w \sqrt{(\phi_{1w}^* \sin \theta_0)^2 + (\phi_{2w}^*)^2} \quad (9.78)$$

$$B(\phi_{2w}) = B_w \sqrt{(\phi_{1w}^*)^2 + (\phi_{2w}^* \sin \theta_0)^2} \quad (9.79)$$

对低速旋转情况, 当  $S_g \ll 1$  时, 则取  $\phi_{2w}^* = 0$ ,  $\phi_{1w}^*$  由式(7.120)确定。

**例题 9.4** 计算例题 7.1 所述火箭在  $\dot{\gamma}_0 = 55 \text{ rad/s}$  的转速条件下, 由风引起的方向散布。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \Psi_{wK}^* &= -\frac{1}{v_0} \Psi_{\Psi_0 K}^* + \frac{1}{v_K} = -\frac{1}{66.33} (0.631 + 0.0414i) + \frac{1}{350} = \\ &= -0.00666 - 0.00062i \end{aligned}$$

代入式(9.79)

$$\begin{aligned} B(\phi_{2wK}) &= B_w \sqrt{(\phi_{1wK}^*)^2 + (\phi_{2wK}^* \sin \theta_0)^2} = \\ &= 1.0 \sqrt{(6.66)^2 + (0.62 \times \sin 45^\circ)^2} \times 10^{-3} = 6.67 \times 10^{-3} \end{aligned}$$



$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\psi_{2wK})}{\cos \theta_K} = \frac{6.67 \times 10^{-3}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{106}$$

此结果与例题 7.3 基本上一致。

## 9.7 动不平衡的影响

由动不平衡所引起的主动段内攻角和偏角公式,其推导步骤仍是先解微分方程(9.14)的非齐次解,以求得攻角,然后代入式(9.11)求偏角。原则说来,纯粹是一般的数学推演过程。此处不作详细推导,只介绍有关的结论。

动不平衡是由质量分布不均匀而引起的,其指标是以纵向动力平衡轴与几何轴的夹角  $\beta_D$  来表征的。在弹体坐标系  $o - x_1 y_1 z_1$  内,其复数表达式由式(8.158)构成。它所产生的惯性力矩等效力在弹轴坐标系  $o - \xi \eta \zeta$  内为  $\beta_D(A - C)(\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})e^{i\gamma}$ ,此值可参见式(9.1)。为了加深对其物理本质的认识,下面作一概略的推导。如图 9.10(a) 所示,在弹体坐标系内,任意点  $(x_1, y_1, z_1)$  处的微分质量  $dm$  绕弹轴  $x_1$  以角速度  $\dot{\gamma}$  旋转时,所产生的离心惯性力在  $y_1$  轴上的投影是  $y_1 \dot{\gamma} dm$ ,它对  $z_1$  轴的力矩为

$$dM_{z_1} = x_1 y_1 \dot{\gamma}^2 dm$$

将所有微质量产生的离心惯性力矩积分得

$$M_{z_1} = \iiint_m x_1 y_1 \dot{\gamma}^2 dm = \dot{\gamma}^2 J_{x_1 y_1}$$

同样可得对  $y_1$  轴的离心惯性力矩为

$$M_{y_1} = -\dot{\gamma}^2 J_{x_1 z_1}$$

在弹体坐标系内离心惯性力矩的等效力为

$$f_1 = f_{y_1} + i f_{z_1} = M_{z_1} - i M_{y_1} = \dot{\gamma}^2 (J_{x_1 y_1} + i J_{x_1 z_1})$$

类似的方法可得由旋转加速度  $\ddot{\gamma}$  引起的切向惯性力矩的等效力为  $-i\ddot{\gamma} (J_{x_1 y_1} + i J_{x_1 z_1})$ 。因而在弹轴坐标系内总的等效力为

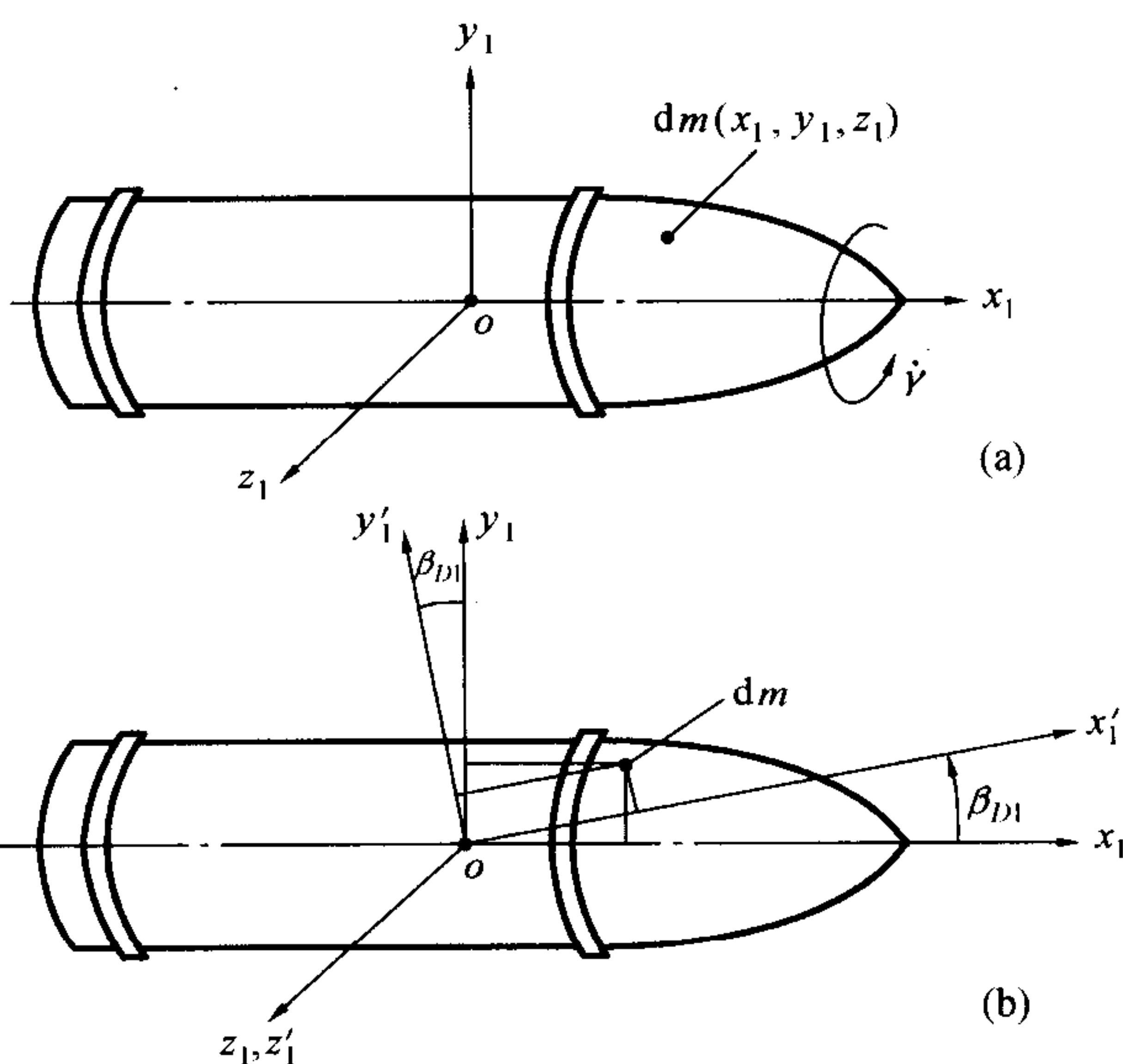


图 9.10 动不平衡性





$$f_{\beta_D} = (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})(J_{x_1 y_1} + i J_{x_1 z_1})e^{i\gamma}$$

下面具体考察仅存在动不平衡性的条件下,惯性积  $J_{x_1 y_1}$  和  $J_{x_1 z_1}$  的表达式。设质心仍在几何轴线上,并且为使推导不致过于复杂,首先研究  $\beta_{D1} \neq 0$  而  $\beta_{D2} = 0$  的情况。此即图 9.10(b) 所示,中心惯性主纵轴  $x'_1$  在  $x_1 o y_1$  平面内。易见,惯性主轴坐标系  $o - x'_1 y'_1 z'_1$  与弹体坐标系  $o - x_1 y_1 z_1$  坐标之间存在如下关系

$$x_1 = x'_1 \cos \beta_{D1} - y'_1 \sin \beta_{D1} \approx x'_1 - y'_1 \beta_{D1}$$

$$y_1 = y'_1 \cos \beta_{D1} + x'_1 \sin \beta_{D1} \approx y'_1 + x'_1 \beta_{D1}$$

由此可得

$$\begin{aligned} J_{x_1 y_1} &= \iiint_m x_1 y_1 dm = \iiint_m (x'_1 - y'_1 \beta_{D1})(y'_1 + x'_1 \beta_{D1}) dm = \\ &= \iiint_m (x'_1 y'_1 + x'^2_1 \beta_{D1} - y'^2_1 \beta_{D1} - x'_1 y'_1 \beta^2_{D1}) dm = \\ &= \beta_{D1} \iiint_m (x'^2_1 - y'^2_1) dm = \beta_{D1} \left[ \iiint_m (x'^2_1 + z'^2_1) dm - \iiint_m (y'^2_1 + z'^2_1) dm \right] = \\ &= \beta_{D1} (J'_{y_1 y_1} - J'_{x_1 x_1}) = \beta_{D1} (A - C) \end{aligned}$$

同样方法可求得  $\beta_{D1} = 0$  而  $\beta_{D2} \neq 0$  时的惯性积为

$$J_{x_1 z_1} = \beta_{D2} (A - C)$$

则

$$f_{\beta_D} = (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})(J_{x_1 y_1} + i J_{x_1 z_1})e^{i\gamma} = \beta_{D2} (A - C)(\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})e^{i\gamma}$$

对火箭绕心运动的影响而言,同推力偏心矩的作用有些相似。推力偏心矩相当于一等效起始扰动的作用,因而动不平衡的惯性力矩同样也将相应于某等效起始扰动作用。比较一下式(9.1)前两项,可知  $-La_P/R_A^2$  与  $\beta_D(1 - R_C^2/R_A^2)(\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})$  相当,其中  $R_C$  表示绕几何轴的转动惯性半径。将式(9.54)中的  $-La_P/R_A^2$  用  $\beta_D(1 - R_C^2/R_A^2)(\dot{\gamma}_0^2 - i\ddot{\gamma}_0)$  置换时,便得动不平衡的等效起始扰动为

$$\dot{\Phi}_{\beta_D} = \frac{i}{\dot{\gamma}_0} \left( 1 - \frac{R_C^2}{R_A^2} \right) (\dot{\gamma}_0^2 - i\ddot{\gamma}_0) \beta_D \quad (9.80)$$

式(9.80)中  $(\dot{\gamma}_0^2 - i\ddot{\gamma}_0)$  之所以取炮口值,是由于根据对  $\dot{\Phi}_L$  的分析,等效起始扰动是旋转力矩在炮口附近一段弹道形成的摆动角速度,故力矩取炮口值。由于一般尾翼式火箭很细长,  $(R_C/R_A)^2 \ll 1$ ,又多数火箭  $\ddot{\gamma}_0 \ll \dot{\gamma}_0^2$ ,故  $\dot{\Phi}_{\beta_D}$  可取更简单式

$$\dot{\Phi}_{\beta_D} \approx i\dot{\gamma}_0 \beta_D \quad (9.81)$$

则  $\beta_D$  引起的攻角和偏角为

$$\Delta_{\beta_D} = \dot{\Phi}_{\beta_D} \Delta \dot{\Phi}_0^* \quad (9.82)$$



$$\Psi_{\beta_D} = \dot{\Phi}_{\beta_D} \Psi_{\dot{\Phi}_0}^* \quad (9.83)$$

相应特征函数为

$$\Delta_{\beta_D}^* \approx i\dot{\gamma}_0 \Delta_{\dot{\Phi}_0}^* \quad (9.84)$$

$$\Psi_{\beta_D}^* \approx i\dot{\gamma}_0 \Psi_{\dot{\Phi}_0}^* \quad (9.85)$$

在图 9.11 和图 9.12 中绘出了  $\Delta_{\beta_D}^*$  和  $\Psi_{\beta_D}^*$  的准确曲线。很明显,这相当于  $\Delta_{\dot{\Phi}_0}^*$  和  $\Psi_{\dot{\Phi}_0}^*$  曲线顺时针方向旋转  $90^\circ$ ,然后增减一定倍数得到的。这充分表明尾翼式旋转火箭弹的自由运动起主导作用。动不平衡角  $\beta_D$  的二分量  $\beta_{D1}$  和  $\beta_{D2}$  近似为正态随机变量,并且中间误差为  $B_{\beta_D}$ ,则角散布为

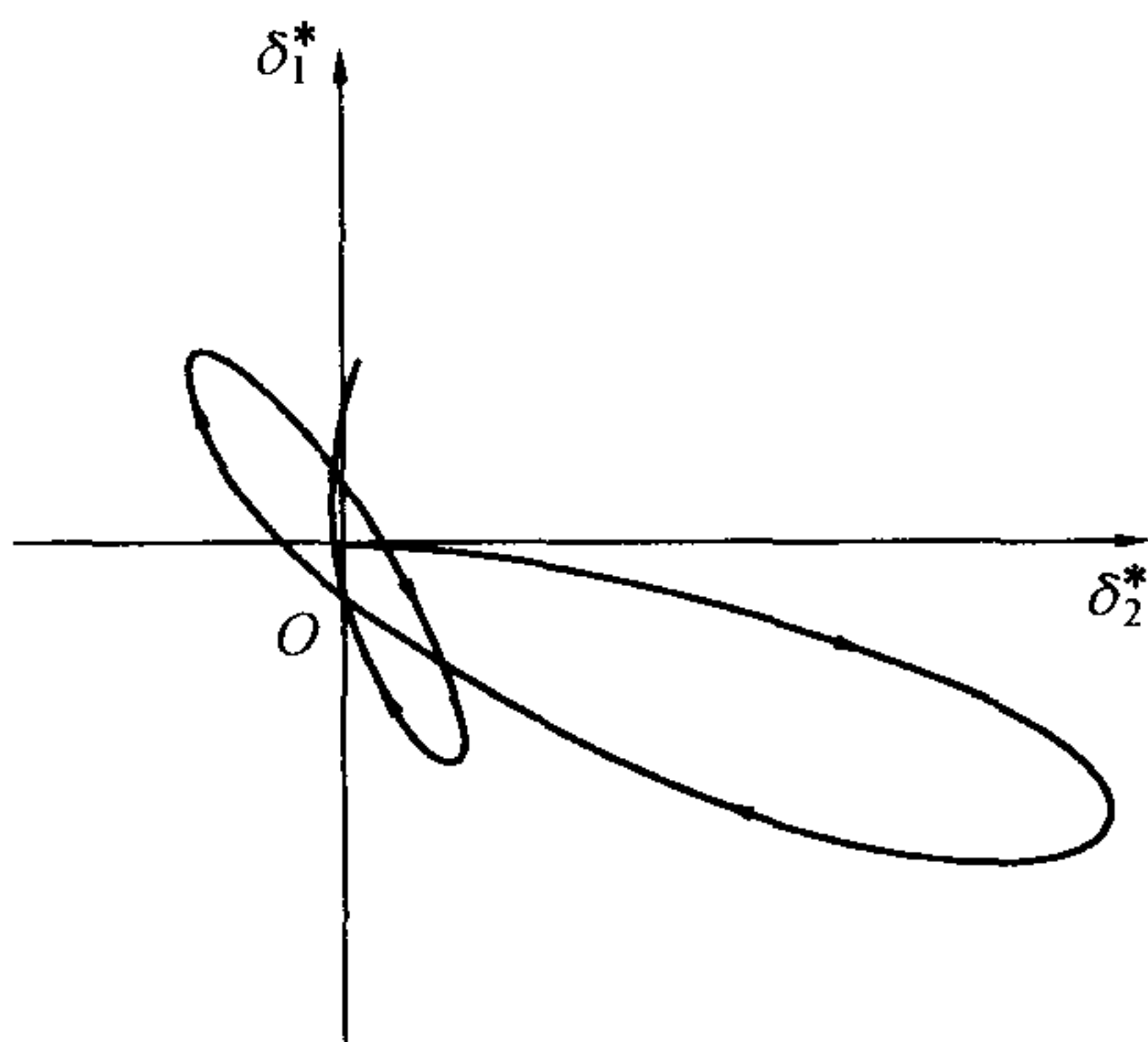


图 9.11  $\Delta_{\beta_D}^*$

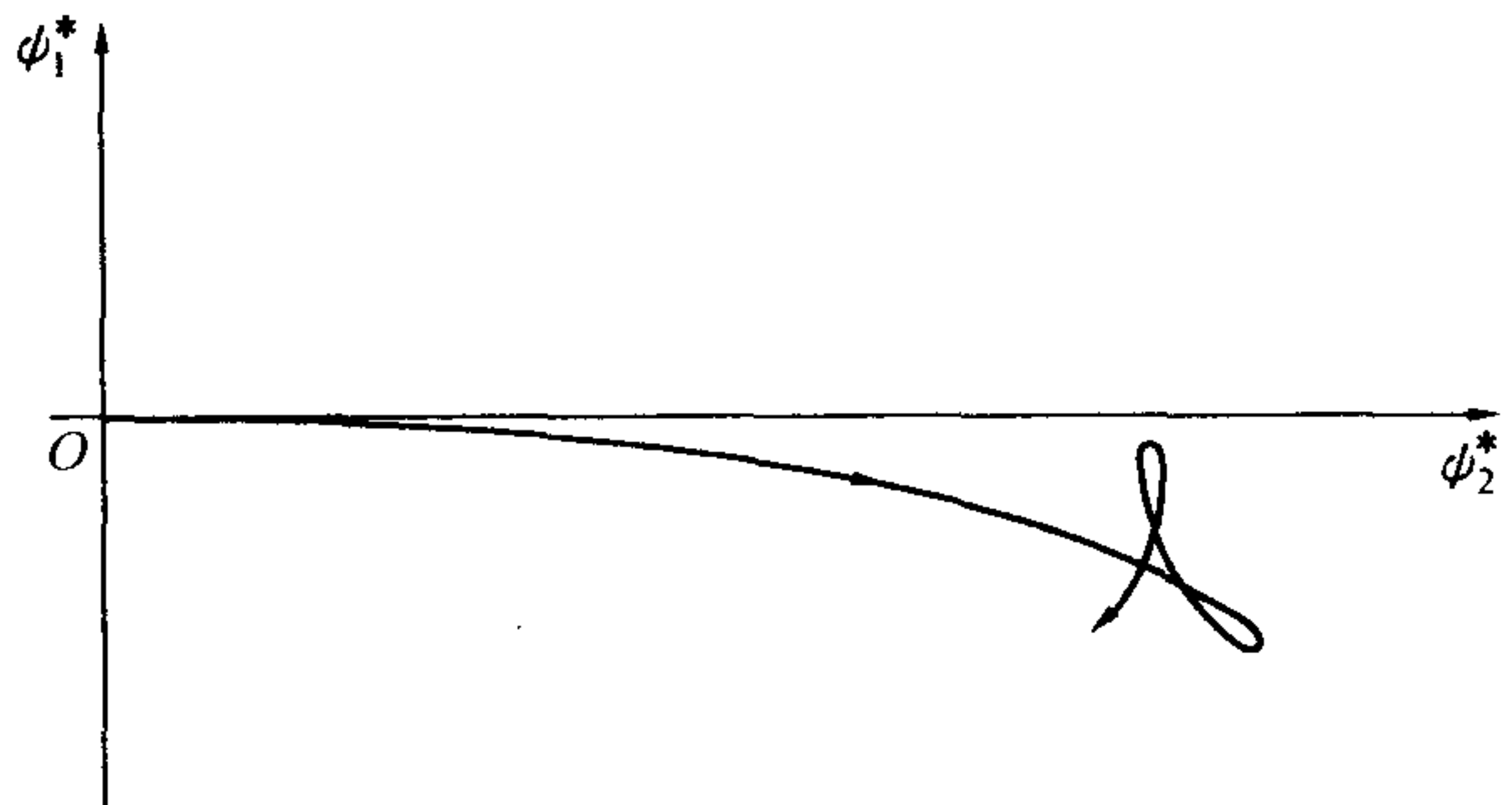


图 9.12  $\Psi_{\beta_D}^*$  曲线

$$B(\phi_{\beta_D}) = B_{\beta_D} |\Psi_{\beta_D}^*| \approx B_{\beta_D} \dot{\gamma}_0 |\Psi_{\dot{\Phi}_0}^*| \quad (9.86)$$

影响  $B(\phi_{\beta_D})$  的因素,除了与  $\dot{\gamma}_0$  成正比外,其余与  $|\Psi_{\dot{\Phi}_0}^*|$  完全相同,下面作具体介绍。

为使问题清楚起见,将  $|\Psi_{\dot{\Phi}_0}^*|$  用式(7.67)代替并考虑到式(9.47)得

$$B(\phi_{\beta_D}) \approx B_{\beta_D} C_3 n_\lambda B_I(u_0, u) =$$

$$B_{\beta_D} C_3 \Gamma \sqrt{\frac{2\pi s_0}{k}} R_{\dot{\varphi}_0}(u_0, u) \quad (9.87)$$

式中第二个等号利用了式(7.68)。

(1)  $s_0$   $s_0$  依赖于实际滑轨长度,它仅影响函数  $B_I(u_0, u)$ ,其大致变化规律如图 9.13 所示。 $s_0$

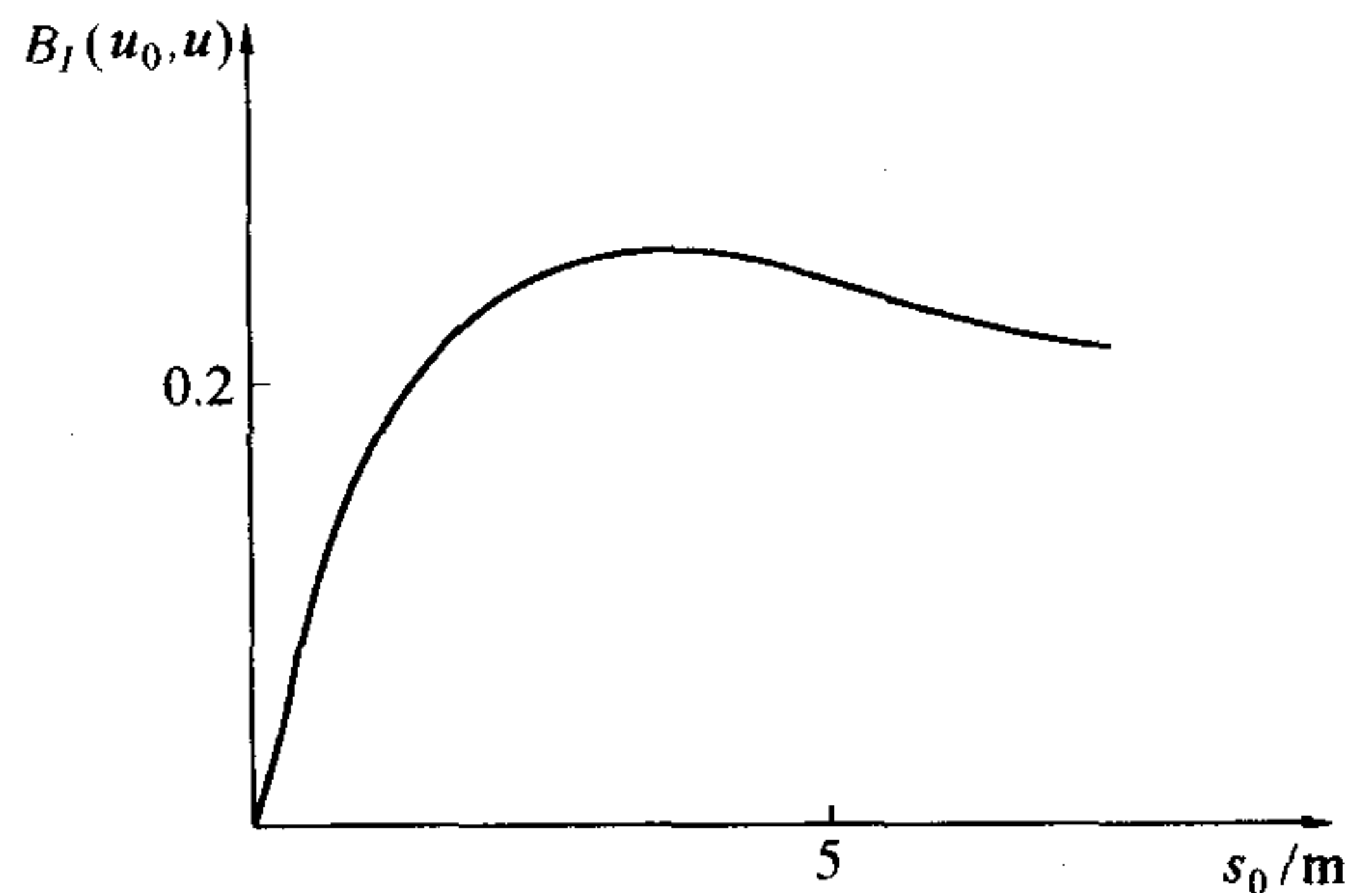


图 9.13  $B_I(u_0, u) - s_0$  曲线





增加,使等效起始扰动  $\dot{\Phi}_{\beta_D}$  增大,但也使稳定力矩和动量增加。这两方面综合的结果,便使  $B_I(u_0, u) - s_0$  曲线出现极大值。故合适的  $s_0$  或是甚大,或是甚小。

(2)  $k$   $k$  不影响  $\dot{\Phi}_{\beta_D}$ 。增加  $k$  使稳定力矩加大,从而减小攻角和偏角,致使散布减小。

(3)  $\Gamma$  (或  $n_\lambda$ ) 它加大时使  $\dot{\Phi}_{\beta_D}$  变大,使散布增加。

(4)  $a_p$  它对  $\beta_D$  引起的散布没有什么影响。

(5)  $l$  由于  $k \propto l$ , 故  $l$  增加会增加散布。

**例题 9.5** 计算例题 9.1 之火箭由动不平衡引起的方向散布。已知  $B_{\beta_D} = 0.30 \times 10^{-3}$  rad。

**解** 由式(9.86)

$$B(\psi_{\beta_D K}) = B_{\beta_D} \dot{\gamma}_0 |\Psi_{\dot{\Phi}_0 K}^*| = 0.30 \times 10^{-3} \times 55 \times 49.6 \times 10^{-3} = 0.813 \times 10^{-3}$$

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{0.818 \times 10^{-3}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{864}$$

## 9.8 散布计算与分析小结

若各扰动因素是相互独立的随机量。则总的偏角散布为各扰动因素偏角散布的平方和的平方根,即

$$B(\psi_\Sigma) = \sqrt{\sum B^2(\psi_i)} \quad (9.88)$$

式中,  $B(\psi_i)$  包括  $B(\psi_{\dot{\Phi}_0})$ 、 $B(\psi_L)$ 、 $B(\psi_w)$ 、 $B(\psi_{\beta_D})$  等。

根据上面各节例题,可知各散布量为

$$B(\psi_{\dot{\Phi}_0 K}) = 4.96 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$B(\psi_{LK}) = 2.54 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$B(\psi_{wK}) = 6.67 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$B(\psi_{\beta_D K}) = 0.82 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

由此便知它们各自在各散布中所占的地位。

对影响散布的各因素分析,将直接在火箭总体设计中考虑。低速旋转尾翼弹是用得比较广泛的,其范围判定将在下一节论述。

对  $B(\psi_{\dot{\Phi}_0})$  和  $B(\psi_w)$  的影响因素在第七章已分析,尾翼式低速旋转火箭与不旋转火箭无多大区别。对  $B(\psi_L)$  和  $B(\psi_{\beta_D K})$  的影响因素在本章中已分析。兹归结如表 9.1。

从表中看出,对每一参量都存在最佳值,可由式(9.98)作出具体确定。



表 9.1

参量	变化	散布	$B(\phi_{\dot{\phi}_0})$	$B(\phi_L)$	$B(\phi_w)$	$B(\phi_{\beta_D})$
$\Gamma$		↑	↑	↓	产生侧分量对幅值影响小	↑
$l$		↑	-	-	↓	↑
$s_0$ (或定向器长)		↑	↑	↓	↓	大 $s_0$ ↑ 小 $s_0$ ↓
$k$ (或 $ m'_z $ )		↑	↓	↓	↑	↓
$a_P$		↑	-	-	↓	-

符号说明: ↑ 表示增加; ↓ 表示下降; - 表示无关; ↑ 表示略有增加; ↓ 表示略有下降。

## 9.9 野战尾翼式火箭弹低速旋转范围的判据

### 9.9.1 概 述

已经在考虑陀螺效应条件下,推导出了各扰动因素引起偏角的特征函数公式,现归结如下。

#### (1) 对起始摆动角速度

$$\Psi_{\dot{\phi}_0}^* = -\frac{iC_3}{2kv_0\sqrt{S_g+1}}[B(h_1u_0, h_1u) - \bar{B}(h_2u_0, h_2u)] \quad (9.89)$$

式中

$$B(hu_0, hu) = \sqrt{u_0} \int_{u_0}^u \frac{1}{2u\sqrt{u}} e^{ih(u-u_0)} du \quad (9.90)$$

$$\bar{B}(hu_0, hu) = \sqrt{u_0} \int_{u_0}^u \frac{1}{2u\sqrt{u}} e^{-ih(u-u_0)} du \quad (9.91)$$

$$\begin{cases} h_1 = \sqrt{S_g+1} + \sqrt{S_g} \\ h_2 = \sqrt{S_g+1} - \sqrt{S_g} \end{cases} \quad (9.92)$$

#### (2) 对推力偏心

$$\Psi_L^* = -\frac{ia_P}{R_A^2\dot{\gamma}_0} \Psi_{\dot{\phi}_0}^* \quad (9.93)$$

#### (3) 对垂直风

$$\Psi_w^* = \frac{1}{v_0} \Psi_{\dot{\phi}_0}^* - \left( \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right) \quad (9.94)$$





式中

$$\Psi_{\phi_0}^* = -i h_1 k v_0 \Psi_{\dot{\phi}_0}^* + C_3 B(h_1 u_0, h_1 u) \quad (9.94^*)$$

(4) 对动不平衡

$$\Psi_{\beta_D}^* \approx i \dot{\gamma}_0 \Psi_{\dot{\phi}_0}^* \quad (9.95)$$

陀螺效应对偏角影响的强弱,取决于陀螺稳定因子  $S_g$ 。这里提出一个问题,就是在什么样的条件下,可以近似取  $S_g = 0$ ,而能够使误差不超过允许值<sup>[42]</sup>。也就是说,当  $S_g$  值在什么范围内,可以近似取其数值为零。这将给总体设计、研制和靶场试验进行散布分析带来方便。若能确定  $S_g$  的上限,就等于确定了低速旋转范围。在此范围内,就可以用  $S_g = 0$  的公式计算。 $S_g = 0$  的特征函数公式将是比较简单的,归结如下(散布计算中都用其绝对值):

$$(1) \quad \phi_{\dot{\phi}_0}^* = C_3 \sqrt{\frac{\pi}{k a}} R_{\dot{\phi}_0}(u_0, u) \quad (9.96)$$

或 
$$\phi_{\dot{\phi}_0}^* = \frac{C_3}{k v_0} B_I(u_0, u) \quad (9.96^*)$$

$$(2) \quad |\Psi_L^*| = \frac{a_P}{R_A^2} \dot{\gamma}_0 \phi_{\dot{\phi}_0}^*, \text{ 此式须 } n_\lambda \gg 1 \quad (9.97)$$

或 
$$|\Psi_L^*| = \frac{C_3}{k R_A^2} k_\gamma R_L \quad (9.97^*)$$

$$(3) \quad \phi_w^* = -\frac{1}{v_0} \phi_{\dot{\phi}_0}^* + \frac{1}{v} \quad (9.98)$$

$$(4) \quad \Psi_{\beta_D}^* = \dot{\gamma}_0 \phi_{\dot{\phi}_0}^* \quad (9.99)$$

由(9.89) ~ (9.95) 诸式看出,推力偏心和动不平衡所相应的特征函数,都是由  $\Psi_{\dot{\phi}_0}^*$  乘上一个系数。因此只要弄清了  $S_g$  对  $\Psi_{\dot{\phi}_0}^*$  的影响规律,就等于一举两得了。至于  $\Psi_w^*$  与  $S_g$  的关系,看起来似乎复杂一些,将另行考虑。当然,  $S_g$  对特征函数的影响程度是对相应简单公式(9.96) ~ (9.99) 进行比较而言的。

### 9.9.2 特殊情况分析

为了得出明确的结论,同时也基于野战火箭弹的  $u_0$  很小,而  $u_K$  相对  $u_0$  来说是相当之大的。这样,不妨先考虑  $u_0$  接近于零而  $u_K$  充分大的情况。

由式(9.89),并考虑式(9.90)和式(9.91),得  $K$  点处偏角

$$\Psi_{\dot{\phi}_0}^* = -\frac{i C_3}{2k \sqrt{S_g + 1}} \frac{\sqrt{u_0}}{v_0} \int_{u_0}^u \frac{1}{2u \sqrt{u}} \{ \exp[i h_1(u - u_0)] - \exp[-i h_2(u - u_0)] \} du$$

而积分



$$I = \int_{u_0}^{u_K} \frac{1}{2u\sqrt{u}} \{ \exp[ih_1(u - u_0)] - \exp[-ih_2(u - u_0)] \} du =$$

$$- \frac{1}{\sqrt{u}} \{ \exp[ih_1(u - u_0)] - \exp[-ih_2(u - u_0)] \} \Big|_{u_0}^{u_K} +$$

$$i \int_{u_0}^{u_K} \frac{1}{\sqrt{u}} \{ h_1 \exp[ih_1(u - u_0)] + h_2 \exp[-ih_2(u - u_0)] \} du$$

当  $u_0 \rightarrow 0, u_K \rightarrow \infty$  时, 第一大项之值为零; 剩下仅有第二项, 并且考虑到  $\exp(-ih_1 u_0)$  和  $\exp(-ih_2 u_0)$  当  $u_0 \rightarrow 0$  时的值为 1, 则

$$\lim_{\substack{u_0 \rightarrow 0 \\ u_K \rightarrow \infty}} I = i \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} (h_1 e^{ih_1 u} + h_2 e^{-ih_2 u}) du =$$

$$i \sqrt{\frac{\pi}{2}} [(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) + i(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})]$$

于是

$$\lim_{\substack{u_0 \rightarrow 0 \\ u_K \rightarrow \infty}} \Psi_{\dot{\phi}_0}^* = C_3 \frac{1}{2k \sqrt{S_g + 1}} \frac{\sqrt{u_0}}{v_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) + i(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})] \quad (9.100)$$

将式(9.100)与  $S_g = 0$  (即不考虑陀螺效应) 的情况进行比较。由于  $S_g = 0$  时, 由式(9.100)或式(9.96\*)可得

$$\psi_{\dot{\phi}_0}^* = C_3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{u_0}}{kv_0} \quad (9.101)$$

那么在此特殊情况下, 得幅值之比值  $K_S$  为

$$K_S = \frac{|\Psi_{\dot{\phi}_0}^*|}{\psi_{\dot{\phi}_0}^*} = \frac{\sqrt{(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2 + (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})^2}}{2\sqrt{S_g + 1}}$$

将式(9.92)代入得

$$K_S = (S_g + 1)^{-1/4} \quad (9.102)$$

这说明, 因陀螺效应影响而使幅值  $|\Psi_{\dot{\phi}_0}^*|$  与不旋转情况相比, 它是随  $S_g$  增加而减小的, 不过减小的速度甚缓。不妨命  $K_S$  为幅值衰减系数, 其曲线示于图 9.14 中。

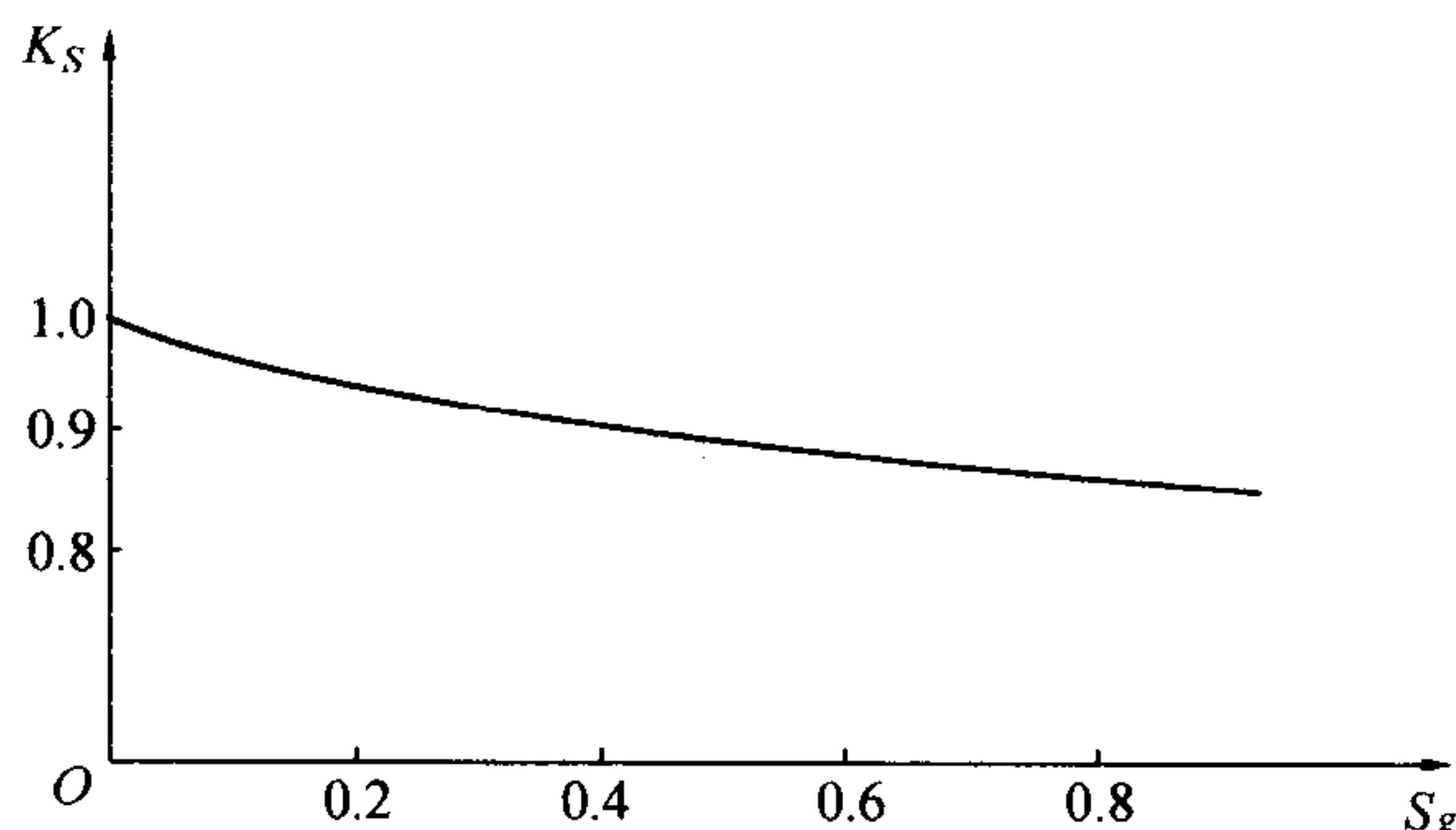
在计算散布时, 对起始扰动、推力偏心 and 动不平衡, 所用到的特征函数都是其幅值。但对风而言, 则需知其实际部和虚部。下面就特殊情况研究  $\Psi_w^*$  的表达式。由式(9.94)和式(9.94\*)知

$$\lim_{\substack{u_0 \rightarrow 0 \\ u_K \rightarrow \infty}} \Psi_w^* = \lim_{\substack{u_0 \rightarrow 0 \\ u_K \rightarrow \infty}} \left[ -ih_1 k \Psi_{\dot{\phi}_0}^* + \frac{C_3}{v_0} B(h_1 u_0, h_1 u_K) - \frac{1}{v_0} \right] \quad (9.103)$$

而

$$\lim_{\substack{u_0 \rightarrow 0 \\ u_K \rightarrow \infty}} \left[ \frac{C_3}{v_0} B(h_1 u_0, h_1 u_K) - \frac{1}{v_0} \right] =$$



图 9.14  $K_S - S_g$  曲线

$$\begin{aligned} & \frac{C_3 \sqrt{u_0}}{v_0} \lim_{u_0 \rightarrow 0} \left[ \int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{2u\sqrt{u}} e^{ih_1 u} du - \frac{1}{C_3 \sqrt{u_0}} \right] = \\ & \frac{C_3 \sqrt{u_0}}{v_0} \lim_{u_0 \rightarrow 0} \left[ - \frac{e^{ih_1 u}}{\sqrt{u}} \Big|_{u_0}^{\infty} + ih_1 \int_{u_0}^{\infty} \frac{e^{ih_1 u}}{\sqrt{u}} du - \frac{1}{C_3 \sqrt{u_0}} \right] = \\ & \frac{C_3 \sqrt{u_0}}{v_0} \left[ \lim_{u_0 \rightarrow 0} \left( \frac{\cosh h_1 u_0}{\sqrt{u_0}} - \frac{1}{C_3 \sqrt{u_0}} + i \frac{\sinh h_1 u_0}{\sqrt{u_0}} \right) + ih_1 \int_0^{\infty} \frac{e^{ih_1 u}}{\sqrt{u}} du \right] \end{aligned}$$

当近似取  $C_3 = 1$  时, 显然第一大项为零, 则得

$$\lim_{\substack{u_0 \rightarrow 0 \\ u_K \rightarrow \infty}} \left[ \frac{C_3}{v_0} B(h_1 u_0, h_1 u_K) - \frac{1}{v_0} \right] = i \frac{C_3 \sqrt{u_0}}{v_0} \frac{\sqrt{\pi h_1}}{2} (1 + i) \quad (9.104)$$

将(9.100)和(9.104)两式代入式(9.103)得

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{u_0 \rightarrow 0 \\ u_K \rightarrow \infty}} \Psi_w^* &= - \frac{C_3}{2\sqrt{S_g+1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{u_0}}{v_0} [ih_1(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) - h_1(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) + \\ & (1 - i)\sqrt{h_1}(h_1 + h_2)] = \\ & - \frac{C_3}{2\sqrt{S_g+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{u_0}}{v_0} [(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) + i(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})] \quad (9.105) \end{aligned}$$

试比较(9.105)和(9.100)两式, 可知  $\Psi_w^*$  与  $\Psi_{\phi_0}^*$  对  $S_g$  的函数关系是一样的, 也就是说, 它们的幅值衰减系数都是  $K_S$ 。又  $\Psi_w^*$  之虚部与实部的比值  $K_R^I$  为

$$K_R^I = \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} = \frac{h_1 - h_2}{(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2}$$

或

$$K_R^I = \frac{\sqrt{S_g}}{\sqrt{S_g+1} + 1} \quad (9.106)$$



$K_R^I - S_g$  曲线示于图 9.15 中。

依据上述定义的系数,得  $\Psi_w^*$  的实部与虚部有下列关系式

$$\begin{cases} \frac{\psi_{2w}^*}{\psi_{1w}^*} = K_R^I \\ \sqrt{\psi_{1w}^{*2} + \psi_{2w}^{*2}} = K_S |\psi_w^*| \end{cases} \quad (9.107)$$

若将  $\psi_{1w}^*$  写成下式

$$\psi_{1w}^* = K_R \psi_w^* \quad (9.108)$$

$K_R$  是  $\psi_{1w}^*$  与  $\psi_w^*$  的比值,可由式(9.107)

解出

$$K_R = \frac{K_S}{\sqrt{1 + (K_R^I)^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{S_g + 1} + 1}{2(S_g + 1)}} \quad (9.109)$$

其实,  $K_R$  的表达式也可从式(9.105) 得到。于是

$$\psi_{2w}^* = K_R^I \psi_{1w}^* = K_R^I K_R \psi_w^* \quad (9.110)$$

式(9.108) 和(6.110) 使  $\psi_{1w}^*$  和  $\psi_{2w}^*$  直接与不旋转火箭的  $\psi_w^*$  发生关系。

若取  $S_g = 0.15$ , 则  $K_S = 0.966$ ,  $K_R = 0.95$ ,  $K_R^I = 0.187$ ,  $K_R^I K_R = 0.178$ 。这样的  $S_g$  对  $B(\phi_{\phi_0})$ 、 $B(\phi_L)$ 、 $B(\phi_{\beta_D})$  来说,仍属低速旋转范围,因其误差还不到 4%。用  $\psi_w^*$  代替实部,误差也只有 5%,所带来的不到 20%  $\psi_w^*$  的虚部,固然是一个可观的数值,但从(9.78) 和(9.79) 两式来看,它似乎可以弥补简单公式的误差。比如常对  $\theta_0 = 45^\circ$  射击时,  $\sin \theta_0 = 1/\sqrt{2}$ , 则(9.78) 和(9.79) 两式为

$$B(\psi_{1w}) = B_w \sin 45^\circ \sqrt{\psi_{1w}^{*2} + 2\psi_{2w}^{*2}}$$

$$B(\psi_{2w}) = B_w \sqrt{\psi_{1w}^{*2} + \frac{1}{2}\psi_{2w}^{*2}}$$

则

$$\frac{\sqrt{\psi_{1w}^{*2} + 2\psi_{2w}^{*2}}}{|\psi_w^*|} = K_R \sqrt{1 + 2K_R^{I2}} = 0.95 \times \sqrt{1 + 2 \times 0.187^2} = 0.985$$

$$\frac{\sqrt{\psi_{1w}^{*2} + \frac{1}{2}\psi_{2w}^{*2}}}{|\psi_w^*|} = K_R \sqrt{1 + \frac{1}{2}K_R^{I2}} = 0.95 \times \sqrt{1 + \frac{1}{2} \times 0.187^2} = 0.960$$

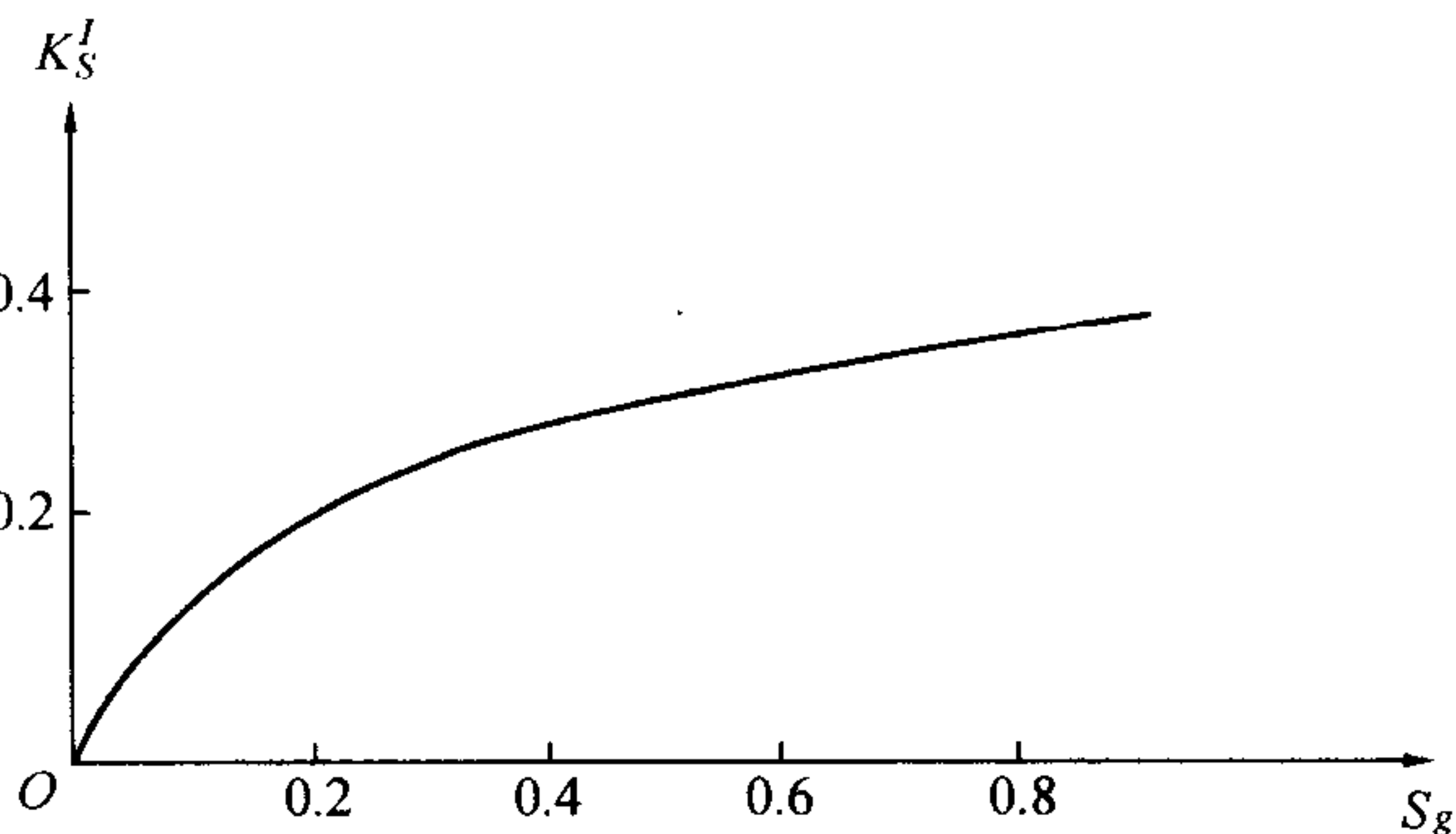


图 9.15  $K_R^I - S_g$  曲线





可见,用  $\psi_w^*$  代替根式,其误差在 5% 以内,这是允许的。

总之,就  $u_0 \rightarrow 0$  及  $u_K \rightarrow \infty$  的特殊情况而言,低速旋转范围可取判据  $S_g < 0.15$ ,带来的误差在 4% 以内。

### 9.9.3 一般情况

上述特殊情况的结果,对  $u_0 \neq 0$  及  $u_K$  为有限值的一般情况是否具有 consistency? 为此,用电子计算机进行了计算。兹选取一组典型值进行比较,所取  $u_0$  值分别为 0.05、0.20、0.80,即是按四倍的等比增加;而  $u_K$  取 27.5,其  $|\Psi_{\dot{\phi}_0}^*|$  与  $\psi_{\dot{\phi}_0}^*$  之比值仍以  $K_S$  表示,示于图 9.16。

由图 9.16 看出  $K_S - S_g$  曲线的变化规律与特殊情况下的是一致的。随着  $u_0$  的增加,  $K_S$  随之减小;并且减小的速率随  $u_0$  增加而降低。对现有野战火箭所取参数而言,其  $u_0$  值不会超过图 9.16 中的范围。若允许散布误差在 5% 以内,则低速旋转范围可取稳定因子  $S_g < 0.15$ 。进一步选取  $u_0$  和  $u_K$  进行组合计算表明,  $K_S$  值还随  $u_K$  之值有所变化;并在  $u_0$  较大时,由于偏角曲线围绕其极限中心的幅度增大,那么  $K_S$  随  $u_K$  之值的变化会加大。因此有必要对低速旋转范围加上一个对  $u_0$  值的限制条件。我们建议,可考虑取  $u_0 < 0.6$ 。而  $u_K$  之值以满足大于临界段的条件,即  $(u_K - u_0) > 5$  为宜。考虑到  $K_S$  随  $(u_0, u_K)$  之组合值的“跳动”,为保证不超过 5% 的误差起见,就有必要对  $S_g$  值限制得更严一些,建议  $S_g$  的上限取 0.10 为宜。

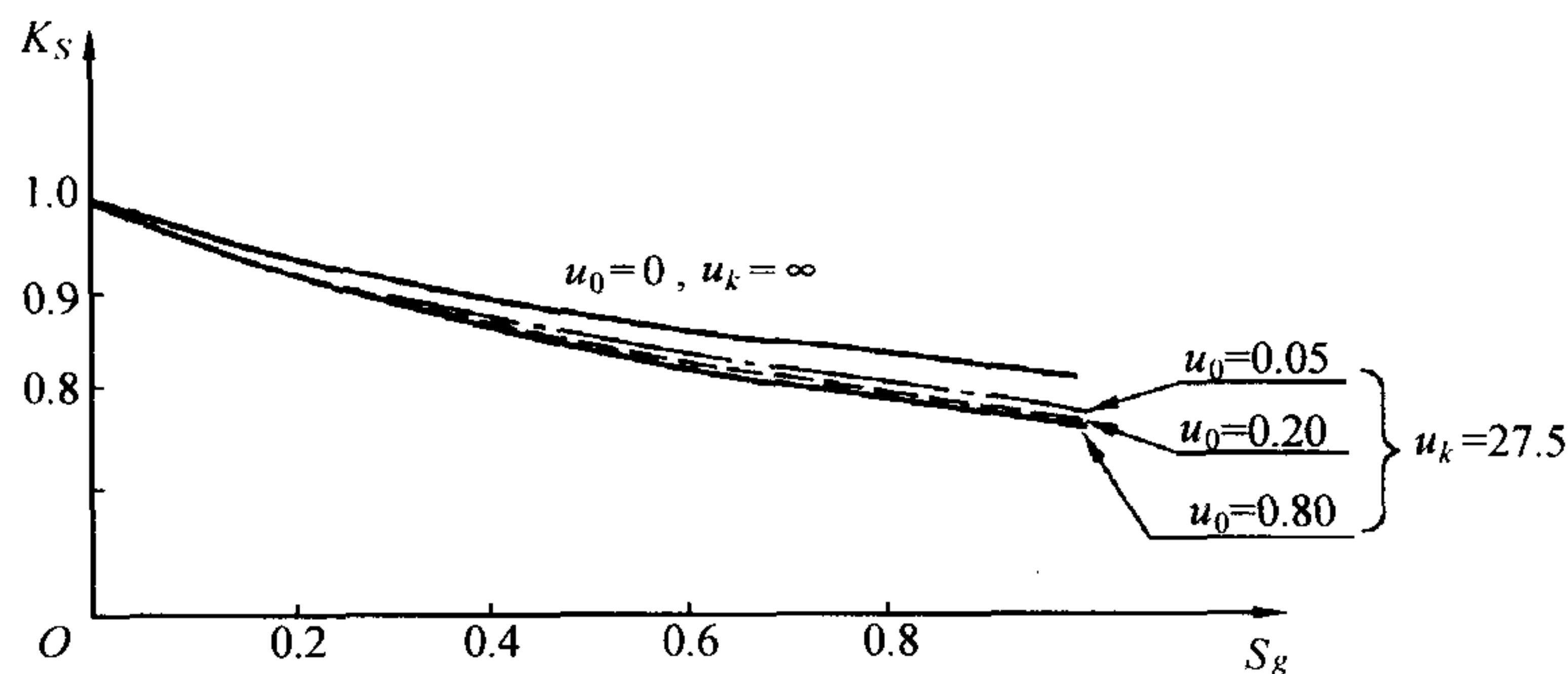


图 9.16  $K_S - S_g$  曲线族

在实际散布计算中,如用简单公式算出  $\psi_{\dot{\phi}_0}^*$ ,对于  $S_g > 0.10$  的情况,可以用  $K_S$  作为一个  $S_g$  的影响系数加以修正,即

$$|\Psi_{\dot{\phi}_0}^*| \approx K_S \psi_{\dot{\phi}_0}^*$$

这样,甚至可以把  $S_g$  的范围扩大到 0.30。

不言而喻,上述结论对推力偏心和动不平衡是同样适用的。



对风,用电子计算机算了  $(\Psi_{\phi_0}^* - 1)/v_0 = -\Psi_{\psi_0}^*/v_0$  随  $S_g$  变化的规律,并得出了其实部与  $-\psi_{\phi_0}^*/v_0$  的比值  $K_R$ ,曲线  $K_R - S_g$  绘于图 9.17 的上方。其中  $u_0 = 0$  和  $u_K = \infty$  时的曲线是由式(9.109)算出的;其他曲线选取  $u_K = 27.5$ 。可看出当  $u_0$  不大时,各实际曲线与特殊情况下的理论曲线很接近。图 9.17 下方是  $(\Psi_{\phi_0}^* - 1)/v_0$  之虚部与实部的比值,仍用  $K_R^I$  表示。在  $u_0$  不大时,  $K_R^I - S_g$  曲线也很靠近由式(9.106)所确定的曲线,这就为简化风偏计算提供了依据。显然,在上述所论低速旋转范围内,即使考虑到  $(u_0, u_K)$  的组合计算的“跳动”,这个范围之内的误差还是可以在 5% 以下。

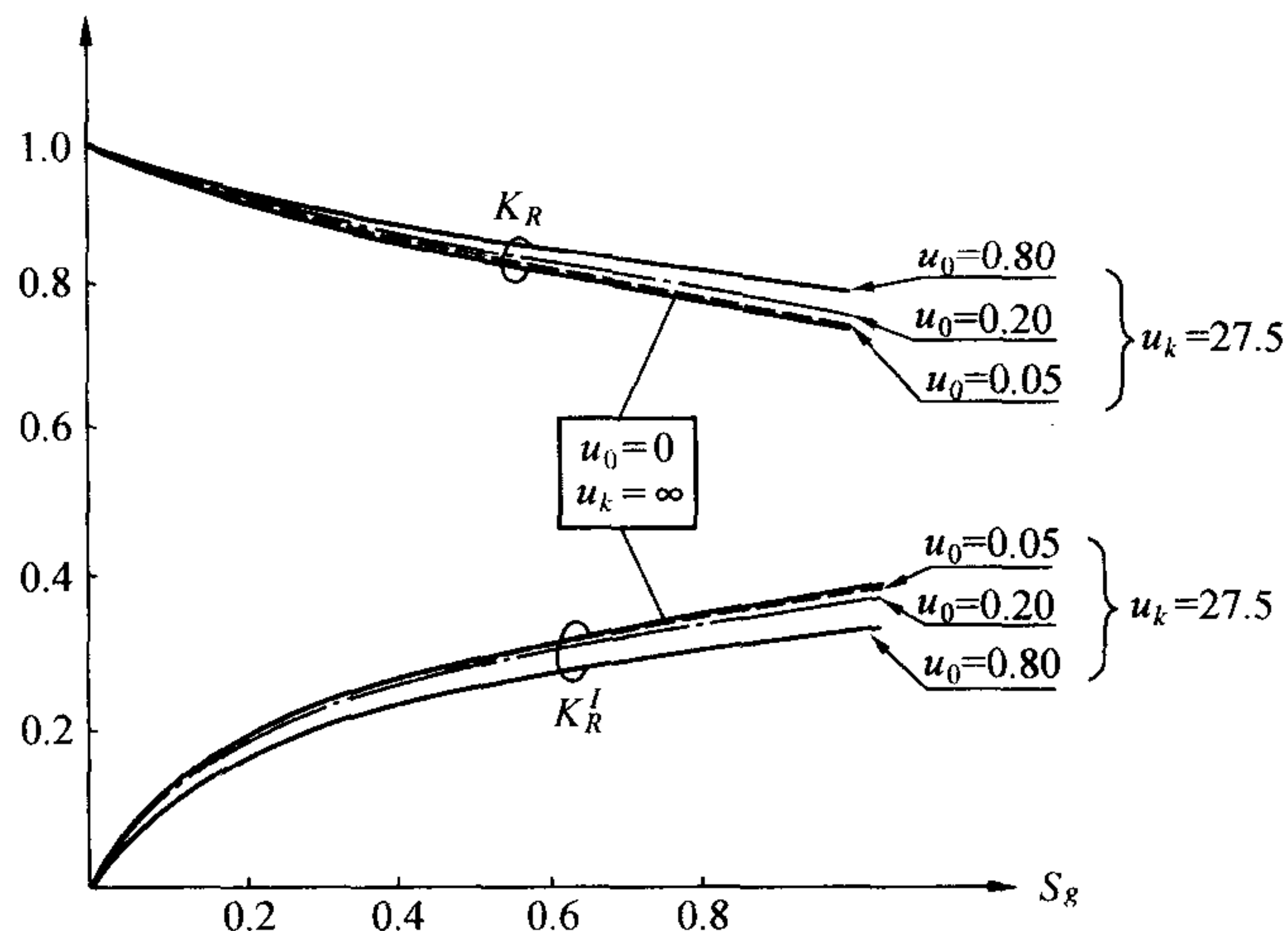


图 9.17  $K_R - S_g$  与  $K_R^I - S_g$  曲线

如若扩大  $S_g$  的范围,则  $\Psi_w^*$  的实部与虚部分别为

$$\phi_{1w}^* = -K_R \frac{\phi_{\phi_0}^*}{v_0} + \frac{1}{v_K} \quad (9.111)$$

$$\phi_{2w}^* = K_R^I \left( \phi_{1w}^* - \frac{1}{v_K} \right) \quad (9.112)$$

而  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  用下式计算

$$|\Psi_{\phi_0}^*| = K_S \phi_{\phi_0}^* \quad (9.113)$$

#### 9.9.4 结论

根据对特殊情况推导的结果,与用电子计算机计算的一般情况进行比较分析可知,特殊情况下的稳定因子  $S_g$  对角偏差的影响具有普遍性。对  $u_0 < 0.6$  并且  $(u_K - u_0) > 5$  的野战火箭



弹,可认为低速旋转范围判据为  $S_g < 0.10$ 。这实际上包括了绝大多数野战尾翼式火箭弹。忽略陀螺效应的简单式(9.96) ~ (9.99) 的适用范围是比较大的,使野战火箭的设计、研制和试验中进行密集度分析时,对选用公式有了一个大致的判据。对  $S_g > 0.10$  的情形,还可以利用  $K_S$ 、 $K_R^I$ 、 $K_R$  等系数来适当地扩大简单公式的使用范围。

不言而喻,当  $S_g$  实际上比 0.10 还小得多时,则可以放心地使用简单公式,而对  $u_0$  和  $u_K$  的限制条件则可大大放宽。



## 第十章 涡轮式火箭弹的扰动运动

### 10.1 概 述

涡轮式火箭弹无尾翼,压心在质心前,翻转力矩将驱使弹轴离开速度方向。为了使弹轴的运动稳定在速度方向上,必须使火箭弹绕纵轴高速旋转,以产生陀螺力矩来抗衡翻转力矩,维持弹轴的稳定性。造成高速自转的动力是喷气导转力矩,可参看图 8.7,其大小如式(8.66)所示

$$M_{xP} = F_P \frac{d^*}{2} \frac{u_1}{u'_{\text{eff}}} \tan \epsilon$$

式中,  $u_1$  是相对喷气速度,  $u'_{\text{eff}}$  由式(8.64) 确定,  $\epsilon$  是喷管斜置角。自转规律近似由如下方程确定(略去极阻尼力矩)

$$\frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \frac{M_{xP}}{C} = \frac{md^*}{2C} \left( \frac{u_1}{u'_{\text{eff}}} \right) \tan \epsilon \cdot a_P = \Gamma a_P$$

式中

$$\Gamma = \frac{md^*}{2C} \left( \frac{u_1}{u'_{\text{eff}}} \right) \tan \epsilon \quad (10.1)$$

将  $\Gamma a_P$  看成常量,则

$$\dot{\gamma} = \Gamma a_P t \quad (10.2)$$

涡轮式火箭弹初速一般较小,只有 30 m/s 左右,刚出炮口一段以至全主动段的推力加速度都远大于阻力和重力,这里可取

$$v = a_P t \quad (10.3)$$

由此知

$$\dot{\gamma} = \Gamma v \quad (10.4)$$

从而

$$\gamma = \Gamma(s - s_0) \quad (10.5)$$

涡轮式火箭弹没有尾翼,优点在于运动、储存、发射方便,并且散布比尾翼式火箭弹小;主要缺点是由于稳定条件的限制,弹体不能太细长,因而射程受限制,一般仅在 15 km 以下。

影响散布的主要扰动因素仍是起始扰动(主要是  $\Phi_0$ )、推力偏心、阵风和动不平衡。本章亦主要研究这些因素引起的扰动运动,并从减小角散布的观点出发,找出选取某些重要参量的方法。



第八章中已建立了各类弹丸的统一运动方程组。尽管涡轮式火箭弹与尾翼式火箭稳定方式不同,但诸扰动因素引起的攻角和偏角公式,在形式上都具有一致性。由于这两类火箭的运动方程组,除了其静力矩的符号有正负之别,其他各项都是完全相同。采用的运动方程可引自式(9.14),且改原稳定力矩项的“+”号为“-”号,为

$$W'' + 2(b - i\sqrt{S_g})W' - W = w_{\perp} + \frac{E}{k^2 v} \quad (10.6)$$

以此积分得攻角,代入下式(9.11)

$$\Psi' = \frac{1}{k} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \Delta + \frac{b_x + b_y}{k} \left( \frac{w_{\perp}}{v} \right) \quad (10.7)$$

求得偏角。式(10.6)中的  $E$  为

$$E = -\frac{a_P}{R_A^2} L \exp(i\gamma) + \left( 1 - \frac{R_C^2}{R_A^2} \right) \beta_D (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma}) \exp(i\gamma) + i \frac{R_C^2}{R_A^2} \dot{\gamma} \ddot{\theta} - \ddot{\theta} - k_{zd} \dot{\theta}$$

$R_C$  是绕纵轴的惯性半径,  $R_C^2 = C/m$ 。

## 10.2 起始扰动所引起的攻角和偏角

### 10.2.1 攻角和偏角公式

求解起始扰动引起的攻角和偏角,需要解微分方程(10.6)在初始条件下的齐次解。齐次方程及初始条件如下

$$W'' + 2(b - i\sqrt{S_g})W' - W = 0 \quad (10.8)$$

当  $u = u_0$  时,  $W' = W'_0 = \dot{\Phi}_0/k$ ,  $W = W_0 = v_0 \Delta_0 = v_0(\Phi_0 - \Psi_0)$ , 方程(10.8)的二特征根为

$$r_{1,2} = -b + i\sqrt{S_g} \pm \sqrt{(b - i\sqrt{S_g})^2 + 1}$$

对涡轮式火箭弹,陀螺稳定因子  $S_g$  要比  $b$  大得多,则

$$r_{1,2} \approx -b + i(\sqrt{S_g} \pm \sqrt{S_g - 1})$$

以后会看到,保证陀螺稳定性的必要条件是  $S_g > 1$ , 那么根号下的值一定是正数。令

$$\begin{cases} H_1 = \sqrt{S_g} + \sqrt{S_g - 1} \\ H_2 = \sqrt{S_g} - \sqrt{S_g - 1} \end{cases} \quad (10.9)$$

则方程(10.8)有如下形式的解

$$W = \exp[-b(u - u_0)] \{ C_I \exp[iH_1(u - u_0)] + C_{II} \exp[iH_2(u - u_0)] \} \quad (10.10)$$

将初始条件代入,可决定参数  $C_I$  和  $C_{II}$

$$\begin{cases} (-b + iH_1)C_I + (-b + iH_2)C_{II} = \frac{\dot{\Phi}_0}{k} \\ C_I + C_{II} = v_0(\Phi_0 - \Psi_0) \end{cases}$$



由于  $b \ll H_1, b \ll H_2$ , 可解得

$$C_I = \frac{-1}{2\sqrt{S_g - 1}} \left[ i \frac{\dot{\Phi}_0}{k} + H_2 v_0 (\Phi_0 - \Psi_0) \right]$$

$$C_{II} = \frac{1}{2\sqrt{S_g - 1}} \left[ i \frac{\dot{\Phi}_0}{k} + H_1 v_0 (\Phi_0 - \Psi_0) \right]$$

代入(10.10)式, 得攻角为

$$\Delta = \frac{-i\dot{\Phi}_0}{2kv\sqrt{S_g - 1}} \exp[-b(u - u_0)] \{ \exp[iH_1(u - u_0)] - \exp[iH_2(u - u_0)] \} -$$

$$(\Phi_0 - \Psi_0) \frac{1}{2\sqrt{S_g - 1}} \frac{v_0}{v} \exp[-b(u - u_0)] \{ H_2 \exp[iH_1(u - u_0)] -$$

$$H_1 \exp[iH_2(u - u_0)] \} \quad (10.11)$$

从上面  $\Delta$  的表达式看出, 只有当  $S_g > 1$  时,  $H_1$  和  $H_2$  才为实数, 从而才能有幅值不增的攻角, 因此  $S_g > 1$  是陀螺稳定的必要条件。

式(10.11)亦是下述三种初始条件下解的叠加

第一种初始条件:  $t = t_0$  时,  $\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0, \Phi_0 = 0, \Psi_0 = 0$ ;

第二种初始条件:  $t = t_0$  时,  $\dot{\Phi}_0 = 0, \Phi = \Phi_0, \Psi_0 = 0$ ;

第三种初始条件:  $t = t_0$  时,  $\dot{\Phi}_0 = 0, \Phi_0 = 0, \Psi = \Psi_0$ 。

他们所对应的特征函数如下

$$\Delta_{\dot{\Phi}_0}^* = - \frac{i}{2kv\sqrt{S_g - 1}} \exp[-b(u - u_0)] \{ \exp[iH_1(u - u_0)] - \exp[iH_2(u - u_0)] \} \quad (10.12)$$

$$\Delta_{\Phi_0}^* = - \frac{1}{2\sqrt{S_g - 1}} \frac{v_0}{v} \exp[-b(u - u_0)] \{ H_2 \exp[iH_1(u - u_0)] - H_1 \exp[iH_2(u - u_0)] \} \quad (10.13)$$

$$\Delta_{\Psi_0}^* = - \Delta_{\Phi_0}^* \quad (10.14)$$

$$\Delta = \dot{\Phi}_0 \Delta_{\dot{\Phi}_0}^* + \Phi_0 \Delta_{\Phi_0}^* + \Psi_0 \Delta_{\Psi_0}^* \quad (10.15)$$

将攻角特征函数表达式(10.12)、(10.13)和(10.14)分别代入式(10.7)积分, 使得相应偏角的特征函数, 其运算方法与上章9.3相仿, 为避免过度重复, 兹仅写出结果如下

$$\Psi_{\dot{\Phi}_0}^* = - \frac{iC_3}{2kv_0\sqrt{S_g - 1}} [B(H_1 u_0, H_1 u) - B(H_2 u_0, H_2 u)] \quad (10.16)$$

$$\Psi_{\Phi_0}^* = -iH_1 kv_0 \Psi_{\dot{\Phi}_0}^* + C_3 B(H_1 u_0, H_1 u) \quad (10.17)$$

$$\Psi_{\Psi_0}^* = 1 - \Psi_{\Phi_0}^* \quad (10.18)$$

试比较式(10.16)与式(9.33), 式(10.17)与式(9.35), 式(10.18)与式(9.39), 便知他们在形式





上是很相似的。

### 10.2.2 攻角和偏角的特性

因为在起始扰动中,  $\Phi_0$  是主要的, 这里将重点讨论  $\Delta\Phi_0^*$  和  $\Psi\Phi_0^*$  的特性。由式(10.12)看出,  $\Delta\Phi_0^*$  是两个圆运动的合成(图 10.1)。把圆频率为  $H_1$  的运动称为快圆运动; 把圆频率为  $H_2$  的运动称为慢圆运动。这两个圆运动都沿着顺时针方向。由于这两个圆的半径都是不断减小的, 其合成结果, 必然为一半径不断减小的外摆线, 该外摆线由第一、二象限逐渐转到第三、四象限(注意, 约定幅角顺时针方向为正, 故象限亦按顺时针编号)。

为了说明慢圆运动产生的原因, 不妨考察慢圆运动频率为零的情形, 就是说, 慢圆运动已不存在。使  $H_2 = 0$ , 根据式(10.9)的定义, 务必使  $S_g \rightarrow \infty$  才行。根据式(9.15),  $S_g = \Gamma^2/(2nk)^2$ , 须  $k = 0$ , 就是真空情形。此时式(10.12)中  $k$  用  $\Gamma/(2n\sqrt{S_g})$  替代, 且  $b(u - u_0) \approx 0$ , 得真空情况下的攻角特征函数为

$$\Delta\Phi_0^* \Big|_{S_g = \infty} = \frac{in}{\Gamma v} \left\{ 1 - \exp \left[ i \frac{\Gamma}{n} (s - s_\theta) \right] \right\} \quad (10.19)$$

显然, 此函数曲线只局限在第一、二象限内变化, 如图 10.2 所示。这说明, 在无翻转力矩的情况下, 弹轴相对于速度矢量只有快圆运动。攻角曲线只在第一、二象限内变化, 并且半径仍是不断衰减的; 运动的圆中心不断向原点移动。这说明了绕轴高速旋转的火箭弹, 仅在陀螺力矩作用下, 由  $\Phi_0$  产生的弹轴相对于速度矢量的运动, 一定是快圆运动。而且可以认为, 这个圆运动的中心就是弹体总动量矩的方向。

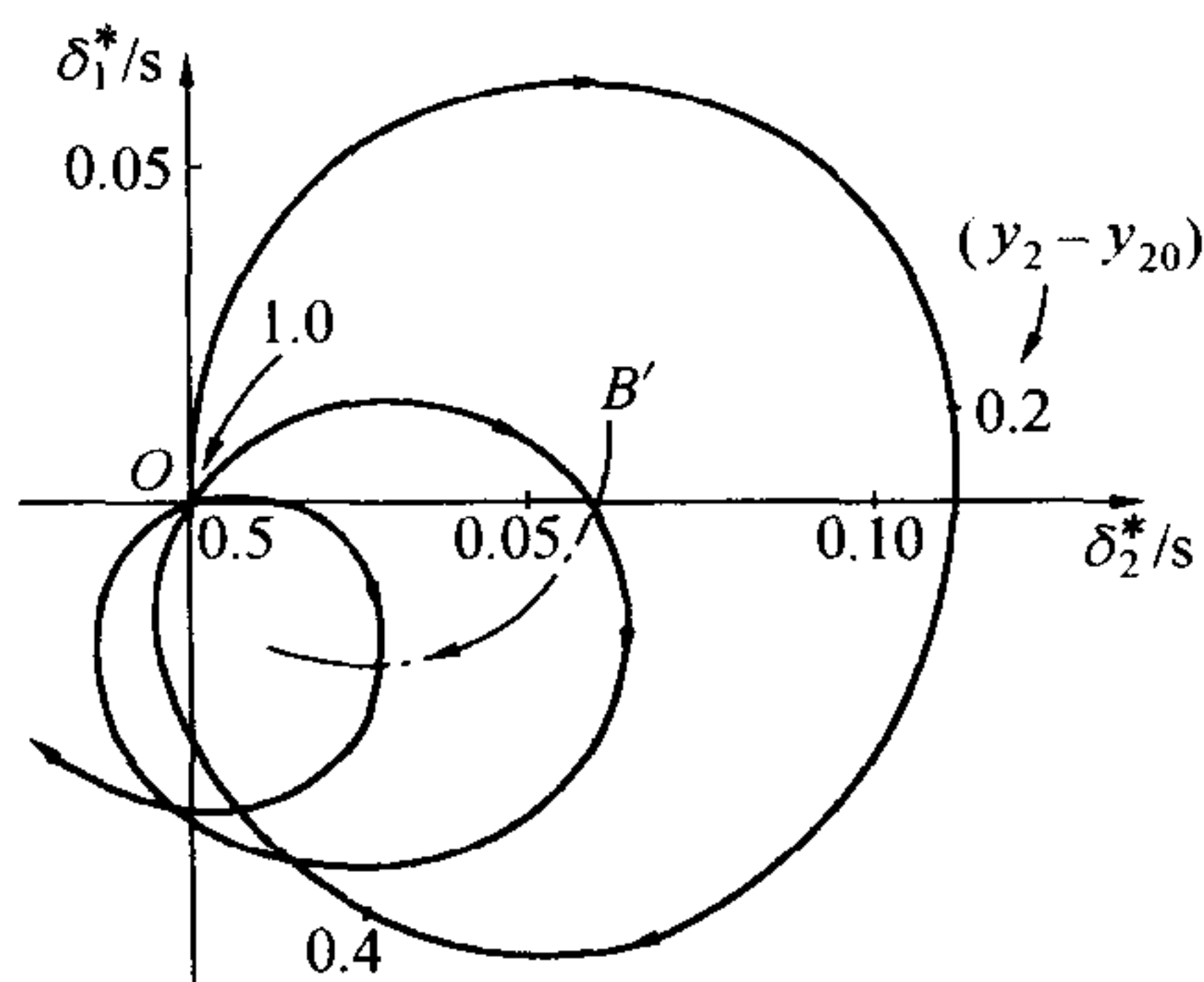


图 10.1  $\Delta\Phi_0^*$  曲线图

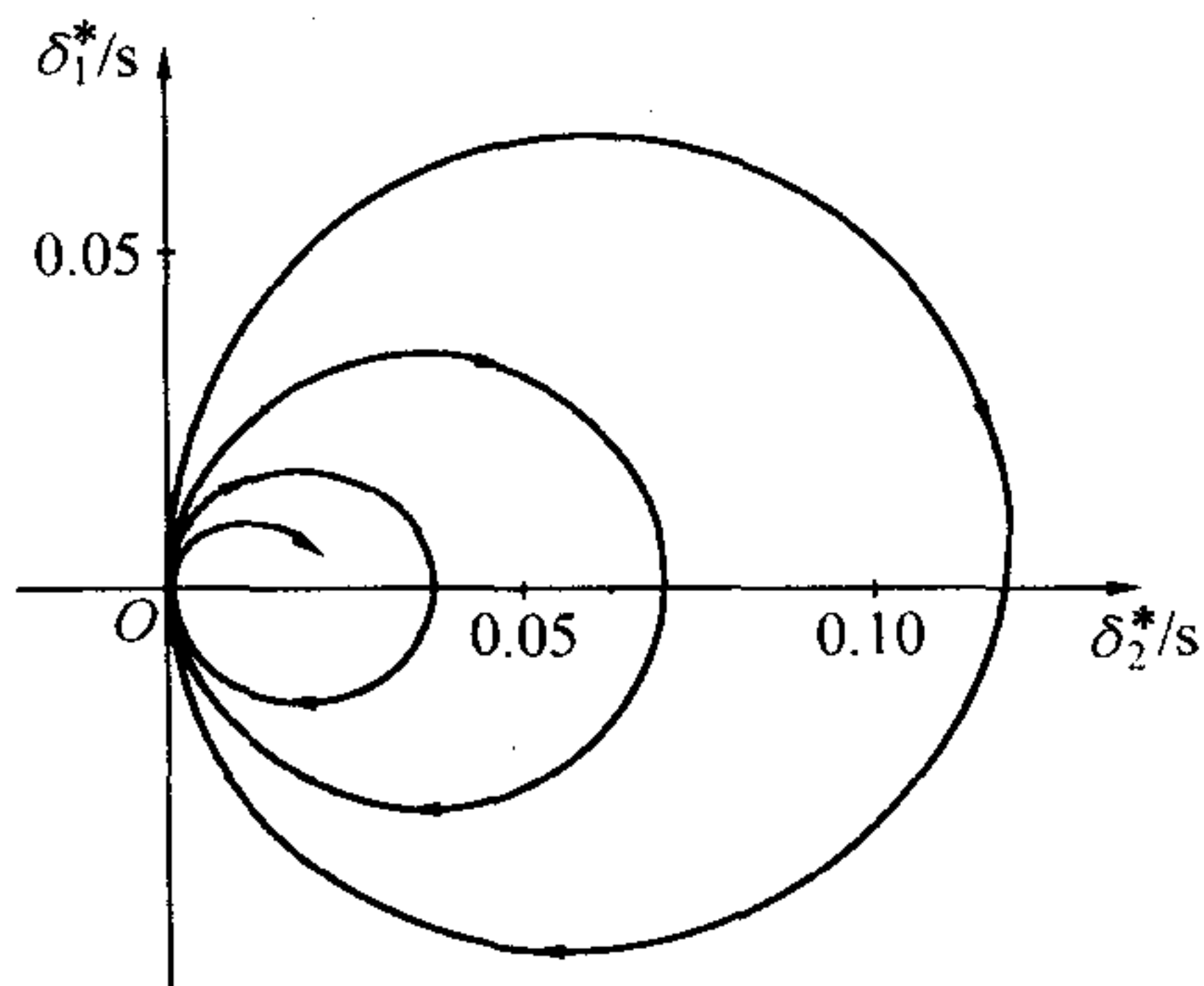


图 10.2 真空情况下的  $\Delta\Phi_0^*$  曲线

在有空气存在下, 由于有翻转力矩作用, 便出现了慢圆运动。根据理论力学, 总动量矩矢量的矢端速度必与翻转力矩矢量一致; 而总动量矩矢量正好与弹轴平均位置  $B'$  一致(见图 10.1 中  $B'$ ), 故  $B'$  将沿翻转力矩(亦是与平均攻角相应的平均值)方向, 绕原点顺时针转动, 这就



是慢圆运动产生的根本原因。

为进一步了解弹轴运动绕速度矢量的运动规律,如式(9.37)一样,也可以应用欧拉公式,将式(10.12)化为

$$\Delta\phi_0^* = \frac{1}{kv\sqrt{S_g-1}} \exp[-b(u-u_0)] \exp[i\sqrt{S_g}(u-u_0)] \sin\sqrt{S_g-1}(u-u_0) \quad (10.20)$$

这个以极坐标形式表示的攻角表达式,能清楚地看出攻角的幅值及幅角的变化规律。显然,在攻角平面内,弹轴仍是作衰减的正弦摆动(章动),同时攻角平面又沿弹体旋转方向(顺时针方向)回转,与尾翼式旋转火箭弹很相似。所不同的是回转的快慢及在攻角平面内章动的频率不同。采取尾翼旋转弹相同的处理方法,亦把章动一周期内火箭飞行的弹道弧长,称为波长。为区别前述波长,这里的波长用 $\lambda_2$ 表示。根据式(10.20),有

$$\begin{aligned} \sqrt{S_g-1}(k\lambda_2) &= 2\pi \\ \text{则 } \lambda_2 &= \frac{2\pi}{k\sqrt{S_g-1}} = \frac{4\pi n}{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{S_g}}} \end{aligned} \quad (10.21)$$

一般涡轮式火箭弹的 $\lambda_2$ 也有数十米至一百多米的数量级。

在一个波长 $\lambda_2$ 之内,攻角曲线将两次归零,也就是图10.1的 $\Delta\phi_0^*$ 曲线两次穿过原点 $O$ 。若将自变量改为以波长 $\lambda_2$ 为“尺度”的自变量,即

$$y_2 = \frac{s}{\lambda_2} \quad (10.22)$$

于是

$$\sqrt{S_g-1}(u-u_0) = 2\pi(y_2-y_{20}) \quad (10.23)$$

则当

$$y - y_{20} = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, \dots$$

等一系列等差数值时, $\Delta\phi_0^*$ 曲线正好到达原点,如图10.1所示。这又与表9.1所示的尾翼弹 $\Delta\phi_0^*$ 曲线相似。

至于攻角平面的回转角速度即进动角速度,由式(10.20)知,对自变量 $u$ 而言,其值为 $\sqrt{S_g}$ ,与尾翼弹也一样。只不过涡轮式火箭弹的值要大得多,进动角速度比尾翼弹要快十几倍到数十倍。

图10.3绘出了某一火箭在真空条件下的 $\Psi\phi_0^*$ 曲线;图10.4绘出了稳定因子 $S_g=2$ 时的 $\Psi\phi_0^*$ 曲线。分别取了不同的 $y_0$ 值,以显出 $y_0$ 的影响。偏角曲线有如下特点:

(1) 偏角曲线任意点的切线平行于相应攻角曲线的割线。这是由于 $\Psi$ 与 $\Delta$ 由关系

$$\Psi' = \frac{1}{k} \left( \frac{a_p}{v^2} + b_y \right) \Delta$$





所决定的。其物理解释与尾翼旋转弹情况一样,不作重复。由于火箭弹每飞行半个波长,攻角归零一次,归零时的割线方向发生突变,即改变  $\pi$  角。这样,偏角曲线的切线也在这些点突变  $\pi$  角,于是出现了尖点。既然每飞行半个波长攻角归零一次,那么尖点间的飞行弧长也是半个波长。

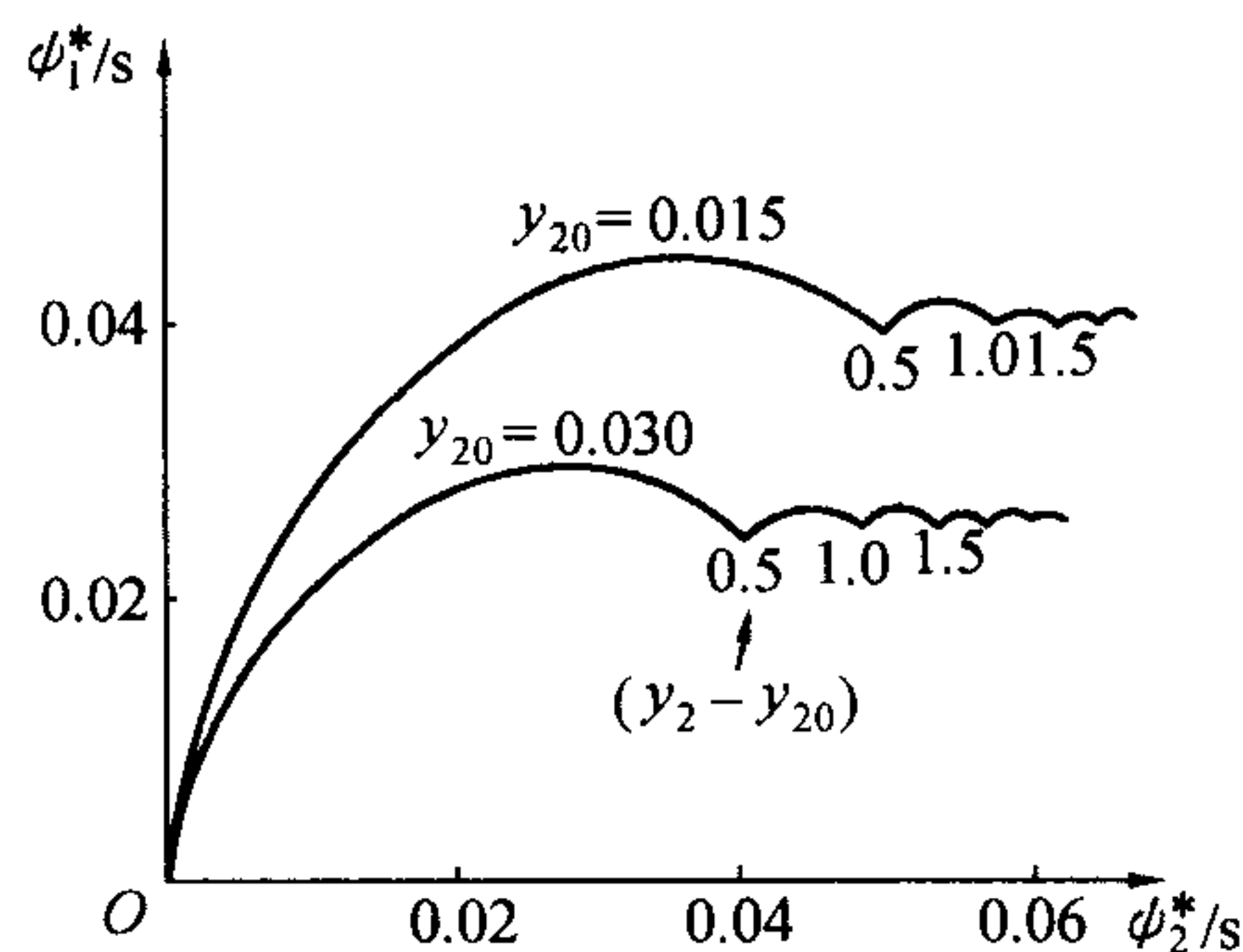


图 10.3 真空中的  $\Delta\phi_0^*$  曲线 ( $S_g = \infty$ )

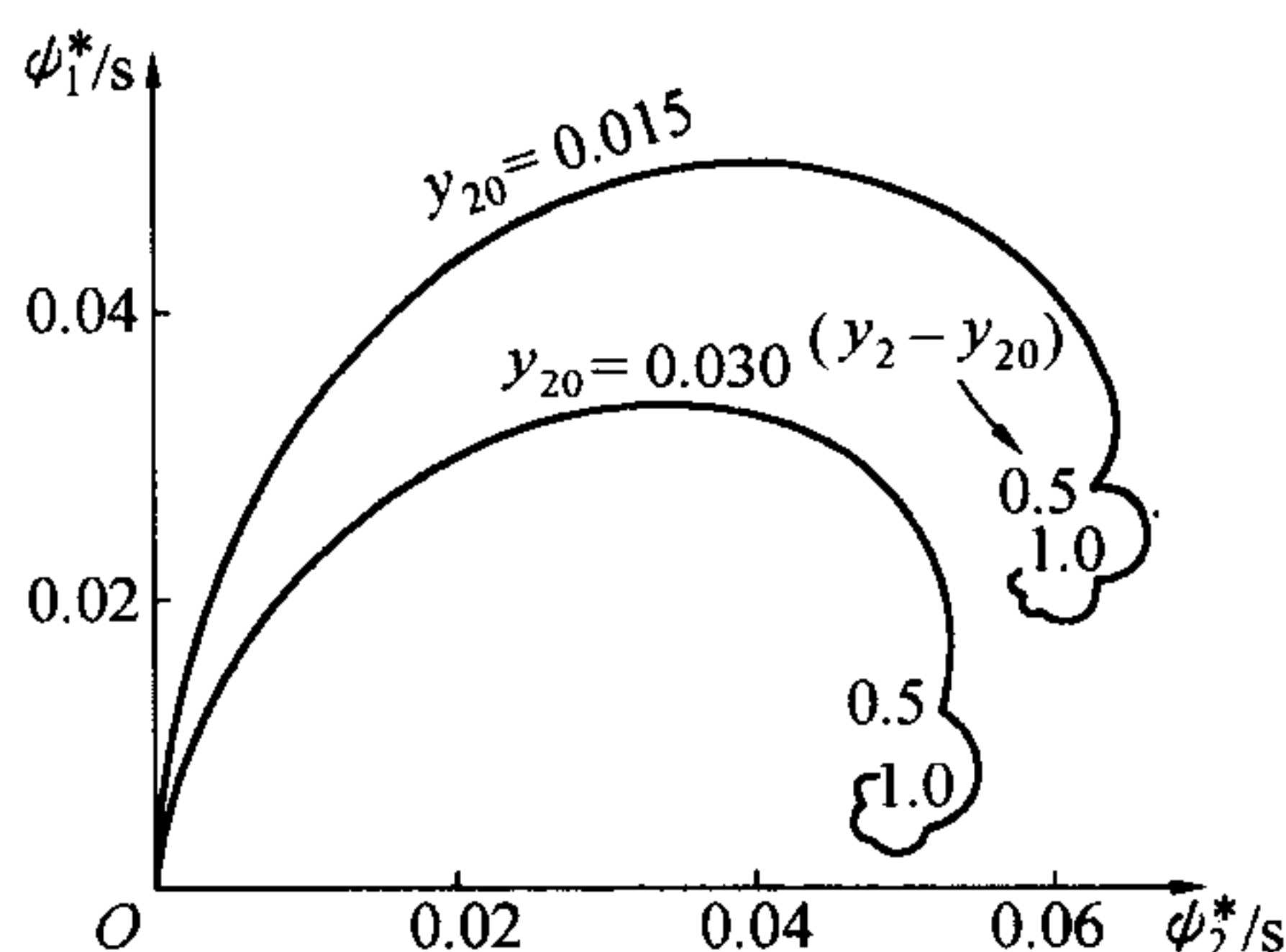


图 10.4  $S_g = 2$  时的  $\Delta\phi_0^*$  曲线

(2) 偏角曲线在前半个波长内增加很快,此后变化甚缓,因此存在着临界段,其长度即是半个波长。偏角曲线在临界段内迅速形成的原因,仍是此间攻角大,法向力大而动量小之故。以上两点与尾翼旋转弹比起来,又非常相似。

(3) 在有空气存在的实际情况下,偏角曲线末段向里卷曲。这一点实际上是第 1 条的特征表现。因为有慢圆运动,攻角曲线中心要绕原点顺时针方向回转,当攻角曲线进入第三象限之后,偏角切线还将向左下方及左上方变化,必然造成曲线的卷曲。而且随  $S_g$  越小,卷曲得更加明显,这是由于慢圆运动加快之故。

### 10.2.3 影响角散布的因素

与式(9.42)类似,  $\phi_0$  引起的角散布为

$$B(\phi_{\phi_0}) = B_{\phi_0} |\Psi_{\phi_0}^*| \quad (10.24)$$

由式(10.16)知,  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  与  $u_0, k, v_0, S_g$  有关,而  $v_0 = \sqrt{2as_0}$ ; 又从式(9.15)知,  $k = \Gamma/(2n\sqrt{S_g})$ 。故  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  的影响因素主要是:  $\Gamma, n, s_0, a$  和  $S_g$ 。

#### 1. 赤道转动惯量与极转动惯量之比 $n$

由式(10.16)可知,当  $n$  增加时,  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  增加。其原因是  $n$  增加意味着弹体细长,使陀螺效应减弱(在  $\dot{\gamma}$  的变化规律一定的情况下),因而攻角和偏角都要增大。但  $n$  过小时,对射程和威力都是不利的。如果  $n$  太大,则为保证陀螺稳定性,要求转速较高,这不仅消耗能量较多,而且





火药强度也成问题,故  $n$  不能太大,一般所取弹长与弹径之比在 8 以下。

## 2. 自转角速度与飞行速度的比值 $\Gamma$

$|\Psi_{\phi_0}^*|$  随  $\Gamma$  增加而减小。因  $B_{\dot{\phi}_0}$  增加,致使总的  $B(\psi_{\phi_0})$  略增,故不宜于选较大的  $\Gamma$ 。

## 3. 有效滑轨长度 $s_0$

$s_0$  增加时,  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  是减小的。因为  $\Gamma$  一定时,这将使炮口转速增加,陀螺效应增强;同时炮口速度较大,速度方向不易改变。但如果是通过增长滑轨长度来达到此目的,那么也许使  $B_{\dot{\phi}_0}$  增加,致使总的偏角散布加大。

## 4. 推力加速度 $a_P$

一般野战涡轮式火箭弹,可取  $\bar{a} = a_P$ ,在  $\Gamma$  和滑轨长一定时,  $a_P$  增大,使炮口转速和速度都提高,使  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  减小。但较大的  $a_P$  可能使  $B_{\dot{\phi}_0}$  增大,总的来讲,  $a_P$  对  $B(\psi_{\phi_0})$  的影响不大。

关于稳定因子  $S_g$  的影响,在保证飞行稳定性条件下,通过计算表明,  $S_g$  对幅值  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  影响很小。这是因为在  $\Gamma$  和  $n$  一定时,改变  $S_g$  就意味着翻转力矩系数改变。而翻转力矩对前半波长内的偏角影响不大。主要改变末段曲线的卷曲程度,而末段对总偏角的幅值影响是小的。

关于  $B_{\dot{\phi}_0}$ ,目前的水平是  $(0.05 \sim 0.08)$  rad/s,新设计的型号,应不大于此值才是。

**例题 10.1** 已知某涡轮式火箭弹参数如下:

$$d = 0.14 \text{ m}, R_A^2 = 0.082 \text{ m}^2, R_C^2 = 0.0025 \text{ m}^2$$

$$m = 39.10 \text{ kg}, l = 1.00 \text{ m}, m'_z = 0.780 \text{ l/rad}$$

$$C'_y = 2.0 \text{ l/rad}, \rho = 1.20574 \text{ kg/m}^3, \Gamma = 7.06 \text{ rad/m}$$

$$a_P = 557 \text{ m/s}^2, v_0 = 34.0 \text{ m/s}, v_K = 390 \text{ m/s}$$

$$\dot{\gamma}_0 = 240 \text{ rad/s}, \theta_0 \approx \theta_K = 45^\circ, B_{\dot{\phi}_0} = 0.050 \text{ rad/s}$$

$$B_{\phi_0} = 0.30 \times 10^{-3} \text{ rad}, B_{\psi_0} = 0.60 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

试求起始扰动引起的落点方向散布。

**解**

$$k = \sqrt{\frac{\rho S l m'_z}{2 m R_A^2}} = \sqrt{\frac{1.20574 \times \left( \frac{\pi \times 0.14^2}{4} \right) \times 1.00 \times 0.780}{2 \times 39.10 \times 0.082}} = 0.0475$$

$$S_g = \left( \frac{\Gamma}{2nk} \right)^2 = \left[ \frac{7.06}{2 \times \frac{0.082}{0.0025} \times 0.047} \right]^2 = (2.27)^2 = 5.15$$

由式(10.9)

$$H_1 = \sqrt{S_g} + \sqrt{S_g - 1} = 2.27 + \sqrt{4.15} = 4.31$$

$$H_2 = \sqrt{S_g} - \sqrt{S_g - 1} = 2.27 - \sqrt{4.15} = 0.232$$



$$s_0 = \frac{v_0^2}{2a} \approx \frac{v_0^2}{2a_p} = \frac{34.0^2}{(2 \times 557)} = 1.04$$

$$s_K \approx \frac{v_K^2}{2a_p} = \frac{390^2}{2 \times 557} = 136.5$$

$$u_0 = ks_0 = 0.0494$$

$$u_K = ks_K = 6.48$$

$$H_1 u_0 = 0.213, H_1 u_K = 27.8$$

$$H_2 u_0 = 0.0115, H_2 u_K = 1.50$$

查表

$$B(H_1 u_0, H_1 u_K) = 0.4994 + 0.2670i$$

$$B(H_2 u_0, H_2 u_K) = 0.8844 + 0.0992i$$

又

$$b_y = \frac{\rho S C'_y}{2m} = \frac{1.20574 \times \frac{\pi}{4} \times 0.14^2 \times 2.0}{2 \times 39.10} = 0.475 \times 10^{-3}$$

$$C_3 = 1 + 2b_y s_0 = 1.001 \approx 1$$

代入式(10.16)

$$\begin{aligned} \Psi_{\phi_0 K}^* &= -\frac{iC_3}{2kv_0 \sqrt{S_g - 1}} = [B(H_1 u_0, H_1 u_K) - B(H_2 u_0, H_2 u_K)] = \\ &= -\frac{i}{2 \times 0.0475 \times 34.0 \times \sqrt{4.15}} [0.4994 + 0.2670i - (0.8844 + 0.0992i)] = \\ &= 0.0255 + 0.0585i \end{aligned}$$

再由式(10.17)

$$\begin{aligned} \Psi_{\phi_0 K}^* &= -iH_1 kv_0 \Psi_{\phi_0 K}^* + C_3 B(H_1 u_0, H_1 u_K) = \\ &= -i4.31 \times 0.0475 \times 34.0 \times (0.0255 + 0.0585i) + 0.4994 + 0.2670i = \\ &= 0.9066 + 0.0895i \end{aligned}$$

由式(10.18)

$$\Psi_{\psi_0 K}^* = 1 - \Psi_{\phi_0 K}^* = 0.0934 - 0.0895i$$

主动段末的角散布为

$$B(\phi_{\phi_0 K}) = B_{\phi_0 K} |\Psi_{\phi_0 K}^*| = 0.050 \times \sqrt{0.0255^2 + 0.0585^2} \text{ rad} = 3.19 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$B(\phi_{\psi_0 K}) = B_{\psi_0 K} |\Psi_{\psi_0 K}^*| = 0.30 \times 10^{-3} \times \sqrt{0.9066^2 + 0.0895^2} \text{ rad} = 0.27 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$B(\psi_{\psi_0 K}) = B_{\psi_0 K} |\Psi_{\psi_0 K}^*| = 0.60 \times 10^{-3} \times \sqrt{0.0934^2 + 0.0895^2} \text{ rad} = 0.078 \times 10^{-3} \text{ rad}$$



三者合起来的角散布为

$$B(\psi_K) = \sqrt{B^2(\psi_{\phi_0 K}) + B^2(\psi_{\phi_0 K}) + B^2(\psi_{\psi_0 K})}$$

$$\sqrt{3.19^2 + 0.27^2 + 0.78^2} \times 10^{-3} \text{ rad} = 3.20 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

落点方向散布为

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\psi_K)}{\cos \theta_K} = \frac{3.20 \times 10^{-3}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{221}$$

### 10.3 推力偏心的影响

推力偏心包括推力线偏心和推力偏心角,由于推力偏心角引起的推力侧分力对野战火箭弹道的影响可忽略,故推力偏心仅指推力线偏心而言。与尾翼弹比起来,涡轮式火箭转速更高(十倍以上),使推力偏心矩的作用趋于对消。然而,因涡轮式火箭散布比尾翼式火箭要小,故相对说来,推力偏心引起的散布在涡轮式火箭总散布中的地位还是不容忽视的。推力偏心引起的攻角和偏角,仍可对方程(10.6)和(10.7)求解得到。为避免数学运算过程的冗长,采用格林函数法。如式(9.43),先得攻角

$$\Delta_L = - \int_{t_0}^t \frac{a_P L \exp(i\gamma_n)}{R_A^2} \Delta_{\phi_0}^*(u_n, u) dt_n$$

式中,  $\gamma$  由式(10.5)确定;  $\Delta_{\phi_0}^*$  由式(10.12)确定,不过须将  $u_0$  改为参数  $u_n$ 。而  $dt_n = ds_n/v_n$ , 则

$$\Delta_L = - \frac{a_P L}{k R_A^2} \left( - \frac{i}{2kv \sqrt{S_g - 1}} \right) \int_{u_0}^u \exp[-b(u - u_n)] \{ \exp[iH_1(u - u_n)] - \exp[iH_2(u - u_n)] \} \exp[in_\lambda(u_n - u_0)] du_n \quad (10.25)$$

式中,  $n_\lambda = \Gamma/k$ ,  $n_\lambda$  也有一定物理意义,将式(10.21)代入,可得

$$n_\lambda = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} = \sqrt{S_g - 1} \frac{\Gamma \lambda_2}{2\pi} = \sqrt{S_g - 1} n_{\lambda_2} \quad (10.26)$$

式中

$$n_{\lambda_2} = \frac{\Gamma \lambda_2}{2\pi} \quad (10.27)$$

$n_{\lambda_2}$  表示在一个波长  $\lambda_2$  内的自转周数;  $n_\lambda$  是  $n_{\lambda_2}$  的  $\sqrt{S_g - 1}$  倍。现有涡轮式火箭  $n_{\lambda_2}$  达 80 ~ 100 的数量级,而  $S_g$  为 2 ~ 5,故  $n_\lambda$  之值在 80 ~ 200 的范围内。

在式(10.25)中,被积函数可写为

$$\frac{1}{v_n} \exp[-b(u - u_n)] \{ \exp(iH_1 u) \exp[i(n_\lambda - H_1)u_n] - \exp(iH_2 u) \exp[i(n_\lambda - H_2)u_n] \} \exp(-in_\lambda u_0)$$

在  $S_g = 2 \sim 5$  的范围内,  $H_1 = 2.4 \sim 4.2$ ,  $H_2 = 0.2 \sim 0.4$ ,故  $\exp[i(n_\lambda - H_1)u_n]$  和  $\exp[i(n_\lambda$





$-H_2)u_n]$  是高频函数。在它们变化一个周期内,其波动化比之速度  $v_n$  的变化量来说,  $v_n$  的变量就显得很小了,因此可把  $v_n$  取作某一常值。在近似求积分值的运算中,把变化相对缓慢的函数值取为常值,是带有普遍性的方法。考虑到偏角在刚出炮口一段形成的特性,故取炮口值为

$$v_n \approx v_0$$

这样,式(10.25)积分得(略有近似)

$$\Delta_L = -\frac{a_p L}{k R_A^2} \left( -\frac{i}{2kv\sqrt{S_g-1}} \right) \frac{i}{v_0} \left\{ \exp[-b(u-u_0)] \left[ \frac{1}{n_\lambda - H_1} \exp[iH_1(u-u_0)] - \frac{1}{n_\lambda - H_2} \exp[iH_2(u-u_0)] \right] - \frac{2\sqrt{S_g-1}}{(n_\lambda - H_1)(n_\lambda - H_2)} \exp[in_\lambda(u-u_0)] \right\} \quad (10.28)$$

上式表明,  $\Delta_L$  由自由运动和强迫运动组成,强迫运动仍保持高频率,并且其幅值远小于自由运动幅值。因  $n_\lambda \gg H_1, n_\lambda \gg H_2$ , 故取  $n_\lambda - H_1 \approx n_\lambda, n_\lambda - H_2 \approx n_\lambda$  及  $(n_\lambda - H_1)(n_\lambda - H_2) \approx n_\lambda^2$ 。那么强迫项的幅值只有自由运动项幅值的  $2\sqrt{S_g-1}/n_\lambda$ , 将式(10.26)代入得

$$\frac{2\sqrt{S_g-1}}{n_\lambda} = \frac{2}{n_{\lambda_2}}$$

前面已指出,  $n_{\lambda_2} = 80 \sim 100$ , 则其幅值比为

$$\frac{2}{n_{\lambda_2}} = \frac{1}{40} \sim \frac{1}{50}$$

可见,对涡轮式火箭弹,其强迫运动项可以忽略不计。这是因为火箭的自由摆动频率(固有频率)远低于外界推力偏心矩的干扰频率(自转频率)。由于火箭摆动的惯性,干扰力矩只容易激发其自由摆动运动,而对高频的强迫运动不甚敏感。由此,只需保留推力偏心矩所引起的自由运动项就足够准确了。于是将式(10.12)代入式(10.28)可得

$$\Delta_L = -\frac{ia_p L}{kv_0 R_A^2 n_\lambda} \Delta_{\Phi_0}^* \quad (10.29)$$

相应的偏角为

$$\Psi_L = -\frac{ia_p L}{kv_0 R_A^2 n_\lambda} \Psi_{\Phi_0}^* \quad (10.30)$$

由于  $kv_0 n_\lambda = kv_0 \frac{\Gamma}{k} = \Gamma v_0 = \dot{\gamma}_0$ , 则

$$\Delta_L = -i \frac{a_p L}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} \Delta_{\Phi_0}^* \quad (10.31)$$

$$\Psi_L = -i \frac{a_p L}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} \Psi_{\Phi_0}^* \quad (10.32)$$

由此可见,推力偏心对主动段的影响,与某一起始摆动角速度的影响相当,其值为



$$\dot{\Phi}_L = -i \frac{a_P L}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} \quad (10.33)$$

称  $\dot{\Phi}_L$  为推力偏心的等效起始扰动。

推力偏心等效作用的性质,与上一章关于尾翼式旋转火箭运动的分析相同。

根据(10.31)和(10.32)两式,为得到  $\Delta_L^*$  和  $\Psi_L^*$  曲线,只须将  $\Delta_{\phi_0}^*$  和  $\Psi_{\phi_0}^*$  曲线逆时针方向转动  $90^\circ$ ,再乘上一个倍数  $a_P/(R_A^2 \dot{\gamma}_0)$  即可。图 10.5 和图 10.6 中绘制的  $\Delta_L^*$  和  $\Psi_L^*$  曲线是由电子计算机算出的精确结果。

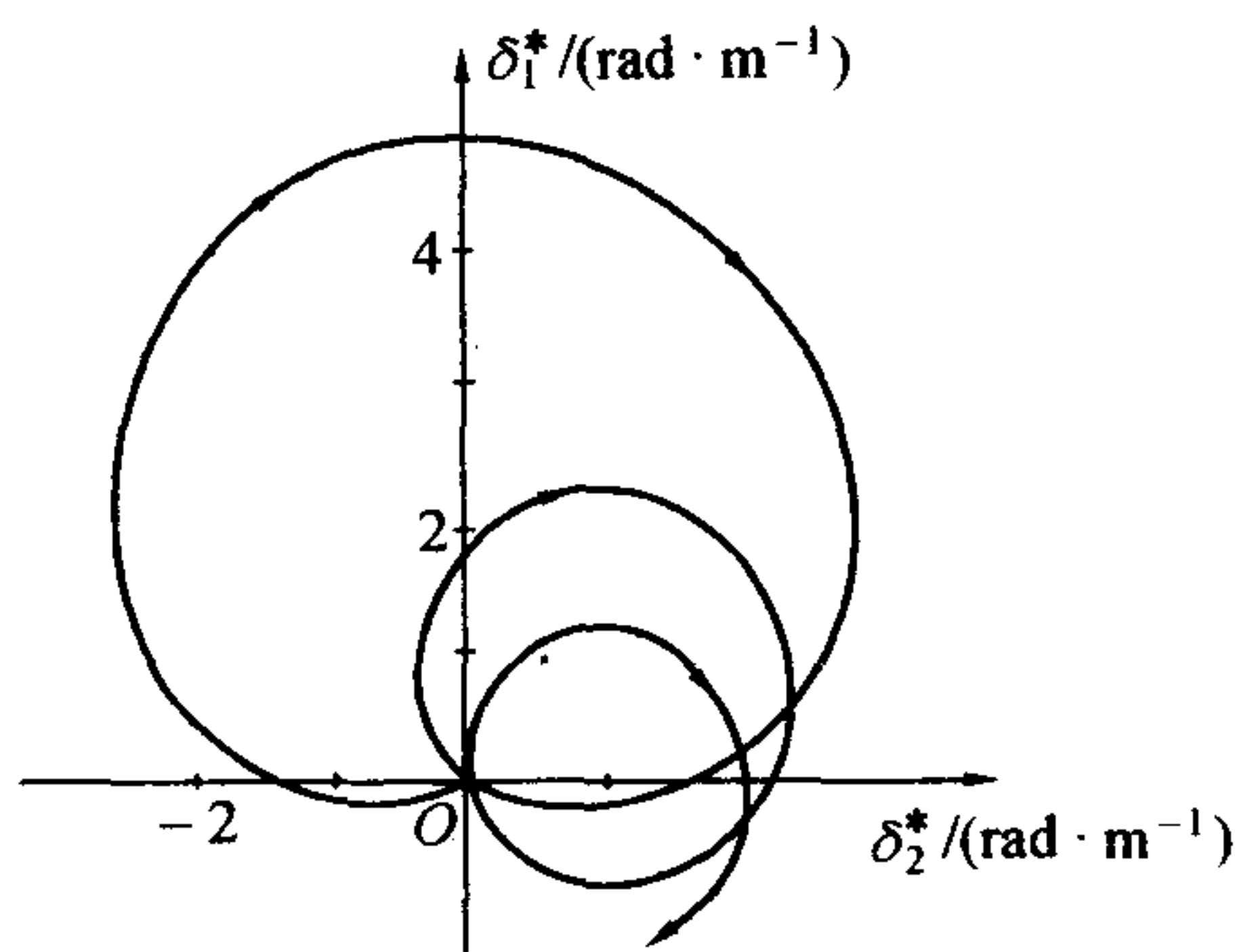


图 10.5  $\Delta_L^*$  曲线

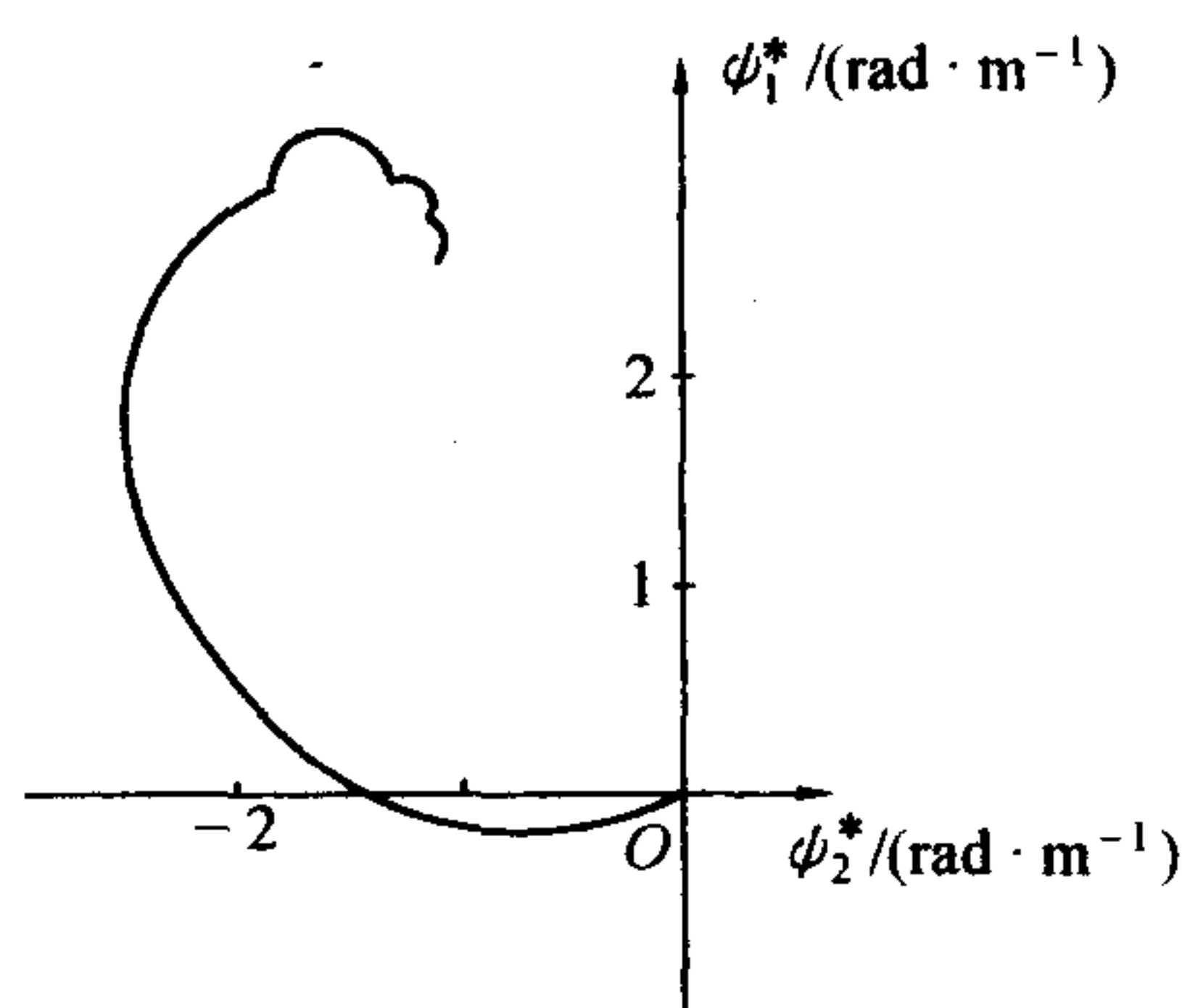


图 10.6  $\Psi_L^*$  曲线

推力偏心引起的角散布为

$$B(\phi_L) = B_L \frac{a_P}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} |\Psi_{\phi_0}^*| \quad (10.34)$$

影响散布的参量仍是  $\Gamma$ 、 $s_0$ 、 $a_P$  及  $n$ 。不能孤立起来看问题,比如当实际滑轨长度一定时,  $v_0$  和  $\dot{\gamma}_0$  便由推力加速度决定。有的资料把  $a_P$  与  $v_0$  及  $\dot{\gamma}_0$  看作互不相干的量,显然要得出错误的结论。如果是火炮助推火箭,情况才会大不一样,其推力加速度便自然与发动机点火处的速度及转速无关。

(1)  $\Gamma$   $\Gamma$  增加,使  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  及等效起始扰动都减小。这是由于自转速度提高,推力矩更快地改变方向,从而使等效起始扰动减小;而  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  随  $\Gamma$  增大而减小的原因,正是陀螺效应增强之故。

(2) 有效滑轨长度  $s_0$  如式(7.79)指出,野战火箭的有效滑轨长度取决于实际滑轨长度。实际滑轨增长时,  $s_0$  增加,  $\dot{\gamma}_0$  和  $v_0$  都增加,使等效起始扰动和  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  都减小,其道理是很明显的。

(3) 推力加速度  $a_P$   $|\Psi_{\phi_0}^*|$  中的  $B$  函数与  $a_P$  无关,因其系数与  $v_0$  成反比,又等效起始扰动与  $v_0$  成反比,故  $B(\phi_L)$  将与  $a_P$  无关。这是由于陀螺力矩与推力偏心矩都与  $a_P$  成正比增加,处于势均力敌的状态之故。



(4) 转动惯量之比  $n$  反映长细比, 弹长增加时,  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  是增加的, 上节已讨论。又式 (10.34)  $B_L/R_A^2$  大致与弹长  $l$  成反比, 说明弹长增加是有利的。这主要是由于弹体惯性增强, 摆动不易, 使等效起始扰动减小之故。总的来讲, 弹长增加会使  $B(\phi_L)$  有所增加。

(5) 参量  $k$  主要体现翻转力矩系数  $m'_z$ ,  $k$  增加, 使  $|\Psi_{\phi_0}^*|$  略减, 故稍有利于  $B(\phi_L)$  的减小。

**例题 10.2** 计算例题 10.2 之火箭由推力偏心引起的落点方向散布。已知  $B_L = 0.75 \times 10^{-3} \text{ m}$

**解** 由式 (10.34)

$$B(\phi_{LK}) = B_L \frac{a_P}{R_A^2 \dot{\gamma}_0} |\Psi_{\phi_0 K}^*| =$$

$$0.75 \times 10^{-3} \frac{557}{0.082 \times 240} \sqrt{0.025^2 + 0.058^2} \text{ rad} = 1.35 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

故

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\phi_{LK})}{\cos \theta_K} = \frac{1.35 \times 10^{-3}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{524}$$

## 10.4 风的影响

### 10.4.1 引言

在第九章中已对尾翼式火箭弹主动段风的影响进行过讨论, 其实质是风产生的附加气动力矩, 使弹轴围绕相对速度方向运动, 相应的法向力将使速度方向偏转, 造成角偏差。涡轮式火箭弹也大致如此。

本节将根据运动的合成原理来推导垂直风  $w_\perp$  所引起的攻角  $\Delta_w$  和偏角  $\Psi_w$ 。如果取一个动坐标系与空气一起以  $w_\perp$  的牵连速度运动, 则在动坐标系内观察火箭的运动时便不再有风; 因假定风速  $w_\perp$  为常量, 此动坐标系乃为惯性参考系。这样, 以前在无风条件下所推导出的公式在此坐标系内完全适用, 不过起始条件得适应动坐标系内的情况。既然火箭弹在动坐标系内的运动是可以解出的, 那么, 若知道了动坐标系与地面坐标系内运动参量之间的关系, 则立即可以求得火箭在地面坐标系内的运动状况。分三个步骤来计算  $\Delta_w$  和  $\Psi_w$ : ① 求两个坐标系内运动参量 ( $\Psi$ 、 $\Phi$ 、 $\Delta$ ) 之间的关系; ② 求动坐标系内攻角和偏角的公式; ③ 求地面坐标系内的攻角和偏角。

### 10.4.2 垂直风引起的攻角和偏角

#### 1. 两坐标系内运动参量间的关系

设  $v_r$  是相对于动坐标系的飞行速度, 动坐标系的速度 (即牵连速度) 就是垂直风速  $w_\perp$ , 则





绝对速度  $v$  为两者之和,即

$$v = v_r + w_{\perp} \quad (10.35)$$

将该式向理想弹道切线和法线方向投影(法线方向的分量用复数表示)

$$\begin{cases} v_{\perp} = v_{r\perp} + w_{\perp} \\ w_{\parallel} = v_{r\parallel} \end{cases} \quad (10.36)$$

式中有脚注“ $\perp$ ”者表示垂直于理想弹道方向的分量;脚注“ $\parallel$ ”表示平行于理想弹道切线方向。

由此在动坐标系内的偏角为

$$\Psi_r \approx \frac{v_{r\perp}}{v_{r\parallel}} = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} - \frac{w_{\perp}}{v_{\parallel}} = \Psi - \frac{w_{\perp}}{v} \quad (10.37)$$

式中,  $\Psi$  是地面坐标系内的偏角。

因动坐标系仅有平移而无转动,两坐标系内的摆动角相等,即(脚注“ $r$ ”均表示动坐标系内的量)

$$\Phi_r = \Phi \quad (10.38)$$

则得

$$\Delta_r = \Phi_r - \Psi_r = \Phi - \Psi + \frac{w_{\perp}}{v}$$

或

$$\Delta_r = \Delta + \frac{w_{\perp}}{v} \quad (10.39)$$

(10.37)、(10.38)、(10.39) 三式就是动坐标系内  $\Psi_r$ 、 $\Phi_r$ 、 $\Delta_r$  与地面坐标系内  $\Psi$ 、 $\Phi$ 、 $\Delta$  之间的关系。

## 2. 动坐标系内的偏差量

本节只考虑垂直风这一个扰动因素。在动坐标系内的初始条件,由式(10.37) 和式(10.38) 知

$$\begin{cases} \Psi_{r0} = -\frac{w_{\perp}}{v_0} \\ \Phi_{r0} = \Phi_{00} = 0 \end{cases} \quad (10.40)$$

这相当于第三类初始条件,于是得

$$\Delta_r = \Psi_{r0} \Delta_{\Psi_0}^* = -\frac{w_{\perp}}{v_0} \Delta_{\Psi_0}^* \quad (10.41)$$

$$\Psi_r = \Psi_{r0} \Psi_{\Psi_0}^* = -\frac{w_{\perp}}{v_0} \Psi_{\Psi_0}^* \quad (10.42)$$

## 3. 地面坐标系内的攻角和偏角公式

由式(10.37) 和式(10.39) 得



$$\Delta = \Delta_r - \frac{w_{\perp}}{v}$$

$$\Psi = \Psi_r + \frac{w_{\perp}}{v}$$

将(10.41)和(10.42)两式代入,得垂直风引起的攻角和偏角

$$\Delta_w = -w_{\perp} \left( \frac{\Delta_{\Psi_0}^*}{v_0} + \frac{1}{v} \right) \quad (10.43)$$

$$\Psi_w = w_{\perp} \left( -\frac{\Psi_{\Psi_0}^*}{v_0} + \frac{1}{v} \right) \quad (10.44)$$

特征函数  $\Delta_w^*$  和  $\Psi_w^*$  为

$$\Delta_w^* = - \left( \frac{\Delta_{\Psi_0}^*}{v_0} + \frac{1}{v} \right) \quad (10.45)$$

$$\Psi_w^* = - \frac{\Psi_{\Psi_0}^*}{v_0} + \frac{1}{v} \quad (10.46)$$

### 10.4.3 $\Delta_w^*$ 和 $\Psi_w^*$ 的特点

图 10.7 和图 10.8 分别给出了  $\Delta_w^*$  和  $\Psi_w^*$  曲线示意图。它们是在垂直于速度方向且向上的垂直风作用下的攻角和偏角变化曲线。此时相对速度将在弹轴的下方, 翻转力矩的矢量方向指向右方。在翻转力矩作用下弹头不仅向上偏转, 而且由于陀螺效应, 并将很快向右偏转, 由此便形成了一条类似拉长的螺线的攻角曲线。尽管攻角曲线不像尾翼弹那样明显地绕相对速度方向变化, 但其大致状态还是围绕其相对速度方向的。如果主动段较长且有效滑轨长度甚小时, 就会看得明显了(见图 10.9)。

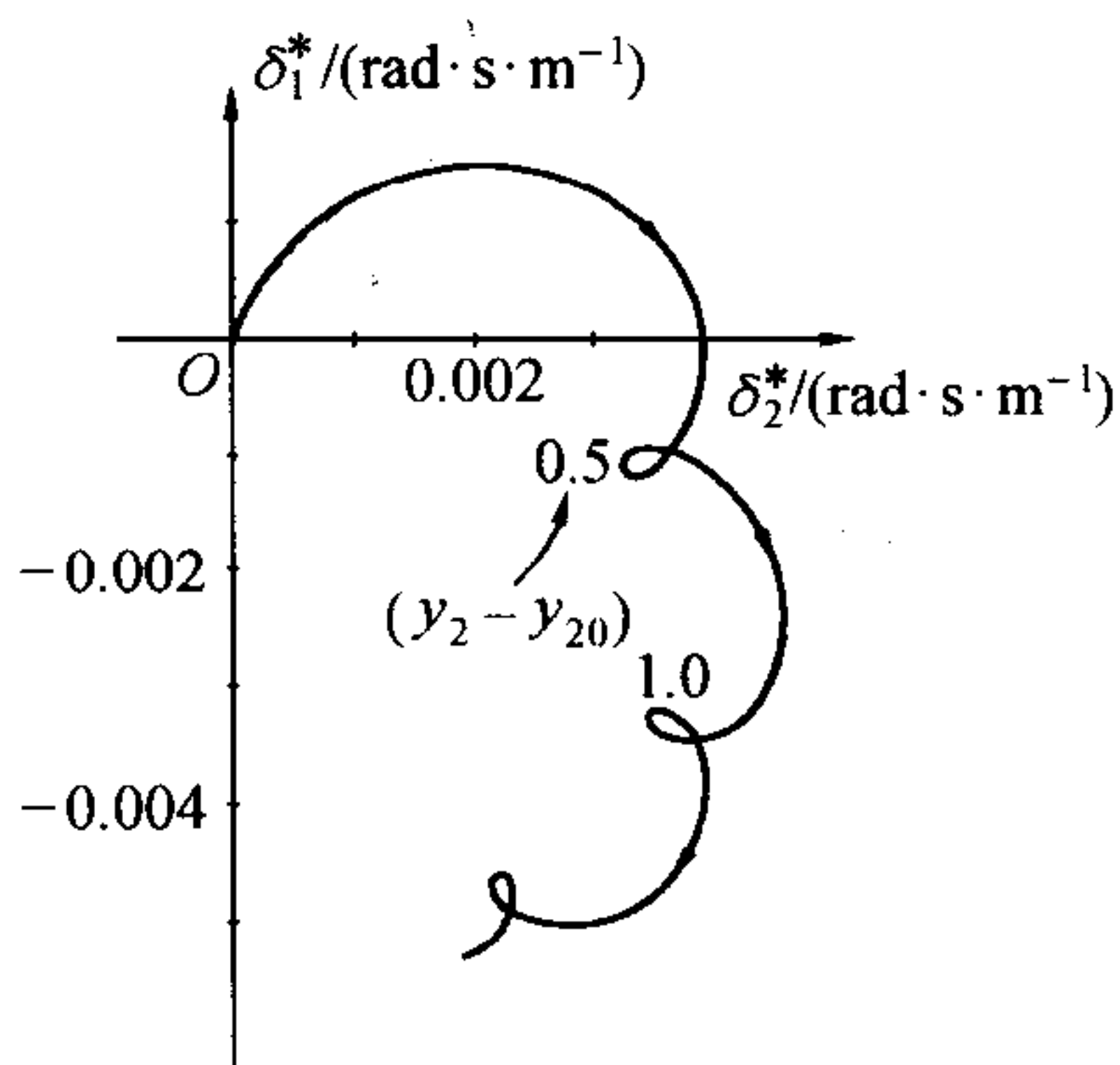


图 10.7  $\Delta_w^*$  曲线

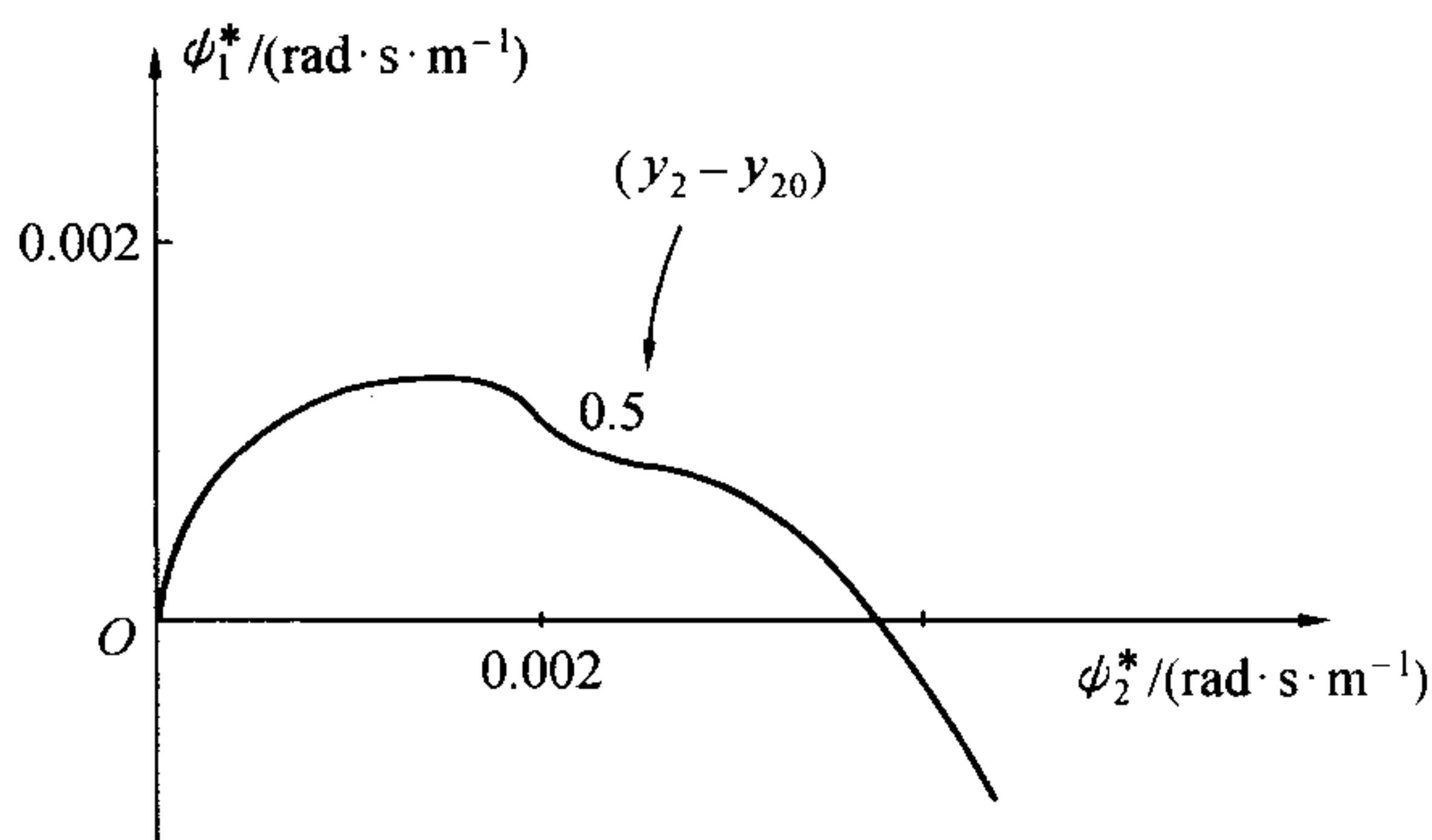
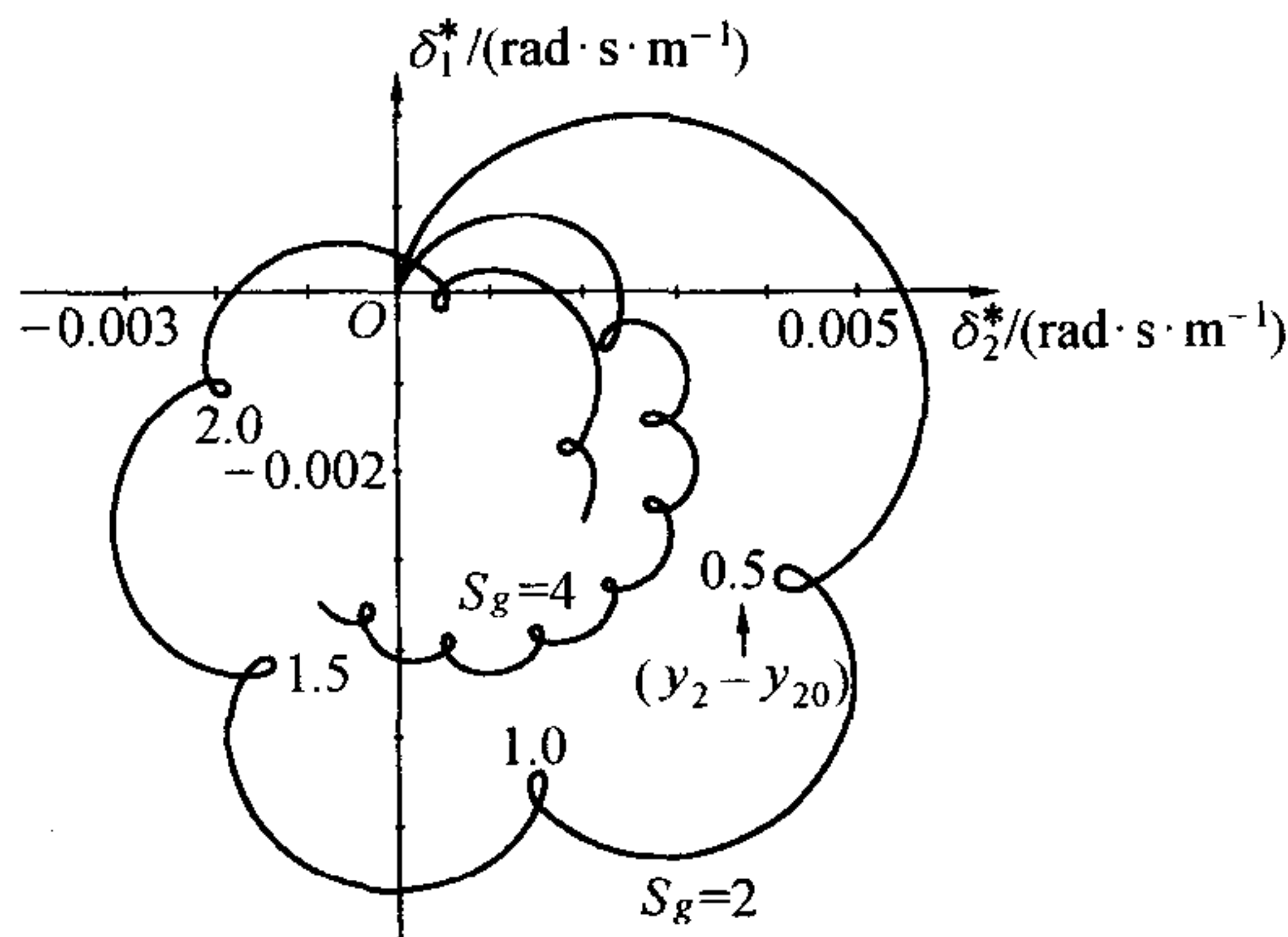
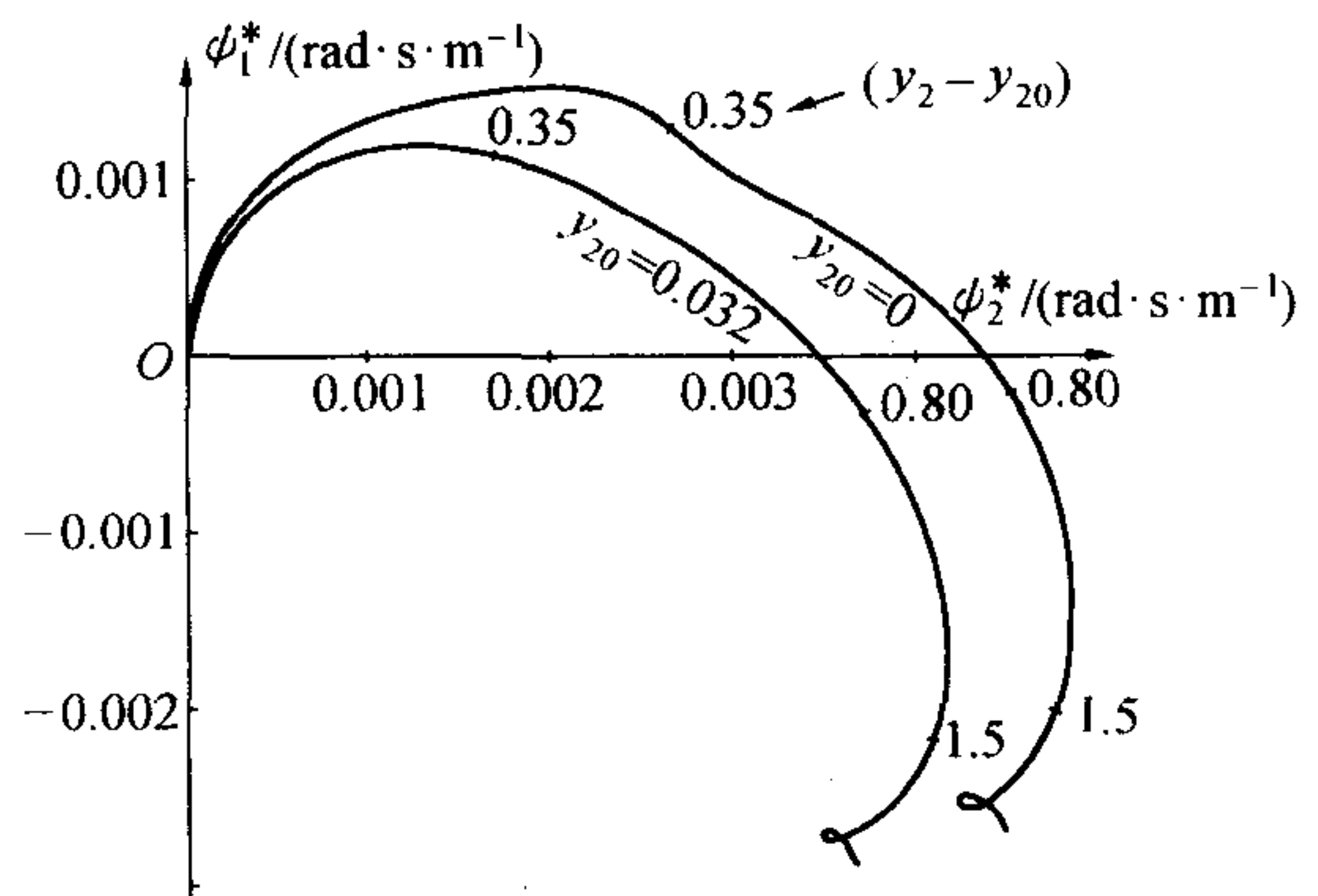


图 10.8  $\Psi_w^*$  曲线



偏角曲线开始向右上方变化,此后朝右下方变化,最后有所扭曲。其变化趋势由式(10.7)确定,但其切线方向不完全与相应点攻角割线平行。由于有垂直风时,空气阻力和升力作用在相对速度  $v_r$  与弹轴构成的平面内,而不是攻角平面内;阻力的垂直分量平行于风速方向,升力的一部分也平行于风速方向,它们都不在攻角  $\Delta$  所在平面内,这就是式(10.7)的第二项。因此总的法向力不完全在攻角平面内,故速度  $v$  就不完全沿攻角平面偏转。但对野战火箭弹道而言,式(10.7)第二项比第一项小得多,故而仍可大致认为攻角割线方向平行于偏角切线方向。关于  $\Psi_w^*$  变化的快慢问题,从图 10.10 易见,在出炮口后第一波长内变化较快,第二波长内仍继续变化,第三波长内的变化就较小了,此后将更小。总的来讲,临界段已失去意义,主动段末的偏角大小与主动段长度有关。

图 10.9  $\Delta_w^*$  曲线(当  $y_{20} = 0$ )图 10.10  $\Psi_w^*$  曲线( $S_g = 2$ )

与尾翼弹明显的不同点是,这里已不一定“逆风偏”。沿风方向上的偏角可正可负,取决于弹道参数。在其他参数一定时,主动段长度起决定作用。若设计中进行参数调整,可以使沿风向的偏角为零,剩下的只是在风向超前  $90^\circ$  的垂直方向上产生偏角。这样,对恒定风进行落点偏差修正是有利的,因为可少一个修正量。

#### 10.4.4 影响偏角的因素

对涡轮式火箭弹的风偏计算,仍为式(9.76)和式(9.77),即

$$\phi_{1w} = -w_x \sin \theta_0 \phi_{1w}^* - w_z \phi_{2w}^* \quad (10.47)$$

$$\phi_{2w} = w_z \phi_{1w}^* - w_x \sin \theta_0 \phi_{2w}^* \quad (10.48)$$

式中,  $\phi_{1w}$  和  $\phi_{2w}$  是式(10.46)的实部和虚部。

角散布公式仍形如(9.78)和(9.79)两式。由于高低和方向散布公式有所区别,按理得分别讨论各因素对其影响。但粗略地说,各因素对  $\Psi_w^*$  幅值的影响,与对其二分量的影响大致是相同的,故而讨论一下对  $|\Psi_w^*|$  的影响因素就行了。这些因素主要是  $\Gamma$ 、 $s_0$ 、 $k_z$ 、 $a_p$  及弹长  $l$  等。





(1)  $\Gamma$  增大  $\Gamma$  可使转速提高, 增强弹轴定向性, 于是风对弹轴运动的干扰作用就减弱了。其变化情况示于图 10.11 中, 纵坐标表示的是  $K$  点的数值。

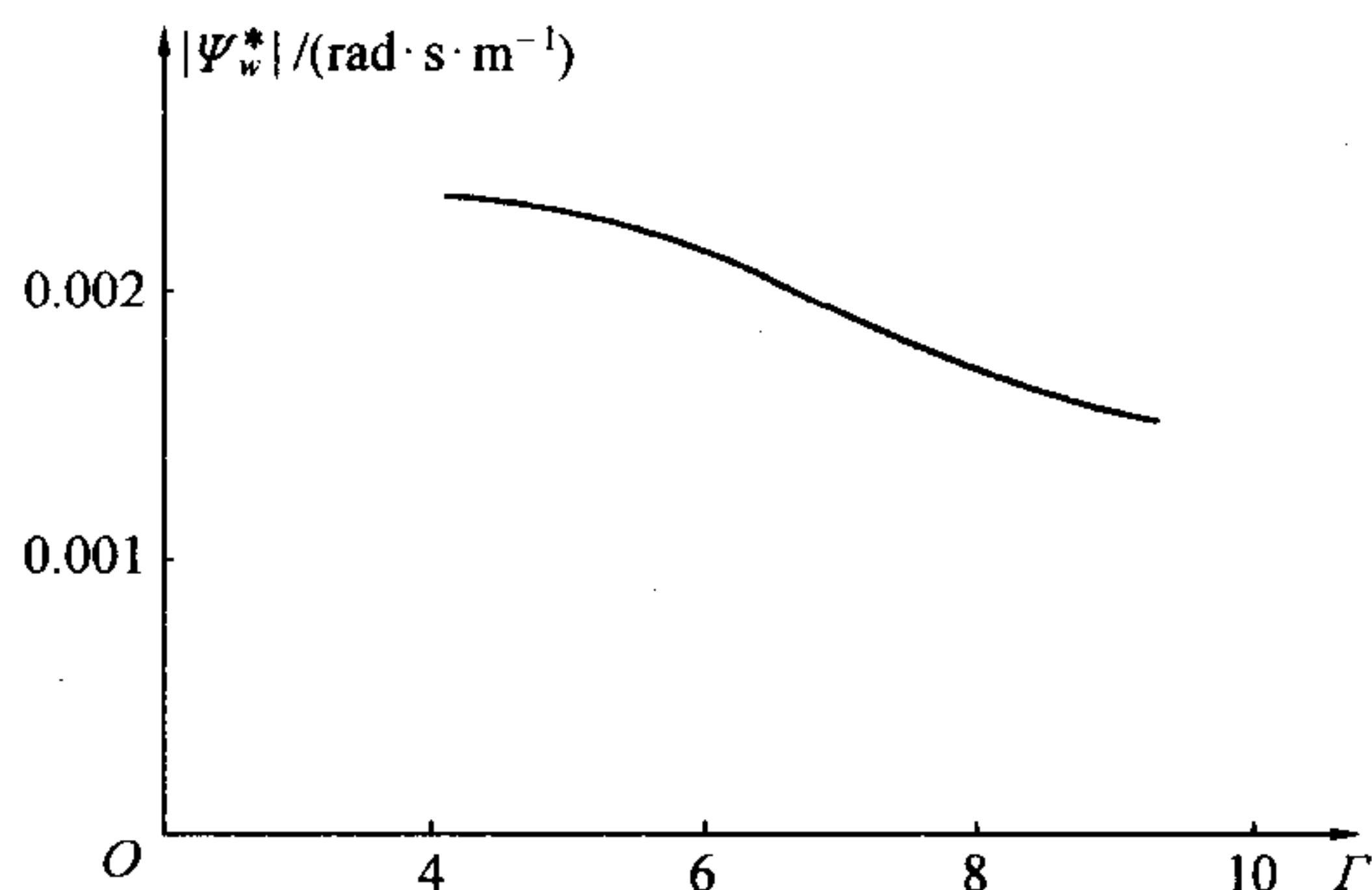


图 10.11  $|\Psi_w^*| - \Gamma$  曲线

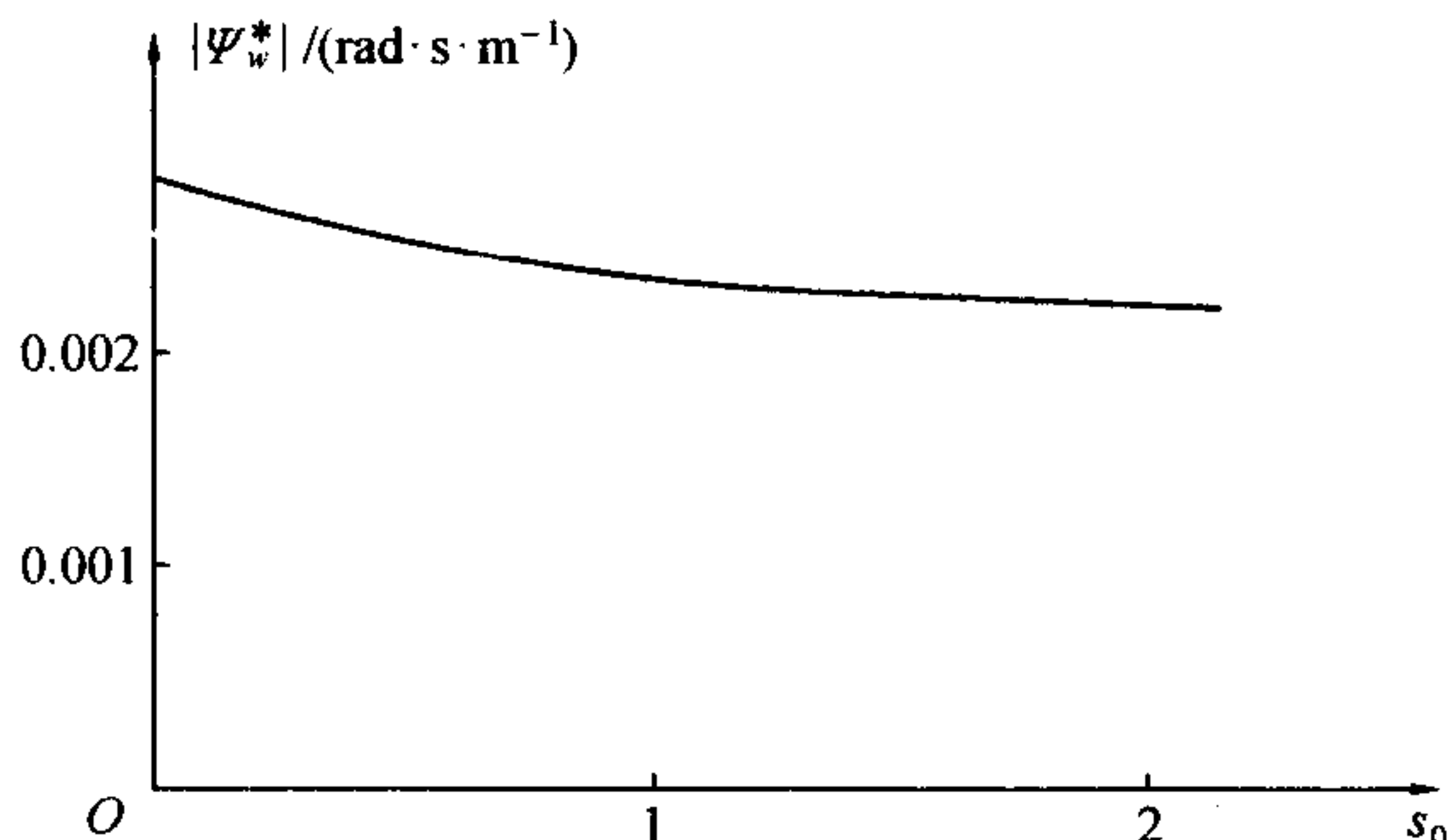


图 10.12  $|\Psi_w^*| - s_0$  曲线

(2)  $s_0$  在其他参量不变时, 增加有效滑轨长度, 就意味着加长滑轨。这可使初速和离轨转速都提高。弹轴的定向性和抗干扰能力增强, 动量也大, 有利于减小偏角。但速度大时风的干扰力矩也大。总的来说,  $|\Psi_w^*|$  随  $s_0$  增大而减小得不很明显(图 10.12), 从图 10.10 的两不同  $\gamma_{20}$  值的偏角也可看出。

(3)  $k$  增加翻转力矩系数, 使  $k$  加大, 稳定因子变小, 风的干扰力矩加大, 从而  $|\Psi_w^*|$  加大。

(4) 推力加速度  $a_p$  加大  $a_p$  也可以提高炮口转速和炮口速度, 使偏角减小。

关于弹长, 计算表明, 它对  $|\Psi_w^*|$  的影响不大。

**例题 10.3** 计算例题 10.1 之火箭主动段由阵风引起的落点方向散布。已知  $B_w = 1.0$  m/s。

**解** 由公式(10.46)

$$\Psi_{wK}^* = -\frac{\Psi_{0K}^*}{v_0} + \frac{1}{v_K} = -\frac{1}{34.0}(0.0934 - 0.0895i) + \frac{1}{390} = (-0.183 + 2.63i) \times 10^{-3}$$

代入公式(9.79)

$$B(\phi_{2wK}) = B_w \sqrt{(\phi_{1wK}^*)^2 + (\phi_{2wK}^* \sin \theta_0)^2} = 1.0 \times 10^{-3} \sqrt{(0.183^2 + 2.63 \times \sin 45^\circ)^2} \text{ rad} = 1.87 \times 10^{-3} \text{ rad}$$



则

$$\frac{B_Z}{X} = \frac{B(\psi_{2wK})}{\cos \theta_K} = \frac{1.87 \times 10^{-3}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{378}$$

## 10.5 动不平衡的影响

在 10.3 节中已讨论过关于推力偏心的等效作用问题,就是当干扰力矩的频率远大于火箭固有摆动频率的条件下,干扰力矩引起的扰动运动基本上表现为自由运动,而强迫运动是可以忽略的。因此高频干扰力矩的作用,就可以看成是某一起始摆动角速度的作用。当干扰力的圆周频率接近自由振动频率时,将会发生共振,而对涡轮式火箭弹来说,这是不大可能的。但当干扰力的圆周频率大于自振频率时,强迫振动的幅值,便随二频率差值的增大而迅速减小,直至远小于自由振动幅值。无论是推力偏心矩或是动不平衡惯性力矩,它们都随火箭一道高速旋转,其圆周频率远大于火箭自由摆动的固有频率,因而高频的强迫运动也是很弱的。

至于动不平衡引起的攻角和偏角,在第九章的 9.7 中没有进行具体推导,这里弥补一下:因为对涡轮式火箭而言,在处理问题的方法上与尾翼式旋转火箭弹是类似的。

采用如 10.3 的格林函数法,知动不平衡引起的攻角为

$$\Delta_{\beta_D} = \int_{u_0}^u \left(1 - \frac{R_C^2}{R_A^2}\right) \beta_D (\dot{\gamma}_n^2 - i\ddot{\gamma}) \exp(i\gamma_n) \Delta_{\phi_0}^*(u_n, u) \frac{du_n}{kv_n} \quad (10.49)$$

将式(10.12)代入,注意改  $u_0$  为  $u_n$ ,得

$$\Delta_{\beta_D} = \left(1 - \frac{R_C^2}{R_A^2}\right) \beta_D \left( - \frac{i}{2kv \sqrt{S_g - 1}} \right) \frac{1}{k} \int_{u_0}^u \frac{(\dot{\gamma}_n^2 - i\ddot{\gamma})}{v_n} \exp[in_\lambda(u_n - u_0)] \times \\ \exp[-b(u - u_n)] \{ \exp[iH_1(u - u_n)] - \exp[iH_2(u - u_n)] \} du_n$$

被积函数中,  $(\dot{\gamma}_n^2 - i\ddot{\gamma})/v_n$  比之被积分的高频函数来,其变化就显得很缓慢,因此可取其炮口值(对总的积分结果影响不大)。于是得

$$\Delta_{\beta_D} = i \left(1 - \frac{R_C^2}{R_A^2}\right) \beta_D \frac{(\dot{\gamma}_0^2 - i\ddot{\gamma})}{kv_0} \left\{ \left( - \frac{i}{2kv \sqrt{S_g - 1}} \right) \exp[-b(u - u_0)] \left[ \frac{1}{n_\lambda - H_1} \exp[iH_1(u - u_0)] - \frac{1}{n_\lambda - H_2} \exp[iH_2(u - u_0)] \right] - \frac{2\sqrt{S_g - 1}}{(n_\lambda - H_1)(n_\lambda - H_2)} \exp[in_\lambda(u - u_0)] \right\} \approx \\ i \left(1 - \frac{R_C^2}{R_A^2}\right) \beta_D \frac{(\dot{\gamma}_0^2 - i\ddot{\gamma})}{kn_\lambda v_0} \Delta_{\phi_0}^*$$

考虑到  $kn_\lambda v_0 = \Gamma v_0 = \dot{\gamma}_0$ ,  $\dot{\gamma}_0^2 \gg \ddot{\gamma}$ , 以及  $n_\lambda \gg H_1$ , 则

$$\Delta_{\beta_D} \approx i \dot{\gamma}_0 \left(1 - \frac{R_C^2}{R_A^2}\right) \beta_D \Delta_{\phi_0}^* \quad (10.50)$$

则得偏角为



$$\Psi_{\beta_D} \approx i\dot{\gamma}_0 \left(1 - \frac{R_C^2}{R_A^2}\right) \beta_D \Psi_{\phi_0}^* \quad (10.51)$$

可见动不平衡的影响相当于一起始摆动角速度  $\dot{\phi}_{\beta_D}$  作用,其值为

$$\dot{\phi}_{\beta_D} = i\dot{\gamma}_0 \left(1 - \frac{R_C^2}{R_A^2}\right) \beta_D \quad (10.52)$$

关于等效起始扰动的概念,已说过多次,这里就不重复了。很明显,动不平衡引起的攻角和偏角的变化规律,与  $\dot{\phi}_0$  引起的攻角和偏角相比,只是简单的旋转与增缩关系。将  $\Delta_{\phi_0}^*$  和  $\Psi_{\phi_0}^*$  顺时针方向旋转  $90^\circ$ ,再乘上一个倍数  $(1 - R_C^2/R_A^2)\dot{\gamma}_0$ ,便得到  $\beta_D$  引起攻角和偏角的特征函数  $\Delta_{\beta_D}^*$  和  $\Psi_{\beta_D}^*$ 。图 10.14 和图 10.15 是精确计算结果,与图 10.1 和图 10.4 相比,证明了上述结论的正确性。

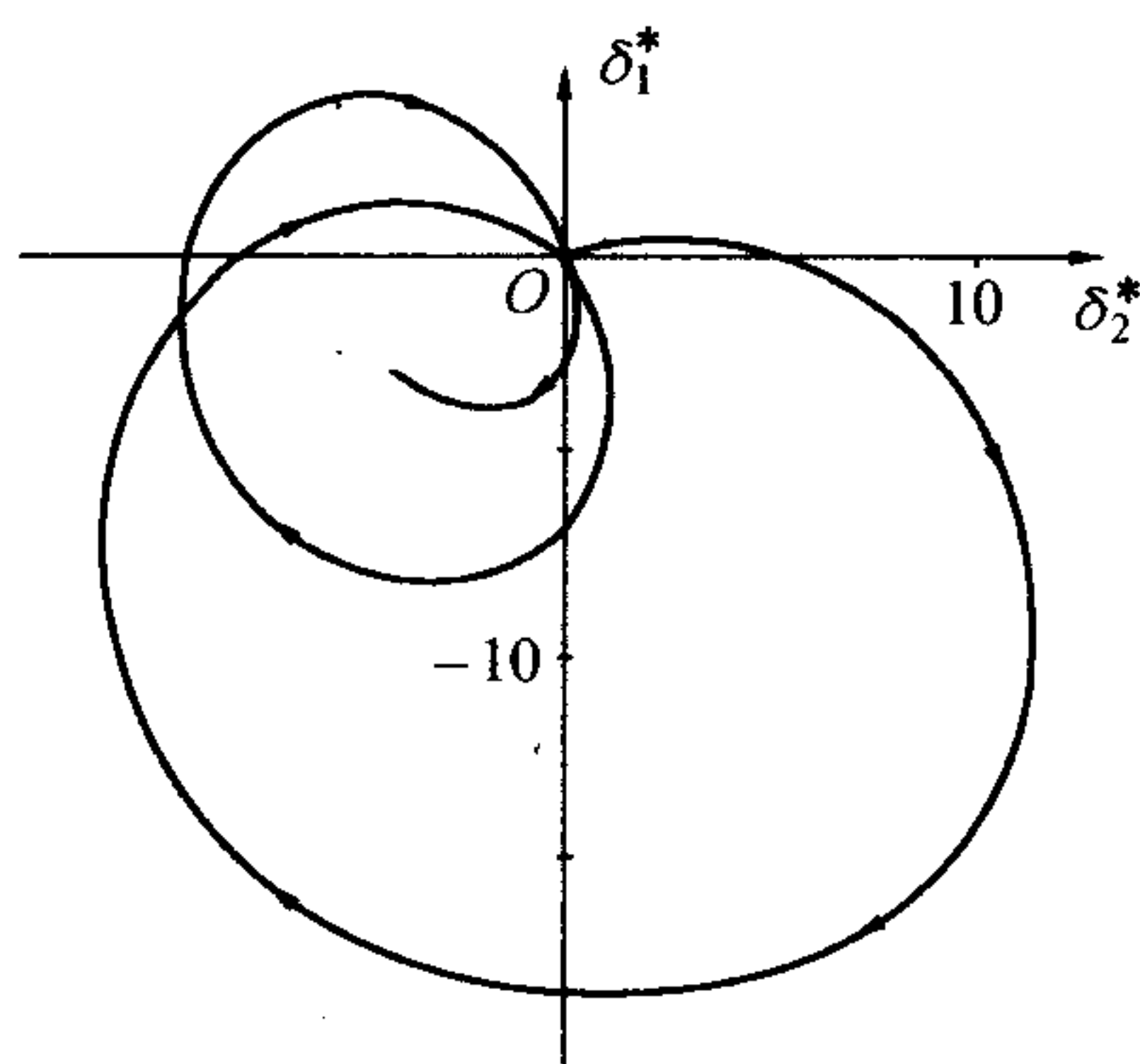


图 10.14  $\Delta_{\beta_D}^*$  曲线

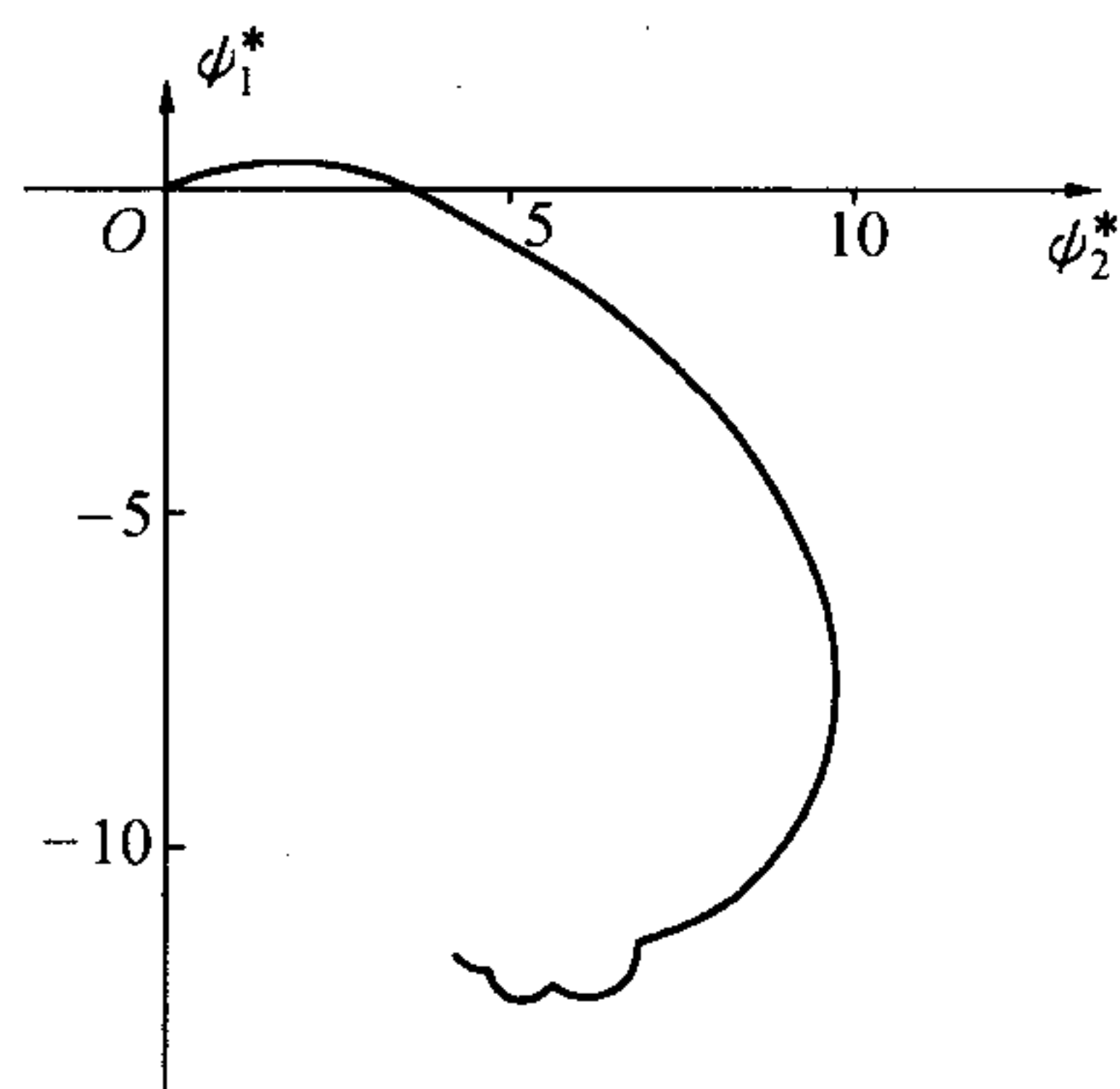


图 10.15  $\Psi_{\beta_D}^*$  曲线

$\beta_D$  引起的角散布为

$$B(\phi_{\beta_D}) = B_{\beta_D} \left(1 - \frac{R_C^2}{R_A^2}\right) \dot{\gamma}_0 |\Psi_{\phi_0}^*| \quad (10.53)$$

影响  $B(\phi_{\beta_D})$  的因素有  $\Gamma$ 、 $n$ 、 $s_0$ 、 $\alpha_P$ 、 $k_Z$ 。为了清楚起见,将式(10.16)代入式(10.53),得(注意  $\dot{\gamma}_0 = \Gamma v_0$ )

$$B(\phi_{\beta_D}) = B_{\beta_D} \left(1 - \frac{R_C^2}{R_A^2}\right) \frac{C_3 \Gamma}{2k \sqrt{S_g - 1}} |B(H_1 u_0, H_1 u) - B(H_2 u_0, H_2 u)| \quad (10.54)$$

式中,  $|B(H_1 u_0, H_1 u) - B(H_2 u_0, H_2 u)|$  与  $u_0$  的关系,大致如图 10.16 所示。另外,如曾介绍的式(7.79),认为推力加速度的增减对有效滑轨长无影响,而且稳定因子  $S_g$  对  $\Psi_{\phi_0}^*$  影响很小,由此有如下结论:





- (1)  $\Gamma$   $\Gamma$  增大,  $B(\phi_{\beta_D})$  加大;  
 (2)  $n$   $B(\phi_{\beta_D})$  随  $n$  增加而加大;  
 (3)  $k$   $B(\phi_{\beta_D})$  随  $k$  增加而减小。因  $|\Phi_{\beta_D}|$  与  $k$  无关, 而  $|\Psi_{\Phi_0}^*|$  是  $k$  的减函数;  
 (4)  $s_0$   $s_0$  取决于定向器长度,  $B(\phi_{\beta_D})$  与  $s_0$  的关系曲线如图 10.16 的曲线型;  
 (5)  $\alpha_P$   $\alpha_P$  对  $B(\phi_{\beta_D})$  无什么影响。

**例题 10.4** 计算例题 10.1 之火箭由动不平衡引起的方向散布。已知  $B_{\beta_D} = 0.30 \times 10^{-3} \text{ rad}$ 。

**解** 由公式(10.53)

$$\begin{aligned}
 B(\phi_{\beta_D K}) &= B_{\beta_D} \left( 1 - \frac{R_C^2}{R_A^2} \right) \dot{\gamma}_0 |\Psi_{\Phi_0 K}^*| = \\
 &= 0.30 \times 10^{-3} \times \left( 1 - \frac{0.0025}{0.082} \right) \times 240 \times \sqrt{40.7} \times 10^{-2} \text{ rad} = \\
 &= 4.45 \times 10^{-3} \text{ rad} \\
 \frac{B_Z}{X} &= \frac{B(\phi_{\beta_D K})}{\cos \theta_K} = \frac{4.45 \times 10^{-3}}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{159}
 \end{aligned}$$

可见对涡轮式火箭弹的动不平衡, 要引起足够重视。

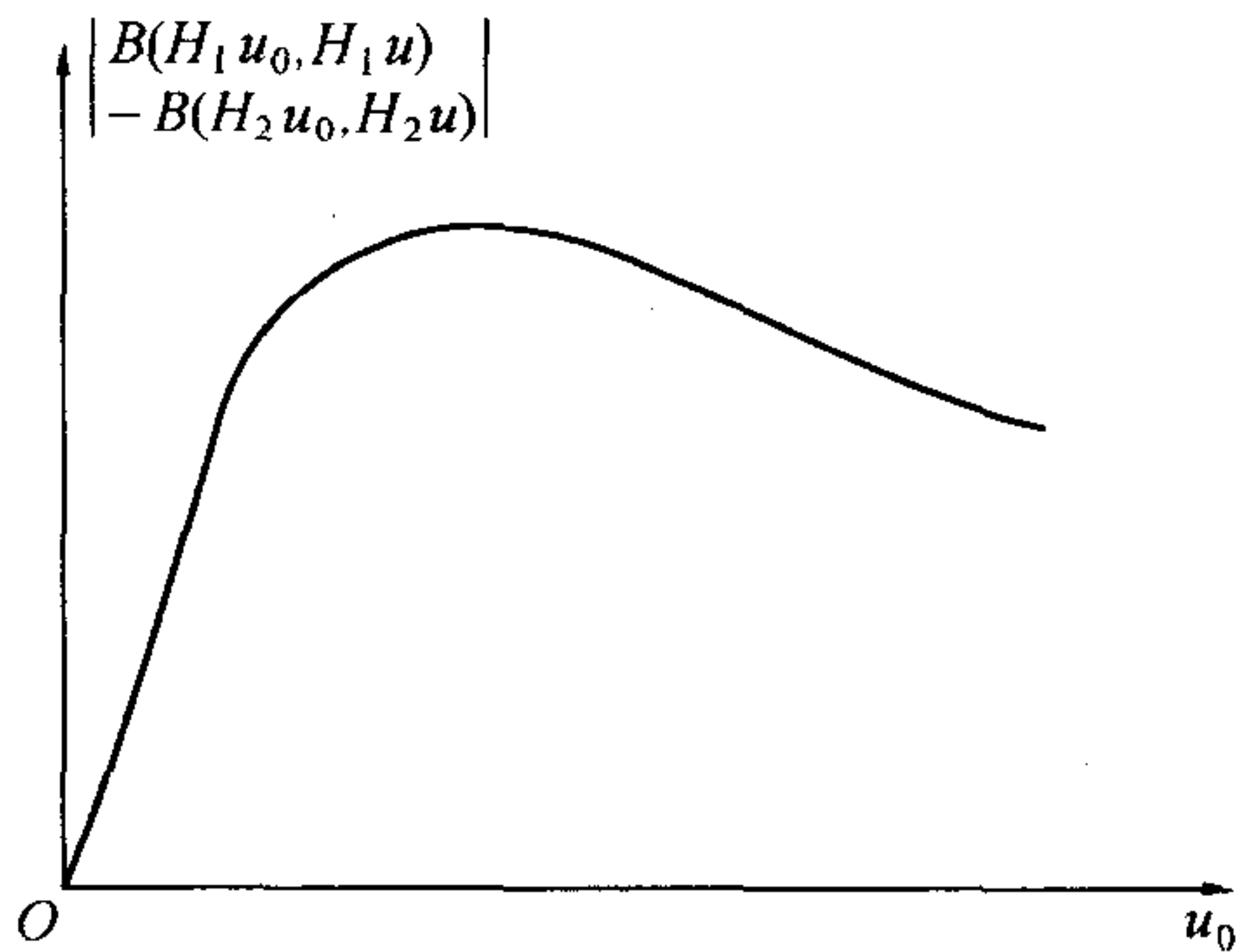


图 10.16 特殊曲线

## 10.6 散布小结

根据本章例题, 计算结果如下:

$$B(\phi_{\Phi_0 K}) = 3.19 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$B(\phi_{LK}) = 1.35 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$B(\phi_{wK}) = 1.87 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$B(\phi_{\beta_D K}) = 4.45 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

由此可知它们在总散布中各自所处的地位。

各有关参量对几个散布量的影响列于表 10.1。读者可将表 10.1 与表 9.1 作一比较, 并找出异同点, 分析各自变化趋势的原因。

关于各参数的最佳值, 可根据式(9.88)作曲线确定。

表 10.1 各参量对散布的影响趋势

参 量 \ 变 化 散 布	$B(\phi_0)$	$B(\phi_L)$	$B(\phi_w)$	$B(\phi_{\beta_D})$
$\Gamma$ ↑	↑	↓	↓	↑
$(n \text{ 或 } l/d)$ ↑	↑	↑	影响小	↑
$s_0$ (或定向器长) ↑	↑	↓	↓	小 $s_0$ ↑ 大 $s_0$ ↓
$k$ (或 $m'_z$ ) ↑	↓	↓	↑	↓
$a_p$ ↑	-	-	↓	-

符号说明：↑ 表示增加；↓ 表示下降；- 表示无关；↑ 表示略有增加；↓ 表示略有下降。

# 第十一章 发射过程——起始扰动计算

## 11.1 前言

在绪论中曾指出,火箭在后定心部脱离炮口前,按照其受力状况不同,已经经历了两个阶段,即约束期和半约束期。起始扰动是自由期运动的初始条件,它对散布计算,以及修正理论中的偏流计算都是很重要的。在引起散布的各主要扰动因素中,推力偏心、动不平衡是属于弹体和发动机性能测量问题,风是气象测量问题;但起始扰动则是火箭运动状态及定向器性能所决定,因此外弹道学也要研究这个问题。起始扰动又分为随机的和非随机的两部分。前者形成的因素很多,主要有滑轨振动、质量分布不均引起的动、静不平衡。此外,还有滑轨波纹度、弹炮间隙、推力偏心等等。非随机的起始扰动主要由重力矩引起,这是理想弹道计算中没有考虑的,它会形成落点的系统性偏差。起始扰动主要在半约束期形成,在约束期结束时的运动参数,将作为半约束期运动的初始条件。

鉴于起始扰动对散布有重要影响,因而对它的研究工作就显得非常重要。只有弄清了各扰动因素及与弹、炮结构有关的因素对起始扰动的影响规律,在设计中才能合理地选取最佳方案。目前对这个问题的研究已卓有成效<sup>[2,4,29]</sup>,本章仅介绍一些初步知识。

## 11.2 在半约束期内旋转火箭弹的扰动方程

在半约束期内,定向器(滑轨)将有约束力  $F_R$  作用于后定心部上,这个力  $F_R$  的大小和方向都很难确定。为了在运动方程中不出现这一约束力,最好将后定心部中心  $R$  作为原点来研究弹轴运动。如此把平动坐标系的原点选在  $R$  点上,  $F_R$  对以  $R$  为基点的转动来说,其力矩为零。

按第八章方法,可导出类似式(8.112)的弹轴转动方程为

$$A_R \ddot{\Phi} - iC\dot{\gamma} \Phi = f + (A - C)\beta_D(\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})\exp(i\gamma) + (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})ml_R L_m \exp(i\gamma) \quad (11.1)$$

式中

$$L_m = L_{m1} + iL_{m2} \quad (11.2)$$

为质量偏心矢量(或静不平衡矢量),  $L_{m1}$  和  $L_{m2}$  是其在弹体坐标系内的二分量。它所在的项就是它引起离心惯性力矩和切向惯性力矩的等效力,式中,  $l_R$  是  $R$  到质心距离,见图 11.1(图中对定心部高度及摆动角  $\Phi$  作了夸大)。

方程(11.1)与式(8.112)比起来,有两个不同点:(1) 由于坐标系原点选在后定心部中心





$R$ , 因而赤道转动惯量  $A_R$  是对通过  $R$  点的横轴来计量的, 并根据平行轴定理有

$$A_R = A + ml_R^2 \quad (11.3)$$

(2) 由于所取平动坐标系不是惯性参考系(因火箭在加速运动), 在此坐标系内研究火箭运动时应该在质心加上由于坐标系的加速平动而产生的惯性力, 这一惯性力对原点  $R$  的力矩必须加以考虑(自由期原点在质心, 此力矩为零), 故而在  $f$  中应包括此力矩的等效力。

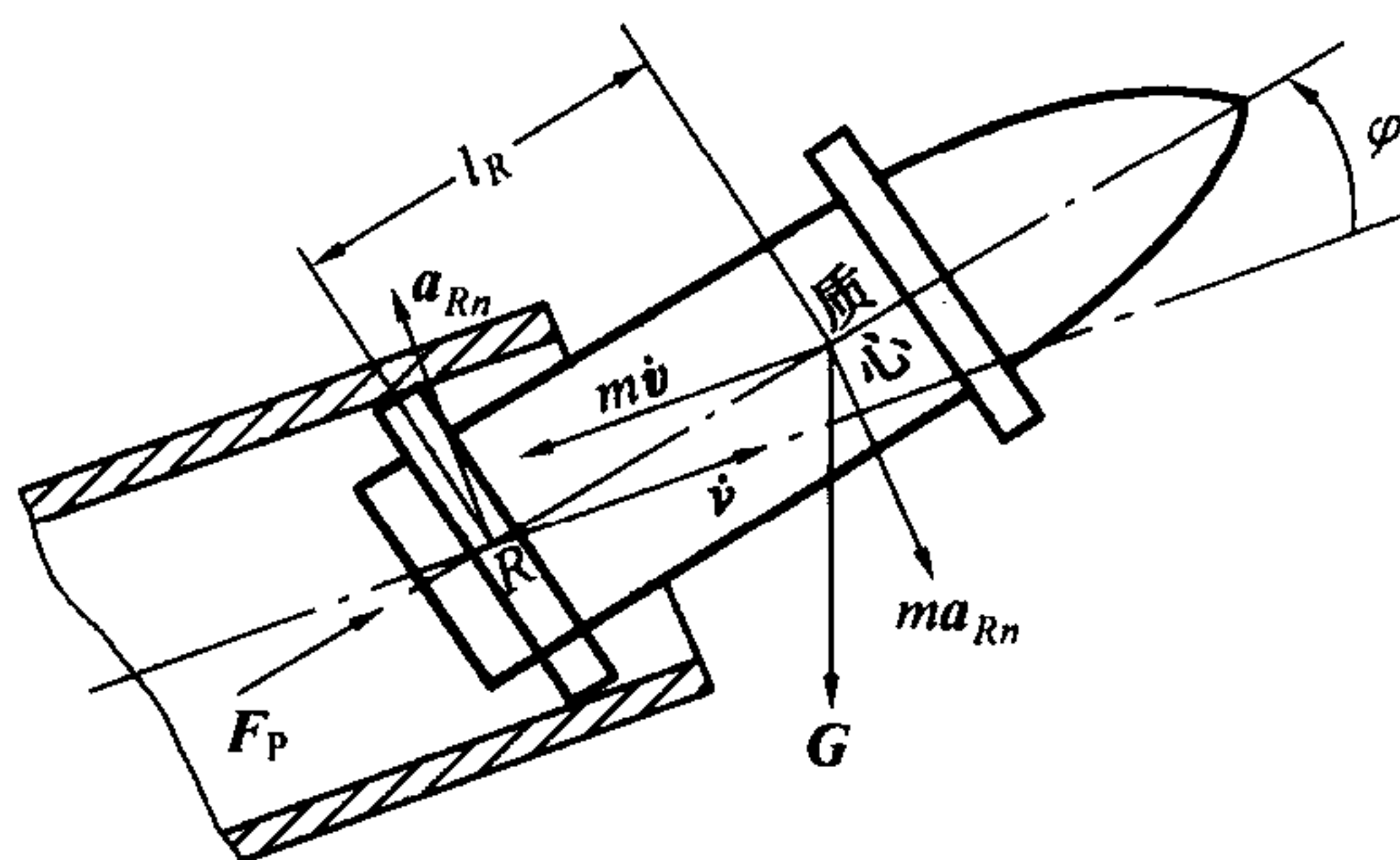


图 11.1 火箭在半约束期内的运动

应该指出, 在建立方程(11.1)时, 并没有考虑  $R$  点相对滑轨的横向运动, 也就是没有弹、炮间隙。有间隙存在下的更一般性扰动运动方程, 本章再作一些介绍。

火箭所受外力矩的等效力  $f$  中, 应该包含重力和  $R$  点的纵向加速度  $\dot{v}$  与横向加速度  $a_{Rn}$  引起的惯性力矩所相应的等效力。从图 11.1 看出, 纵向惯性力矩的等效力为  $m\dot{v}l_R\Phi$ , 若再考虑质量偏心, 则为

$$m\dot{v}[l_R\Phi + L_m \exp(i\gamma)] \approx ma_P[l_R\Phi + L_m \exp(i\gamma)]$$

横向惯性力矩的等效力为

$$- ml_R a_{Rn}$$

重力矩的等效力为

$$- mgl_R \cos\theta_0$$

于是式(11.1)为

$$A_R \ddot{\Phi} - iC\dot{\gamma} \dot{\Phi} - ma_P l_R \Phi = (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})[(A - C)\beta_D + ml_R L_m] \exp(i\gamma) + ma_P L_m \exp(i\gamma) - ma_{Rn} l_R - mgl_R \cos\theta_0 \quad (11.4)$$

式中,  $ma_P L_m \exp(i\gamma)$  和  $iC\dot{\gamma} \dot{\Phi}$  两项的数值远小于其他各项,  $ma_P l_R \Phi$  一项也比较小, 在计算散布时可将其忽略不计, 这样带来的误差约在 5% 以内。因而在散布计算中可写为下列方程

$$A_R \ddot{\Phi} = (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})[(A - C)\beta_D + ml_R L_m] \exp(i\gamma) - ma_{Rn} l_R - mgl_R \cos\theta_0 \quad (11.5)$$

### 11.3 质量分布不均衡引起的起始扰动

方程(11.5)是线性的。等号右边两项可以分别单独进行研究。当只计及质量分布不均衡时, 有

$$A_R \ddot{\Phi} = (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})[(A - C)\beta_D + ml_R L_m] \exp(i\gamma) \quad (11.6)$$



将  $\dot{\gamma}$  和  $\gamma$  以  $\ddot{\gamma}$  表示之, 并将上式两端各除以  $A_R$ , 则

$$\ddot{\Phi} = (\ddot{\gamma}^2 t^2 - i\ddot{\gamma}) \left( \frac{R_A^2 - R_C^2}{R_R^2} \beta_D + \frac{l_R}{R_R^2} L_m \right) \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t^2\right) \quad (11.7)$$

其中

$$R_R^2 = R_A^2 + l_R^2 \quad (11.8)$$

对式(11.7) 积分一次得火箭后定心部离轨时的摆动角速度

$$\dot{\Phi}_0 = \dot{\Phi}_F + \left( \frac{R_A^2 - R_C^2}{R_R^2} \beta_D + \frac{l_R}{R_R^2} L_m \right) \int_{t_F}^{t_0} (\ddot{\gamma}^2 t^2 - i\ddot{\gamma}) \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t^2\right) dt \quad (11.9)$$

式中,  $t_F$  是前定心部脱离定向器时的时间,  $\dot{\Phi}_F$  为  $t_F$  瞬时的  $\dot{\Phi}$  值, 上式中的积分

$$\begin{aligned} \int_{t_F}^{t_0} (\ddot{\gamma}^2 t^2 - i\ddot{\gamma}) \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t^2\right) dt &= \\ &= -i\ddot{\gamma} \left[ t \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t^2\right) \Big|_{t_F}^{t_0} - \int_{t_F}^{t_0} \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t^2\right) dt \right] - i\ddot{\gamma} \int_{t_F}^{t_0} \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t^2\right) dt = \\ &= i\ddot{\gamma} \left[ t_F \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t_F^2\right) - t_0 \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t_0^2\right) \right] = \\ &= i\ddot{\gamma} \left\{ t_F - t_0 \exp\left[i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} (t_0^2 - t_F^2)\right] \right\} \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t_F^2\right) \end{aligned} \quad (11.10)$$

在半约束期结束, 即火箭后定心部离轨时 ( $t = t_0$ ) 火箭移动的距离  $s_{00} = a_P t_0^2 / 2$ , 而前定心部离轨时火箭移动的距离  $s_F = a_P t_F^2 / 2$ , 注意到  $s_{00} - s_F = l_B$  (前后定心部之间的距离), 于是有

$$\begin{aligned} \frac{t_F}{t_0} &= \sqrt{\frac{s_F}{s_{00}}} = \sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} \\ \frac{1}{2} \ddot{\gamma} (t_0^2 - t_F^2) &= \frac{\ddot{\gamma}}{a_P} l_B = \Gamma l_B \end{aligned} \quad (11.11)$$

则积分式(11.10) 之值为

$$i\ddot{\gamma} t_0 \left[ \frac{t_F}{t_0} - \exp(i\Gamma l_B) \right] \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t_F^2\right) = i\dot{\gamma}_0 \left[ \sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} - \exp(i\Gamma l_B) \right] \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t_F^2\right)$$

由于不考虑滑轨振动和弹炮间瞬时, 其  $\dot{\Phi}_F = 0$ , 故式(11.9) 得

$$\dot{\Phi}_0 = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{R_A^2 - R_C^2}{R_R^2} \beta_D + \frac{l_R}{R_R^2} L_m \right) \left[ \sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} - \exp(i\Gamma l_B) \right] i \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t_F^2\right) = \dot{\Phi}_{0\beta_D} + \dot{\Phi}_{0L_m} \quad (11.12)$$

其中

$$\dot{\Phi}_{0\beta_D} = \beta_D \dot{\gamma}_0 \left( \frac{R_A^2 - R_C^2}{R_R^2} \right) \left[ \sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} - \exp(i\Gamma l_B) \right] i \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t_F^2\right) \quad (11.13)$$

$$\dot{\Phi}_{0L_m} = L_m \dot{\gamma}_0 \frac{l_R}{R_R^2} \left[ \sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} - \exp(i\Gamma l_B) \right] i \exp\left(i \frac{1}{2} \ddot{\gamma} t_F^2\right) \quad (11.14)$$

将(11.13) 和(11.14) 两式取绝对值, 并设  $|\beta_D|$  和  $|L_m|$  是瑞利分布(在圆周上均匀分布), 则



其投影为正态分布,并且中间误差为  $B(\beta_D)$  和  $B(L_m)$ ,于是得  $\beta_D$  和  $L_m$  引起的起始扰动中间误差为

$$B(\dot{\varphi}_{0\beta_D}) = B(\beta_D) \dot{\gamma}_0 \frac{R_A^2 - R_C^2}{R_R^2} \left[ \left( 1 - \frac{l_B}{s_{00}} \right) - 2 \sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} \cos \Gamma l_B + 1 \right]^{1/2} \quad (11.15)$$

$$B(\dot{\varphi}_{0L_m}) = B(L_m) \frac{l_R}{R_A^2 - R_C^2} \frac{B(\dot{\varphi}_{0\beta_D})}{B(\beta_D)} \quad (11.16)$$

至于起始偏角  $\Psi_0$ ,可由下式计算

$$\Psi_0 = \frac{\dot{\Phi}_0 l_R + L_m \exp(i\gamma_0) i \dot{\gamma}_0}{v_0} \quad (11.17)$$

为了求出  $\Phi_0$ ,只需将  $\Phi$  再积分一次便得。由于  $\Phi_0$ 、 $\Psi_0$  引起的落点散布甚小,故这里不详细推导了。

**例题 11.1** 计算涡轮式火箭 I 由于质量分布不均衡性所引起的起始扰动  $B_{\dot{\varphi}_0}$ 。设  $B(\beta_D) = 0.30 \times 10^{-3}$  rad,  $B(L_m) = 0.10 \times 10^{-3}$  m,  $l_R = 0.406$  m,  $R_A^2 = 0.082$  m<sup>2</sup>,  $R_R^2 = 0.246$  m<sup>2</sup>,  $R_C^2 = 0.0025$  m<sup>2</sup>,  $l_B = 0.434$  m,  $s_{00} = 1.04$  m,  $\Gamma = 7.06$  rad/m,  $\dot{\gamma}_0 = 240$  rad/s。

解

$$\Gamma l_B = 7.06 \times 0.434 = 3.07$$

$$\cos \Gamma l_B = -0.990$$

$$\sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} = \sqrt{1 - \frac{0.434}{1.04}} = 0.764$$

由式(11.15)

$$\begin{aligned} B(\dot{\varphi}_{0\beta_D}) &= B(\beta_D) \dot{\gamma}_0 \frac{R_A^2 - R_C^2}{R_R^2} \left[ \left( 1 - \frac{l_B}{s_{00}} \right) - 2 \sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} \cos \Gamma l_B + 1 \right]^{1/2} = \\ &= 0.30 \times 10^{-3} \times 240 \times \frac{0.082 - 0.0025}{0.246} \times (0.764^2 + 2 \times 0.764 \times 0.990 + 1)^{1/2} = \\ &= 0.041 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

由式(11.16)

$$B(\dot{\varphi}_{0L_m}) = 0.10 \times 10^{-3} \times \frac{0.406}{0.082 - 0.0025} \times \frac{0.041}{0.30 \times 10^{-3}} = 0.069 \text{ rad/s}$$

$B(\dot{\varphi}_{0\beta_D})$  与  $B(\dot{\varphi}_{0L_m})$  合起来得

$$B_{\dot{\varphi}_0} = \sqrt{B^2(\dot{\varphi}_{0\beta_D}) + B^2(\dot{\varphi}_{0L_m})} = \sqrt{0.041^2 + 0.069^2} = 0.080 \text{ rad/s}$$

可见这个数值是不小的。质量偏心对主动段内的运动影响可忽略,但是它对起始扰动的影响则是不能忽略的!本节内容将为限制  $B(\beta_D)$  和  $B(L_m)$  提供了数量上的依据。





## 11.4 定向器振动所引起的起始扰动

这里首先仅考虑垂直于射击平面的横向振动,由式(11.5)知

$$A_R \ddot{\varphi} = -m l_R a_{Rn}$$

式中,省略了  $\varphi$  和  $a_{Rn}$  的脚注“2”。上式可写为

$$\ddot{\varphi} = -\frac{l_R}{R_R^2} a_{Rn} \quad (11.18)$$

式中,  $a_{Rn}$  是定心部中心  $R$  点的横向加速度。

将式(11.18)积分一次得

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{l_R}{R_R^2} (v_{RnF} - v_{Rn0}) + \dot{\varphi}_F \quad (11.19)$$

式中  $v_{RnF}$ ——前定心部离轨时,  $R$  点的横向速度;  
 $v_{Rn0}$ ——后定心部离轨时,  $R$  点的横向速度;  
 $\dot{\varphi}_F$ ——前定心部离轨时,弹轴的摆动角速度。

定向器的振动规律,目前有待进一步研究,还没有一个通用公式可循。这里将以试验测定为基础进行研究。如图 11.2 所示,  $ox'$  与射向平行,  $x'oz$  为一固定坐标系,表示未发射火箭前,过定向器轴线并且与射击面垂直的平面,只考虑定向器在该平面内的横向振动。在任意时刻  $t$ , 定向器位置如图中所示。 $M$  点为定向器端面中心,  $N$  点为选定一确定点,它到  $M$  点的距离  $MN$  大致等于前后定心部距离  $l_B$ 。在  $t$  时刻,火箭后定心部在  $R$  点位置,  $M$ 、 $N$ 、 $R$  的横向位移分别为  $z_M$ 、 $z_N$ 、 $z_R$ , 而  $z_M$  和  $z_N$  是可用仪器测出的。定向器轴线与基准轴  $x'$  的夹角为  $\beta$ , 且

$$\beta = \frac{z_M - z_N}{MN} \quad (11.20)$$

于是

$$z_R = z_M - (s_{00} - s) \sin \beta \approx z_M - (s_{00} - s) \beta$$

式中,  $s_{00}$  是后定心部从起点  $R_0$  到脱离炮口的全行程,亦为实际滑轨长度。

由上式

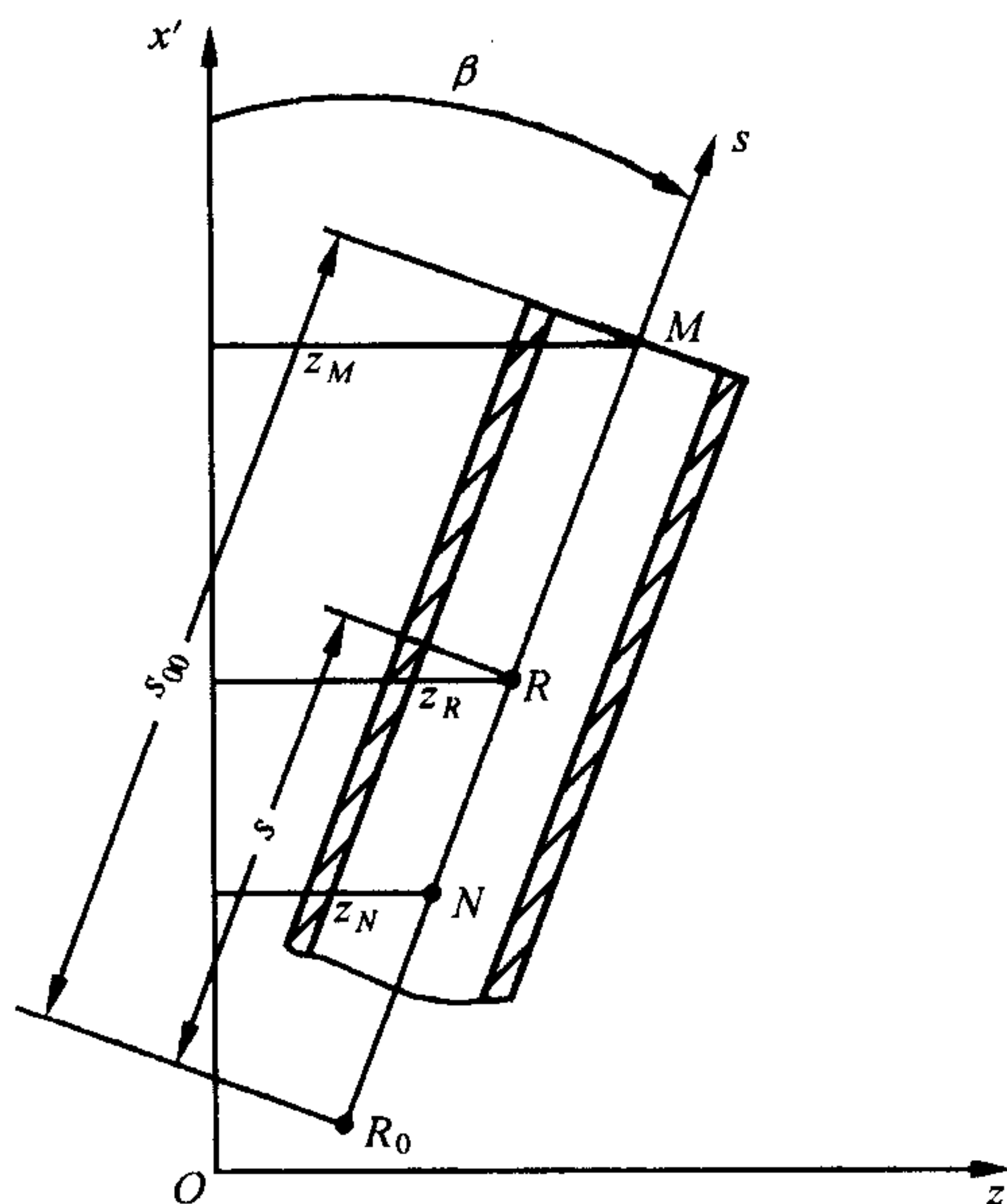


图 11.2 定向器的横向运动



$$\dot{z}_R = \dot{z}_M - (s_{00} - s)\dot{\beta} + \dot{s}\beta \quad (11.21)$$

将此式代入式(11.19), 便得横向起始扰动

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{l_R}{R_R^2} [(\dot{z}_{MF} - (s_{00} - s_F)\dot{\beta}_F + v_F\beta_F - (\dot{z}_{M0} + v_0\beta_0))] + \dot{\varphi}_F$$

由于不考虑间隙, 则  $\dot{\varphi}_F = \dot{\beta}_F$ ; 又  $\dot{\beta} = (\dot{M}_F - \dot{z}_N)/MN$ , 故上式成为下列形式

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{l_R}{R_R^2} \left[ (\dot{z}_{MF} - \dot{z}_{M0}) + \left( \frac{R_R^2}{l_R} - l_B \right) \frac{\dot{z}_{MF} - \dot{z}_{NF}}{MN} + \frac{v_F}{MN} (z_{MF} - z_{NF}) - \frac{v_0}{MN} (z_{M0} - z_{N0}) \right] \quad (11.22)$$

由上式可知, 只要测出了定向器上  $M$ 、 $N$  点在  $t_F$  和  $t_0$  瞬时的绝对振动速度和位移, 便可算出相应的  $\dot{\varphi}_0$ ; 求出每发弹的  $\dot{\varphi}_0$  以后, 立即可得一组弹的  $\dot{\varphi}_0$  的中间偏差。

不言而喻, 与此同时, 应测出铅垂平面内的横向振动, 以求得铅垂面内的起始振动量。

## 11.5 只考虑重力矩时运动方程的解

研究重力矩对半约束期运动的影响, 不但为计算其系统性的炮口扰动量, 而且由于重力矩比其他各力矩大得多, 在校核炮口碰撞时可只考虑重力矩的作用。

当只考虑重力矩时, 方程(11.4) 为

$$A_R \ddot{\Phi} - iC\dot{\gamma} \dot{\Phi} - ma_P l_R \Phi = -mgl_R \cos\theta_0$$

可略去陀螺力矩项, 因为半约束期内火箭转速甚低, 其影响不大。那么重力矩引起的扰动量只有铅垂面内的分量, 则(省略  $\varphi_1$  的脚注“1”)

$$\ddot{\varphi} - \frac{a_P l_R}{R_R^2} \varphi = -\frac{gl_R}{R_R^2} \cos\theta_0 \quad (11.23)$$

在零初始条件下, 上式的解为

$$\varphi = -\frac{g \cos\theta_0}{a_P} [\text{ch}\Omega_1(t - t_F) - 1] \quad (11.24)$$

于是

$$\dot{\varphi} = -\frac{g \cos\theta_0}{a_P} \Omega_1 \text{sh}\Omega_1(t - t_F) \quad (11.25)$$

式中

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{a_P l_R}{R_R^2}} \quad (11.26)$$

当火箭离轨时(半约束期结束),  $t = t_0$ , 便有

$$\varphi_0 = -\frac{g \cos\theta_0}{a_P} [\text{ch}\Omega_1(t_0 - t_F) - 1] \quad (11.27)$$



$$\dot{\varphi}_0 = -\frac{g \cos \theta_0}{a_P} \Omega_1 \operatorname{sh} \Omega_1 (t_0 - t_F) \quad (11.28)$$

其中  $(t_0 - t_f)$  可由下式计算

$$(t_0 - t_F) = t_0 \left( 1 - \frac{t_F}{t_0} \right) = t_0 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} \right) \quad (11.29)$$

偏角  $\psi_0$  由下式确定

$$\psi_0 = \frac{l_R \dot{\varphi}_0}{v_0} \quad (11.30)$$

**例题 11.2** 求涡轮式火箭 I 由重力矩所引起的起始扰动量。已知  $a_P = 557 \text{ m/s}^2$ ,  $t_0 = 0.061 \text{ s}$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$ , 其他数据见例题 11.1。

**解** 由式(11.26)

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{a_P l_R}{R_R^2}} = \sqrt{\frac{557 \times 0.406}{0.246}} = 30.3$$

$$t_0 - t_F = t_0 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{l_B}{s_{00}}} \right) = 0.061 \times (1 - 0.764) = 0.0144$$

$$\Omega_1 (t_0 - t_F) = 30.3 \times 0.0144 = 0.436$$

$$\dot{\varphi}_0 = -\frac{g \cos \theta_0}{a_P} \Omega_1 \operatorname{sh} \Omega_1 (t_0 - t_F) = -\frac{9.80 \cos 45^\circ}{557} \times 30.3 \times \operatorname{sh}(0.436) = -0.170 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_0 = -\frac{g \cos \theta_0}{a_P} [\operatorname{ch} \Omega_1 (t_0 - t_F) - 1] = -\frac{9.80 \cos 45^\circ}{557} [\operatorname{ch}(0.436) - 1] = -0.0012 \text{ rad}$$

$$\psi_0 = \frac{l_R}{v_0} \dot{\varphi}_0 = \frac{0.406}{557 \times 0.061} \times (-0.170) = -0.00203 \text{ rad}$$

显然,由重力矩形成的  $\dot{\varphi}_0$  将使  $v_K$  向左下方向偏转。

对于某些炮口速度小,定心部之间距离较大的火箭弹,因半约束期内运动时间较长,弹轴摆动角较大,弹体就有可能与炮口发生碰撞。这是不允许的,必须避免,为此须对  $\varphi$  角进行校核。

设某一时刻,后定心部到炮口端面的距离为  $l'$ ,此时弹轴的摆动角为  $\varphi$ ,定心部高度为  $h_B$ ,则由图 11.3 可知,此时不发生炮口碰撞的条件为

$$l' + |\varphi| < h_B \quad (11.31)$$

为保证在整个半约束期内不发生碰撞,必须在此期间内时刻都满足不等式(11.31)。在设计火箭弹时,应根据式(11.24)算出各时刻的  $\varphi$  值,并依下式算出  $l'$  值

$$l' = l_B - \frac{1}{2} a_P (t^2 - t_F^2)$$

然后作出  $l' + |\varphi| - l'$  曲线,找出  $l' + |\varphi|$  的最大值,以便保证所设计的定心部高度大于此最大





值。 $l'|\varphi|-l'$  曲线大体上如图 11.4 所示,由图知最容易发生碰撞的地方在前后定心部中间稍靠近后定心部的地方。

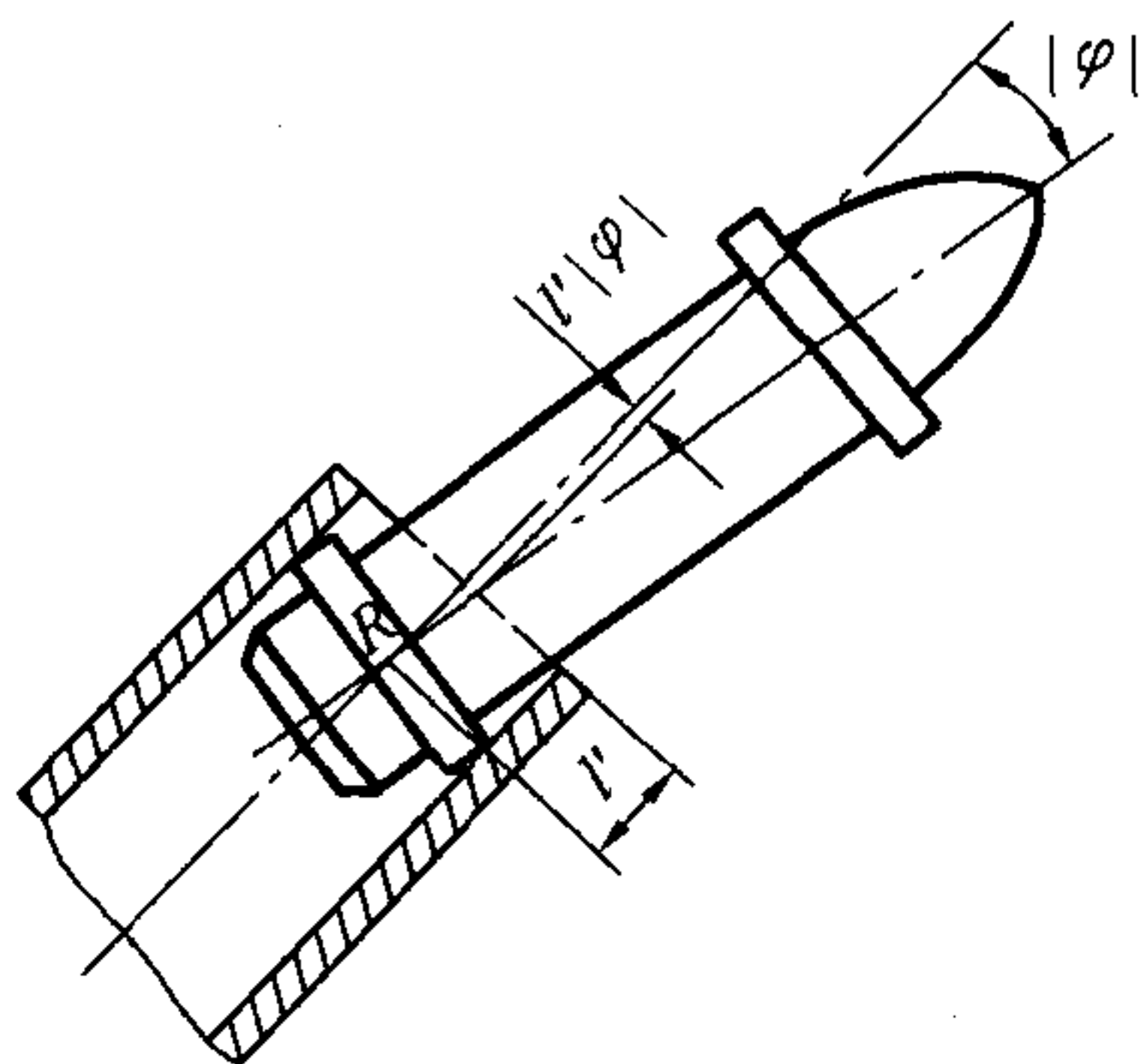


图 11.3 弹体与定向器不发生碰撞的条件

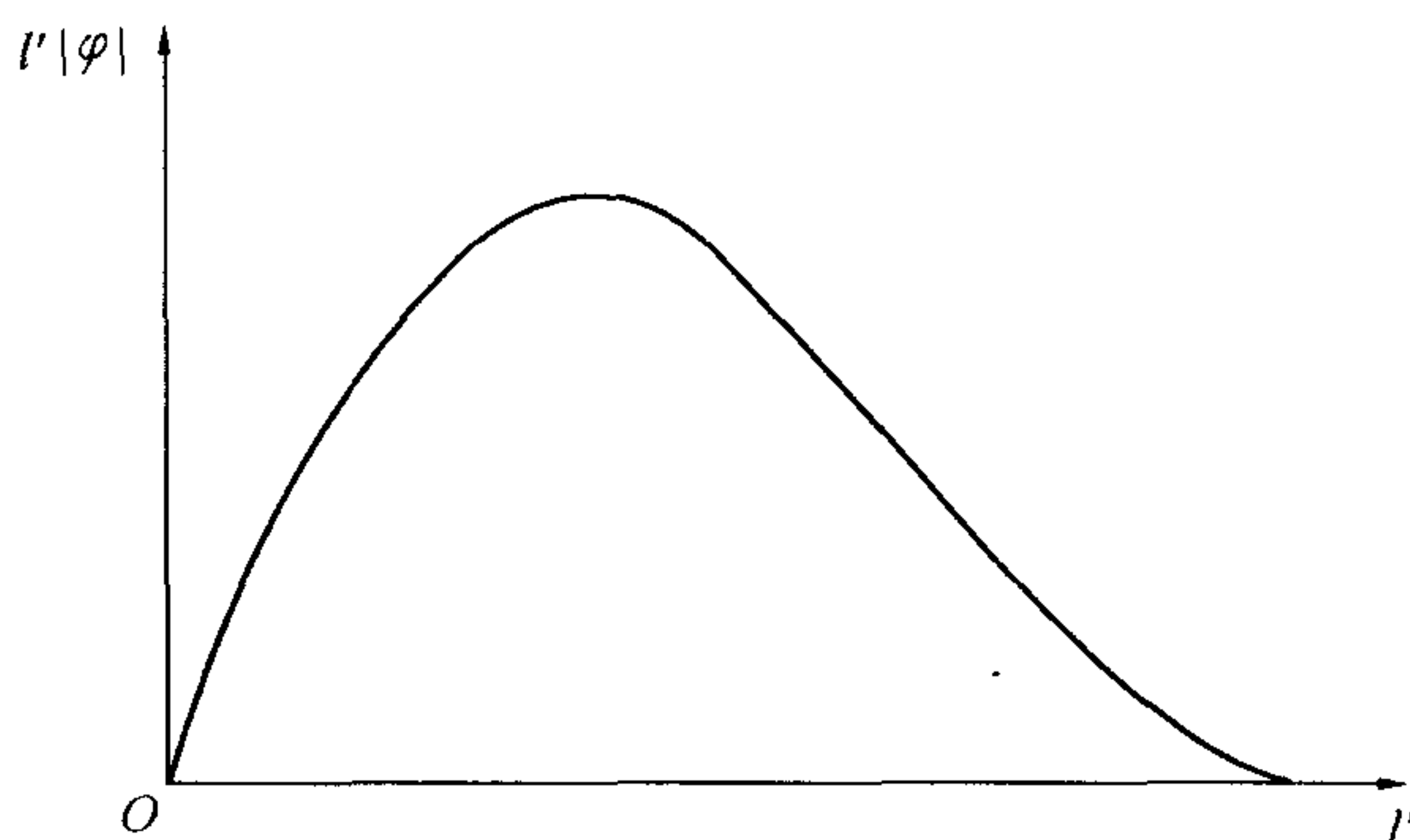


图 11.4  $l'|\varphi|-l'$  曲线

## 11.6 弹炮间隙存在下的运动方程

在约束期和半约束期,弹炮间隙存在下的火箭运动方程是不同的。文[27]所提出的运动方程,至今仍有其理论价值。这里只介绍半约束期内的运动方程。

设定心部与炮管的配合间隙为  $2e_1$ ,在半约束期,后定心部中心  $R$  将在半径为  $e_1$  的圆周上运动。将  $R$  点用复数表示为

$$\rho_R = e_1 \exp(i\lambda_R) \quad (11.32)$$

式中,  $\lambda_R$  是后定心部与膛壁接触点  $P$  的方位角,如图 11.5 所示。图中  $O$  为炮管轴线与后定心部中心  $R$  所在的弹体横断面的交点。由于弹轴摆动角很小,可近似认为  $O$  点所在炮管横断面与上述横断面是两个重合的圆。在不计摩擦的情况下,炮管作用于弹的反力  $N_R$  将通过  $P$  点和  $R$  点。方程(11.1)仍可用来说描述弹轴的运动方程,只不过考虑到  $R$  点的运动,要在  $f$  中加一惯性力矩为  $(-ml_R\ddot{\rho}_R)$ 。这样,就增加了一个未知参数  $\lambda_R$ ,还得建立一个方程,这可考虑火箭质心的横向运动。在复平面上,质心  $C$  可用复数  $\rho_C$  表示

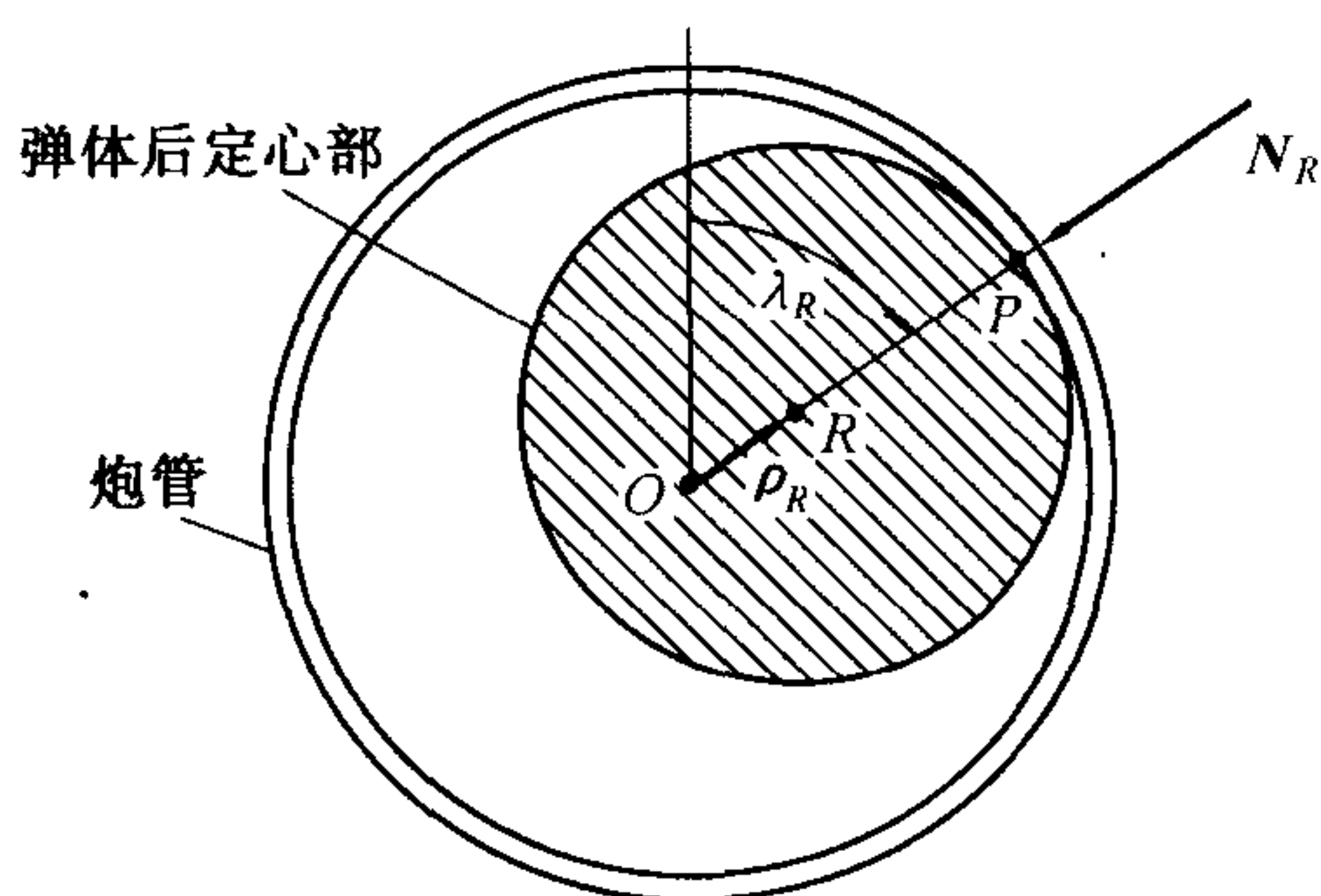


图 11.5 炮膛内的火箭后定心部

$$\rho_C = \rho_R + l_R\Phi + L_m \exp(i\gamma) + \rho_n \quad (11.33)$$



式中,  $\rho_n$  是炮膛轴线上  $O$  点的横向位移复矢量, 体现炮管(定向器)的振动。于是得下列方程组

$$\begin{cases} A_R \ddot{\Phi} + ml_R \ddot{\rho}_R = -mgl_R \cos \theta_0 - ml_R a_n + (\dot{\gamma}^2 - i\ddot{\gamma})[(A - C)\beta_D + ml_R L_m] \exp(i\gamma) & \textcircled{1} \\ m \left[ \ddot{\rho}_R + l_R \ddot{\Phi} + L_m \frac{d^2}{dt^2} \exp(i\gamma) + a_n \right] = -mg \cos \theta_0 - N_R \exp(i\lambda_R) \end{cases} \quad (11.34)$$

式中,  $a_n$  是由  $\rho_n$  变化所产生的横向加速度。式(11.34)②与简化的方程(11.5)类似, 略去了一些次要项, 当然也略去了推力偏心矩。式(11.34)实际上是四个标量方程的联立方程组, 待求函数有四个, 即  $\lambda_R$ 、 $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 、 $N_R$ , 可见能求得确定解。

为了得到关于  $\lambda_R$  的一元微分方程, 可作如下代换。由

$$[\text{式(11.34)②实部}] \sin \lambda_R - [\text{式(11.34)②虚部}] \cos \lambda_R$$

及

$$[\text{式(11.34)①实部}] \sin \lambda_R - [\text{式(11.34)①虚部}] \cos \lambda_R$$

得出的两式消去  $(\ddot{\varphi}_1 \sin \lambda_R - \ddot{\varphi}_2 \cos \lambda_R)$ , 使得

$$\begin{aligned} e_1 \ddot{\lambda}_R = & g \cos \theta_0 \sin \lambda_R + \left\{ \dot{\gamma}^2 \left[ \beta_{D1} \left( 1 - \frac{C}{A} \right) l_R - L_{m1} \right] + \ddot{\gamma} \left[ \beta_{D2} \left( 1 - \frac{C}{A} \right) l_R - L_{m2} \right] \right\} \sin(\lambda_R - \gamma) + \\ & \left\{ \ddot{\gamma} \left[ \beta_{D1} \left( 1 - \frac{C}{A} \right) l_R - L_{m1} \right] - \dot{\gamma}^2 \left[ \beta_{D2} \left( 1 - \frac{C}{A} \right) l_R - L_{m2} \right] \right\} \cos(\lambda_R - \gamma) + \\ & a_{n1} \sin \lambda_R - a_{n2} \cos \lambda_R \end{aligned} \quad (11.35)$$

或写成下式

$$e_1 \ddot{\lambda}_R = g \cos \theta_0 \sin \lambda_R + R [\dot{\gamma}^2 \sin(\lambda_R - \gamma - \lambda_0) + \ddot{\gamma} \cos(\lambda_R - \gamma - \lambda_0)] + a_{n1} \sin \lambda_R - a_{n2} \cos \lambda_R \quad (11.36)$$

$$\text{式中} \quad \begin{cases} a_n = a_{n1} + i a_{n2} \\ R = \left\{ \left[ \beta_{D1} \left( 1 - \frac{C}{A} \right) l_R - L_{m1} \right]^2 + \left[ \beta_{D2} \left( 1 - \frac{C}{A} \right) l_R - L_{m2} \right]^2 \right\}^{1/2} \\ \lambda_0 = \arctan \frac{\beta_{D2} \left( 1 - \frac{C}{A} \right) l_R - L_{m2}}{\beta_{D1} \left( 1 - \frac{C}{A} \right) l_R - L_{m1}} \end{cases} \quad (11.37)$$

由式(11.36)求出  $\lambda_R$  后, 代入式(11.34)①中的  $\rho_R$ , 则  $\Phi$  的规律便可确定。当  $\dot{\gamma}^2 \gg \ddot{\gamma}$  时, 可近似略去  $\ddot{\gamma}$  所在项; 若不计  $a_{n2}$  时, 则式(11.36)变为

$$e_1 \ddot{\lambda}_R = (g \cos \theta_0 + a_{n1}) \sin \lambda_R + R \dot{\gamma}^2 \sin(\lambda_R - \gamma - \lambda_0) \quad (11.38)$$

该方程往往存在下列两种情况

(1) 当  $|g \cos \theta_0 + a_{n1}| \gg R \dot{\gamma}^2$  时, 有

$$e_1 \ddot{\lambda}_R = (g \cos \theta_0 + a_{n1}) \sin \lambda_R \quad (11.39)$$

这是一个物理摆方程, 利用椭圆函数便可解出。



(2) 当  $|g \cos \theta_0 + a_{n1}| \ll R\dot{\gamma}^2$  时, 有

$$e_1 \ddot{\lambda}_R = R\dot{\gamma}^2 \sin(\lambda_R - \gamma - \lambda_0)$$

若引入变量  $\chi = \lambda_R - \gamma - \lambda_0$ , 并取弧长  $s$  为自变量, 则

$$\frac{d^2 \chi}{ds^2} + \frac{1}{2s} \frac{d\chi}{ds} - \frac{R}{e_1} \Gamma^2 \sin \chi = -\frac{\Gamma}{2s} \quad (11.40)$$

由以上方程可知, 考虑弹炮间隙存在条件下, 研究弹轴运动规律时, 可计及诸扰动因素把方程(11.36)中的  $\lambda_R$  求解出来, 从而确定出方程(11.34)①的量  $ml_R \ddot{\rho}_R$ 。它不仅包含间隙本身这个因素, 而且也包含了其他诸扰动因素的影响。与无间隙的方程比较而言, 有无  $ml_R \ddot{\rho}_R$  这一项是其主要差别。

剩下的问题是:  $\ddot{\rho}_n$  (从而  $a_n$ ) 如何确定? 这需要建立定向器的振动方程。显然, 振动规律又与弹的运动状态有关, 定向器将受到弹的作用力—— $N_R$  的影响。为了解决起始振动计算问题, 就应该把弹的运动方程与定向器振动方程联立求解。<sup>[2, 29]</sup>

还有一种可能情况, 就是定心部脱离膛壁, 随后又返回与膛壁碰撞。碰撞前后的运动状态变化, 可依据力学中的碰撞理论解决<sup>[2]</sup>。依据  $N_R$  的正负号, 可判断定心部与膛壁是否接触。一旦接触受到破坏, 则采用无约束的动力学方程。



## 第十二章 火箭增程弹的扰动运动

### 12.1 前言

研究火箭增程弹扰动运动的目的在于,探讨其在扰动因素作用下的运动规律,以解决散布计算及散布分析问题,为总体设计提供理论依据。

如图 2.2 所示,增程弹比一般火箭弹要多一个起始段  $\widehat{OH}$ ,炮口速度是火炮赋予的,点火处  $H$  的速度  $v_H$  可由弹道计算求出,对低伸弹道则由式(3.42) 换算。无论起始段或被动段的绕心运动,都和火炮弹道相同。这里主要研究增速段内的运动。增程弹远远不局限于反坦克武器,而且不仅尾翼弹,也有涡轮式的旋转弹。从弹道观点来看,这类火箭的共同点是:发动机点火时( $H$  点)的速度与推力加速度无关。这点对散布分析是很重要的。由此可以通过改变推力加速度的大小去改变有效滑轨长度,从而达到减小散布的目的。另一方面,是火箭的最大速度  $v_K$  可看成点火时的速度  $v_H$  与增速段增加的速度  $v_{KH}$  之和。当武器的最大射程给定后(这是战术技术指标之一), $v_K$  之值便可相应确定;在既定的  $v_K$  值下,比值  $v_H/v_{KH}$  也将对散布有明显的影响,这也是设计中所关心的一个问题。

一般说来,增程弹增速段内的角散布在落点散布中占有主导地位,而且从原则上讲,上面几章所推导的散布公式都适用于增程弹(当然应在各有关公式所适用的条件下)。因为增程弹的运动方程仍不外乎第八章所建立的方程。但是,针对增程弹弹道特点,对野战火箭增程弹在散布分析时,除了以前所考虑到的影响因素(如  $k$ 、 $\Gamma$  等等)外,还要突出速度比  $v_H/v_{KH}$ ,以及最佳推力加速度所依赖的关系<sup>[14,16,17]</sup>。

本章首先一般性地讨论野战尾翼式火箭增程弹的散布问题,然后重点研究所谓“高初速条件”下的散布问题。此外,起始段长度对起始扰动引起的散布影响很大,需要研究其合理值。对旋转稳定的无翼增程弹就不介绍了,因为其研究问题的方法是类似的。

### 12.2 野战尾翼式增程弹的散布分析

现研究下一类火箭弹:

- (1) 陀螺稳定因子  $S_g$  很小,甚至远小于 0.10;
- (2) 每波长内的自转数  $n_\lambda$  不太小(大致在 2 以上);



(3) 点火时的速度  $v_H$  与推力加速度无关。

这不仅属于炮兵陆战火箭弹,而且航空火箭也包括在内。在这种情况下,周期性干扰因素产生的强迫运动可以忽略,完全可以利用简单公式(9.96) ~ (9.99) 来研究散布,而  $v_H (= kv_H^2/2\bar{a})$  基本上不受限制。

为了在给定  $v_K$  的条件下考虑各因素对特征函数的影响,不妨将式(9.96) 同时乘以和除以  $\sqrt{u_K}$ ,则得(注意扰动发生在  $H$  点)

$$\psi_{\phi_H K}^* = \frac{C_3 \sqrt{2\pi}}{kv_K} \sqrt{u_K} R_{\phi_0}(u_H, u_K) \quad (12.1)$$

对动不平衡,由式(9.99) 有

$$|\Psi_{\beta_D K}^*| = \dot{\gamma}_H \psi_{\phi_H K}^* \quad (12.2)$$

式中,  $\dot{\gamma}_H$  是发动机在  $H$  处点火时的火箭自转速度。

从式(12.1) 和式(12.2) 可知,函数  $\psi_{\phi_H K}^*$  及  $|\Psi_{\beta_D K}^*|$  的特性取决于函数  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0}(u_H, u_K)$ ,所以首先要对此函数加以分析。对此类  $v_H$  与加速度无关的火箭来讲,最紧要的问题是加速度大小的选取,以及速度比  $v_H/v_{KH}$  对弹道性能的影响。因为这两个因素是伴随着增程弹出现的新问题,而对其他影响因素的分析方法已经叙述过。不妨引入一个新的参数  $s'$ , 定义为

$$s' = \frac{v_{KH}^2}{2\bar{a}} \quad (12.3)$$

对  $s'$  的物理意义可以这样理解:若  $v_H = 0$ ,  $s'$  就是火箭增速段的实际长度。若从飞机上向前发射初速为零的火箭,  $v_H$  即是飞机的速度,  $s'$  便是飞行员在飞机上所观测到的增速段长度。总之,  $s'$  是在以  $v_H$  速度运动的平动参考系内所观测到的火箭增速段(或主动段)长度,称为增速段相对长度,而  $s_H$  和  $s_K$  的有效值为

$$s_H = \frac{v_H^2}{2\bar{a}} \quad (12.4)$$

$$s_K = \frac{v_K^2}{2\bar{a}} = \frac{(v_H + v_{KH})^2}{2\bar{a}} \quad (12.5)$$

以上各式中的加速度  $\bar{a}$  可近似取下列值

$$\bar{a} \approx \bar{a}_p - b_x v_H^2 - g \sin \theta_H \quad (12.6)$$

式中,  $\bar{a}_p$  是推力加速度  $a_p$  的平均值。

由式(12.3) 知  $2\bar{a} = v_{KH}^2/s'$ , 代入式(12.4) 和式(12.5), 则

$$s_H = \left( \frac{v_H}{v_{KH}} \right)^2 s' \quad (12.7)$$

$$s_K = \left( 1 + \frac{v_H}{v_{KH}} \right)^2 s' \quad (12.8)$$





这表明,  $s_H$  和  $s_K$  完全是由两个新变量  $v_H/v_{KH}$  和  $s'$  所确定的。 $u_H$  和  $u_K$  的表达式为

$$u_H = ks_H = \left( \frac{v_H}{v_{KH}} \right)^2 u' \quad (12.9)$$

$$u_K = ks_K = \left( 1 + \frac{v_H}{v_{KH}} \right)^2 u' \quad (12.10)$$

$$\text{式中} \quad u' = ks' = 2\pi \frac{s'}{\lambda} \quad (12.11)$$

函数  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0}(u_H, u_K)$  仅是比值  $v_H/v_{KH}$  和变量  $u'$  的二元函数。 $v_H/v_{KH}$  叫做炮、箭速度比, 它是一个影响特征函数的重要参量;  $u'$  是增速段相对长度参量, 也是一个重要参量。这两个参量便决定了特征函数  $\phi_{\phi_H}^*$  的特性, 合理地选取这两个量, 乃是散布分析的重要任务。

在图 12.1 和图 12.2 中, 分别绘制了  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0}(u_H, u_K) - u'$  曲线和  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0}(u_H, u_K) - v_H/v_{KH}$  曲线。这两组曲线不是针对具体型号的增程弹绘制的, 而是具有通用性的曲线。从这些曲线可看出, 比值  $v_H/v_{KH}$  和  $u'$  对  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0}(u_H, u_K)$  之值有很明显的影响。就  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0}(u_H, u_K) - u'$  来看, 当  $u'$  很小时, 所有曲线都上升很快。就图 12.1 给出的  $v_H/v_{KH}$  几个数值而言, 当  $u'$  达某一值之后, 曲线都开始不断下降。而且比值  $v_H/v_{KH}$  越大, 下降得越快;  $v_H/v_{KH}$  越小, 下降得越缓慢。计算表明, 当比值  $v_H/v_{KH}$  很小, 以至接近零时, 曲线将会是一直上升的。改变  $u'$  大小的有效办法是改变推力加速度  $a_P$ , 从而改变  $\bar{a}$ , 遂至  $u'$ 。要得到小的  $u'$ , 就得有大的  $a_P$ ; 反之, 要有大的  $u'$ , 就得有小的  $a_P$ 。当  $v_H/v_{KH}$  不太小时 (比如  $1/4$  以上), 想要减小散布, 或者是使  $u'$  很大, 或是很小 ( $\ll 1$ )。一般来讲, 要使  $u'$  很小, 使推力加速度  $a_P$  非常之大, 这在实际上是难以办到的。可行的途径, 倒是用小推力方案, 以得到大的  $u'$ , 使  $\phi_{\phi_H}^*$  较小。但值得注意的是, 当比值  $v_H/v_{KH}$  很小时, 曲线一直随  $u'$  增加而上升; 或者  $v_H/v_{KH}$  虽不太小 (比如  $1/8$ ), 但曲线的下降过程比较缓慢。在这两种情况下 (实际上可归结为  $v_H/v_{KH}$  较小的一类情况), 人们只好尽可能用较大的推力加速度来得到较小的  $\phi_{\phi_H}^*$ 。

综合上述, 对  $a_P$  的选取, 要视  $v_H/v_{KH}$  的具体数值而定。而且, 必须从比值  $v_H/v_{KH}$  这个量来处理和分析问题, 而不要单从  $v_H$  本身的数值来看问题, 否则, 便很难引出上述带有普遍意义的结论。

图 12.2 进一步说明了  $v_H/v_{KH}$  对  $\phi_{\phi_H}^*$  的影响。可以看出, 当  $u'$  (相应  $s'/\lambda$ ) 越大时, 曲线

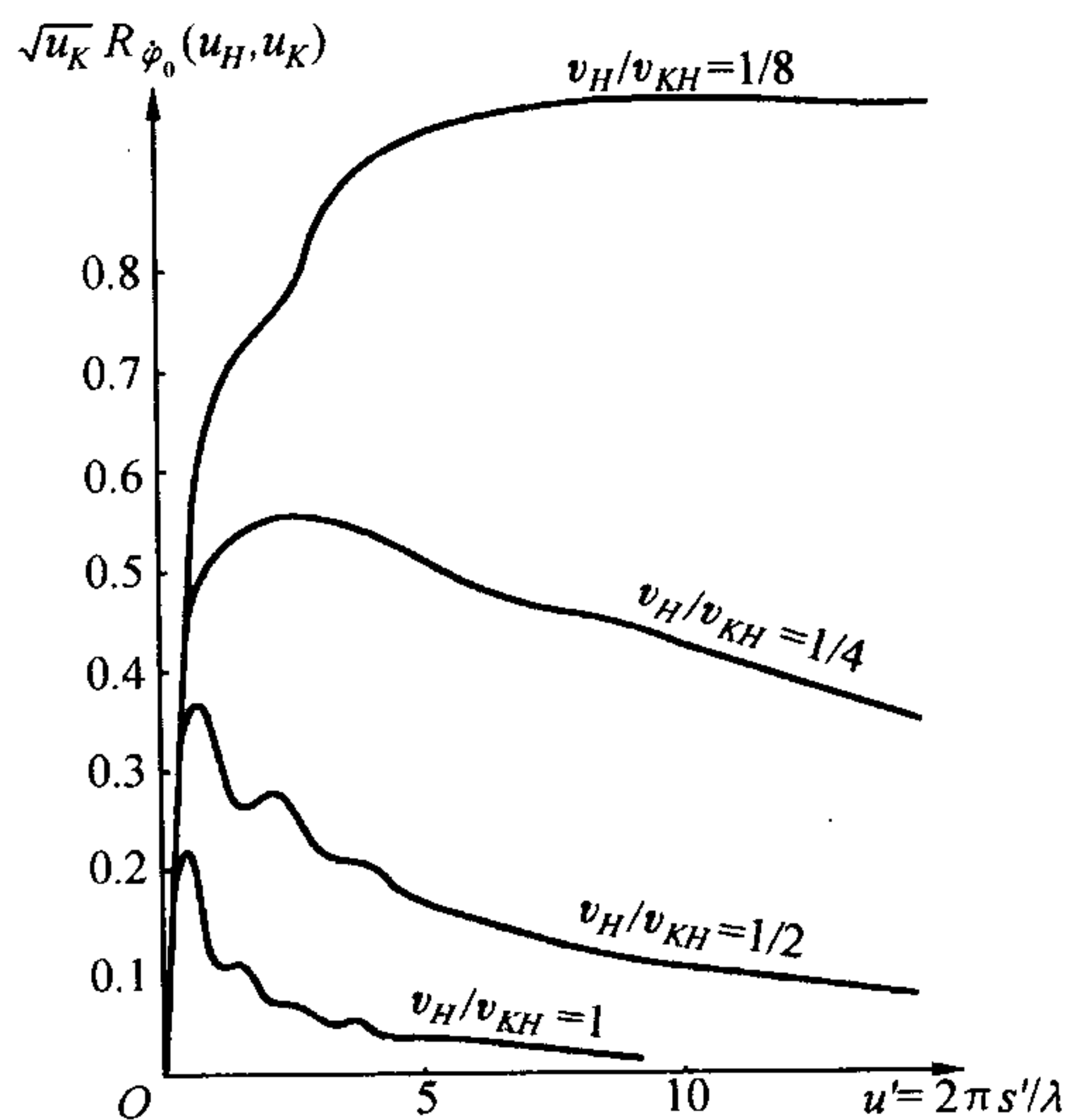


图 12.1  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0} - u'$  曲线





下降较快;  $u'$  越小时, 曲线下降较缓。并且当  $v_H/v_{KH}$  在 0.2 左右时, 曲线在此相互相交, 此后共同向横轴趋近。这就进一步说明了在小速度比 ( $v_H/v_{KH} < 0.15$ ) 时, 应该取小的  $u'$  值, 即取大推力加速度; 在  $v_H/v_{KH}$  为 0.2 左右时,  $\phi_{\phi_H}^*$  与  $a_P$  关系不大; 当  $v_H/v_{KH}$  较大 ( $> 0.25$ ) 时, 以取小推力加速度为宜。

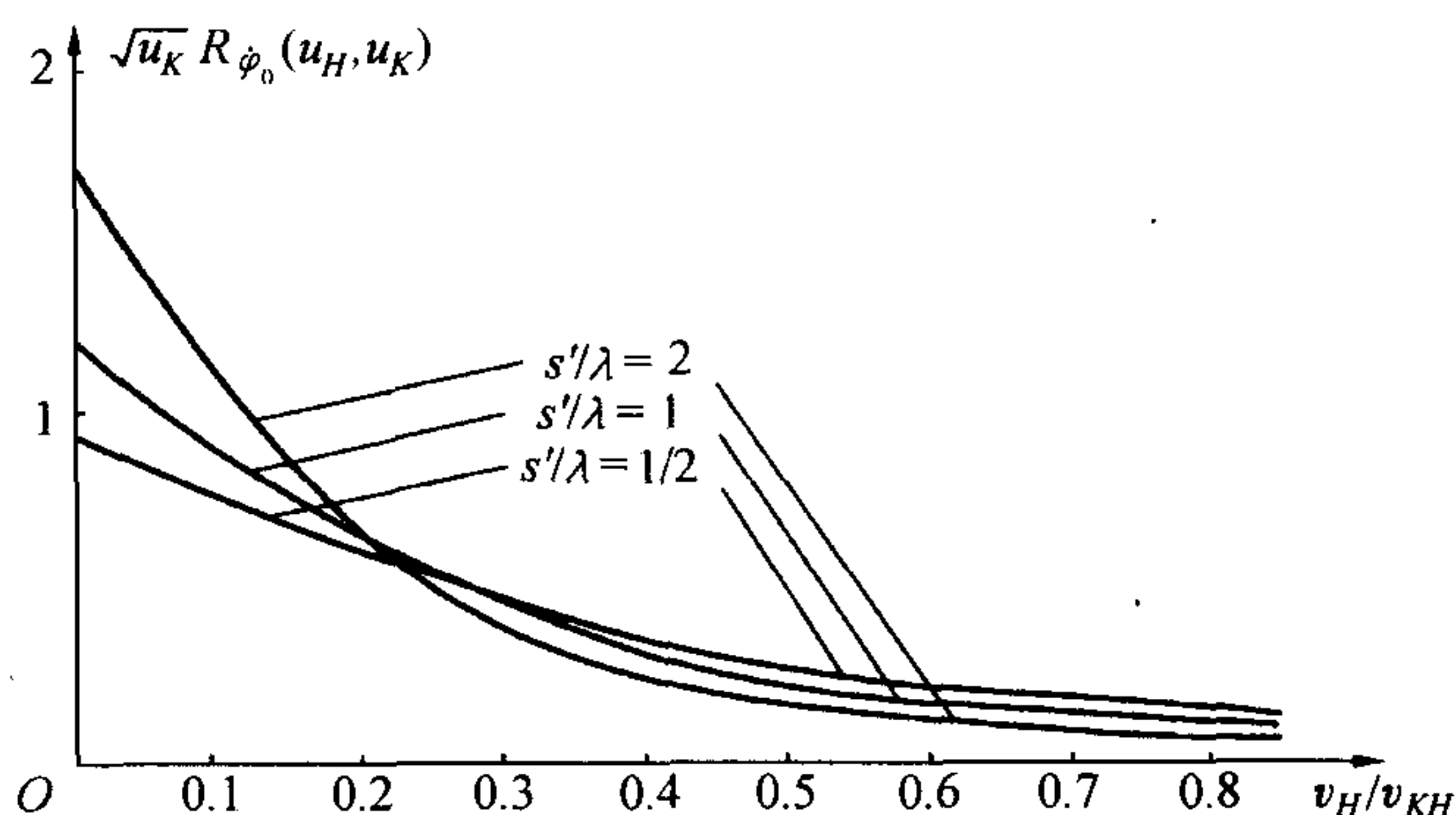


图 12.2  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0} - v_H/v_{KH}$  曲线

有一点要说明一下, 就是在  $\phi_{\phi_H}^*$  表达式中,  $C_3$  也是与  $u_H$  有关的,  $C_3 = a_P/\bar{a} + 2(b_y/k)u_H$ 。可近似取  $a_P/\bar{a} \approx 1$ , 而  $b_y/k$  具有  $1/40 \sim 1/30$  的量级。对大的  $u_H$ ,  $C_3$  将明显大于 1, 若将  $C_3$  乘到函数  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0}(u_H, u_K)$  中去, 则图 12.1 的曲线末段将抬高一些, 但不改变曲线变化的总趋势。因此为说明主要特性, 作图时没有考虑  $C_3$ 。

以上结论, 仅对  $\phi_{\phi_H}^*$  和  $|\Psi_{\beta_d}^*|$  而言。要得到最后的结论, 还必须了解  $\phi_w^*$  和  $|\Psi_L^*|$  的情况, 下面先看看  $|\Psi_L^*|$ 。由式(9.97\*) (该公式使用范围较大)

$$|\Psi_L^*| = \frac{C_3}{kR_A^2} k_\gamma R_L(u_H, u_K) \quad (12.12)$$

式中

$$k_\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(2u_H n_\lambda \frac{R_L}{B_I}\right)^2}} \quad (12.13)$$

显然  $R_L$  仅是  $v_H/v_{KH}$  和  $u'$  的二元函数;  $k_\gamma$  在确定的  $n_\lambda$  下, 也是  $v_H/v_{KH}$  和  $u'$  的二元函数。 $|\Psi_L^*|$  的特性, 取决于函数  $k_\gamma R_L$  (只有当  $u_H$  很大时, 才显出  $C_3$  的影响,  $C_3$  不致改变  $|\Psi_L^*|$  的总变化趋势)。图 12.3 和图 12.4 分别作出了  $k_\gamma R_L - u'$  曲线和

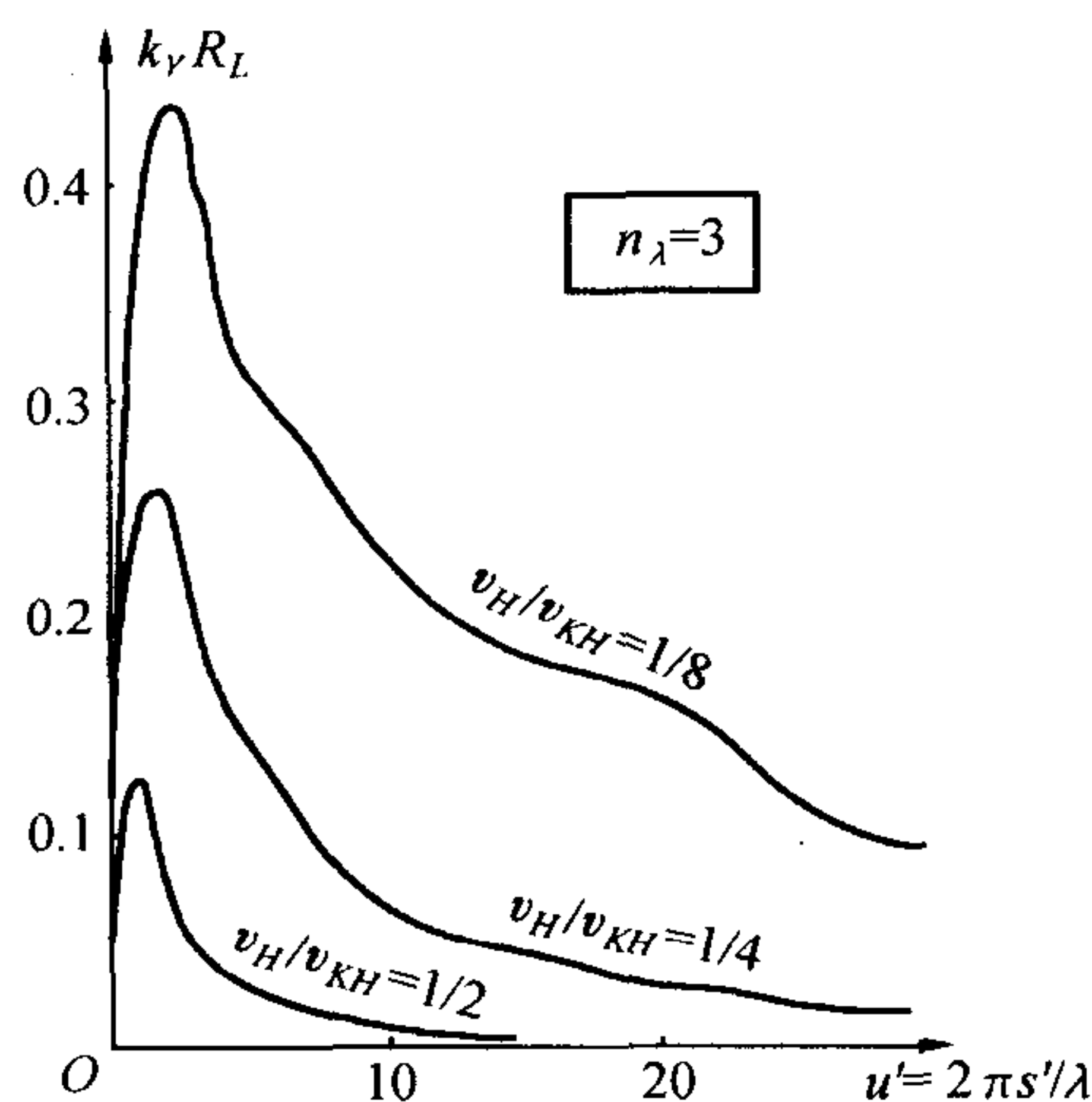


图 12.3  $k_\gamma R_L - u'$  曲线



$k_\gamma R_L - v_H/v_{KH}$  曲线。从图 12.3 看出,  $k_\gamma R_L - u'$  曲线开始亦有一个急增过程, 很快达到极大值, 然后随  $u'$  增加而衰减。有趣的是, 不管  $v_H/v_{KH}$  之值如何, 各曲线总的变化趋势是相似的。类似  $\phi_{\varphi_H}^*$  的某种情况, 要想以极大的推力加速度使  $|\Psi_L^*|$  很小是困难的, 甚至办不到。可行的途径倒是以小推力加速度来减小散布。

为什么  $u'$  很小时  $|\Psi_L^*|$  较小, 又  $u'$  很大时  $|\Psi_L^*|$  也较小? 这是因为当  $s'$  很小时推力偏心矩还来不及起作用。正如反坦克火箭弹(如 40 火箭筒之类)一样, 它把主动段长度大大减小到远小于临界段长度, 致使  $B(\phi_L)$  很小。反之, 当主动段较长(大于临界段), 那么推力偏心矩已起到了充分作用, 这就要看稳定力矩与它相比谁占优势了。对一般野战火箭弹, 两者都与推力加速度成正比地增加(或减小), 故推力加速度不对  $B(\phi_L)$  有什么影响。而增程弹, 点火时

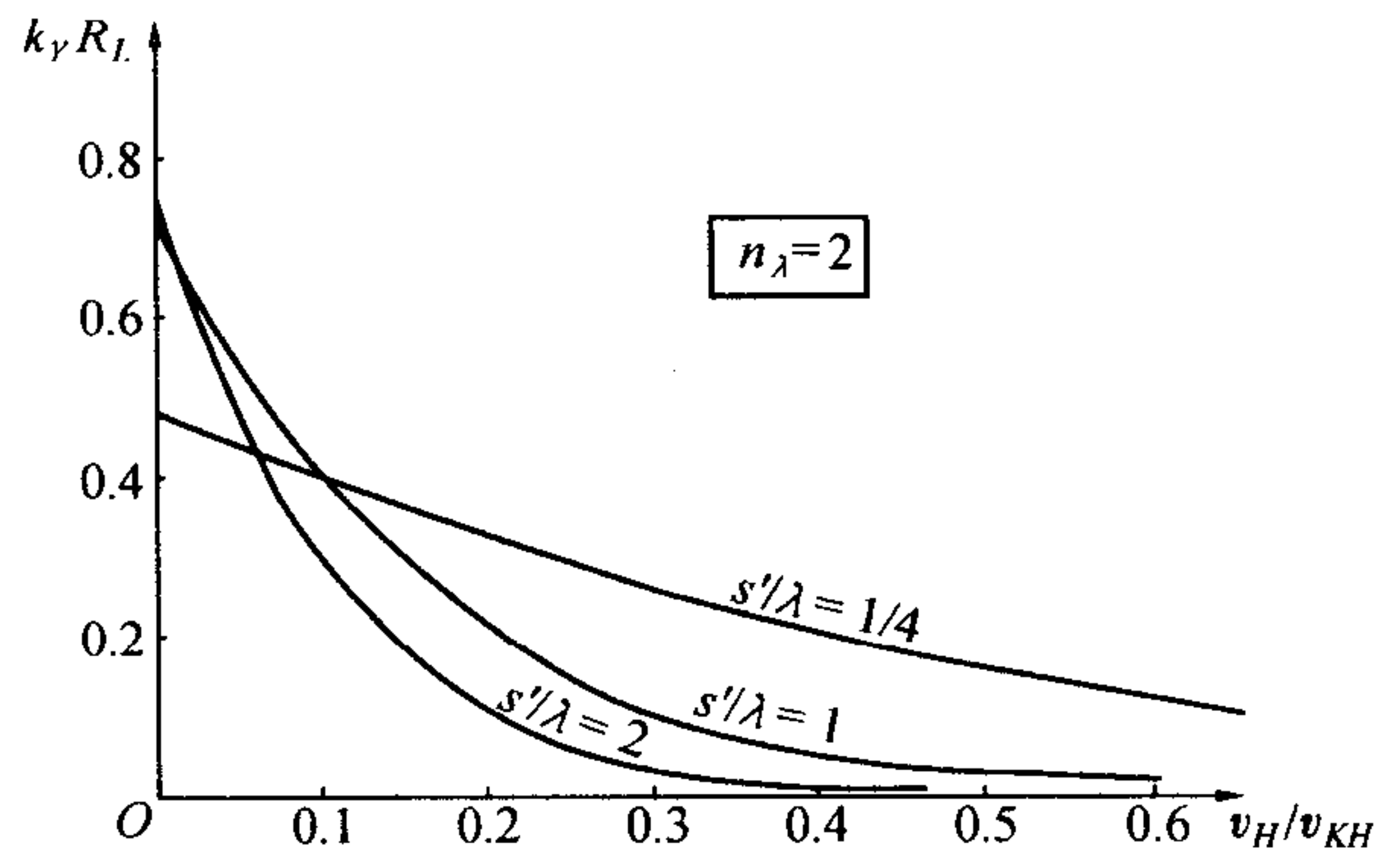


图 12.4  $k_\gamma R_L - v_H/v_{KH}$  曲线

以至点火后的一段时间内, 稳定力矩(主要取决于速度  $v_H$ ) 则与推力加速度无多大关系; 但  $a_p$  值越小, 作为扰动因素的推力偏心矩  $M_p$  就越小, 这样, 既定的较大的稳定力矩就可强有力地克服  $M_p$  的扰动作用, 从而使其偏角减小。

图 12.4 表明, 对较大的  $s'/\lambda$  (即较大的  $u'$ ,  $u' = 2\pi s'/\lambda$ ) 来说,  $|\Psi_L^*|$  随  $v_H/v_{KH}$  增加而衰减很快, 与图 12.3 中关于  $u'$  较大值要求一致起来了。这样, 取  $u'$  较大的值, 既减小了  $|\Psi_L^*|$ , 对  $v_H/v_{KH}$  取值又不要求较大。对设计来说, 是可行的途径。

关于风,  $K$  点处特征函数为

$$\phi_w^* = -\frac{1}{v_H} \phi_{\phi_H}^*(u_H, u_K) + \frac{1}{v_K} \quad (12.14)$$

或

$$\phi_w^* = \frac{1}{v_K} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{v_{KH}}{v_H} \right) \phi_{\phi_H}^*(u_H, u_K) \right] \quad (12.15)$$

速度  $v_K$  是由射程所决定的, 没有多少机动余地, 就不管它了。中括号内的量用  $\tilde{\phi}_w$  表示, 且取  $C_3 \approx 1$  时, 有

$$\tilde{\phi}_w = 1 - \left( 1 + \frac{v_{KH}}{v_H} \right) [1 - B_R(u_H, u_K)] \quad (12.16)$$

显然,  $\tilde{\phi}_w$  仅是速度比  $v_H/v_{KH}$  和  $u'$  的二元函数, 便可作出具有通用性的曲线。图 12.5 是  $-\tilde{\phi}_w - u'$  曲线, 图 12.6 是  $-\tilde{\phi}_w - v_H/v_{KH}$  曲线。从图 12.5 看出,  $-\tilde{\phi}_w$  曲线开始有增加过程,  $u'$  较大时,



$-\tilde{\psi}_w$  很快就不变了;  $v_H/v_{KH}$  越小时,  $-\tilde{\psi}_w$  增加的过程越长, 反之亦然, 无论  $v_H/v_{KH}$  之值多少,  $-\tilde{\psi}_w$  曲线都没有衰减过程。至于  $-\tilde{\psi}_w$  随  $v_H/v_{KH}$  的变化规律, 图 12.6 的曲线足以说明, 除了  $s'/\lambda$  较小的情况下,  $-\tilde{\psi}_w - v_H/v_{KH}$  曲线有一个增加过程外, 其余都是  $v_H/v_{KH}$  的减函数。

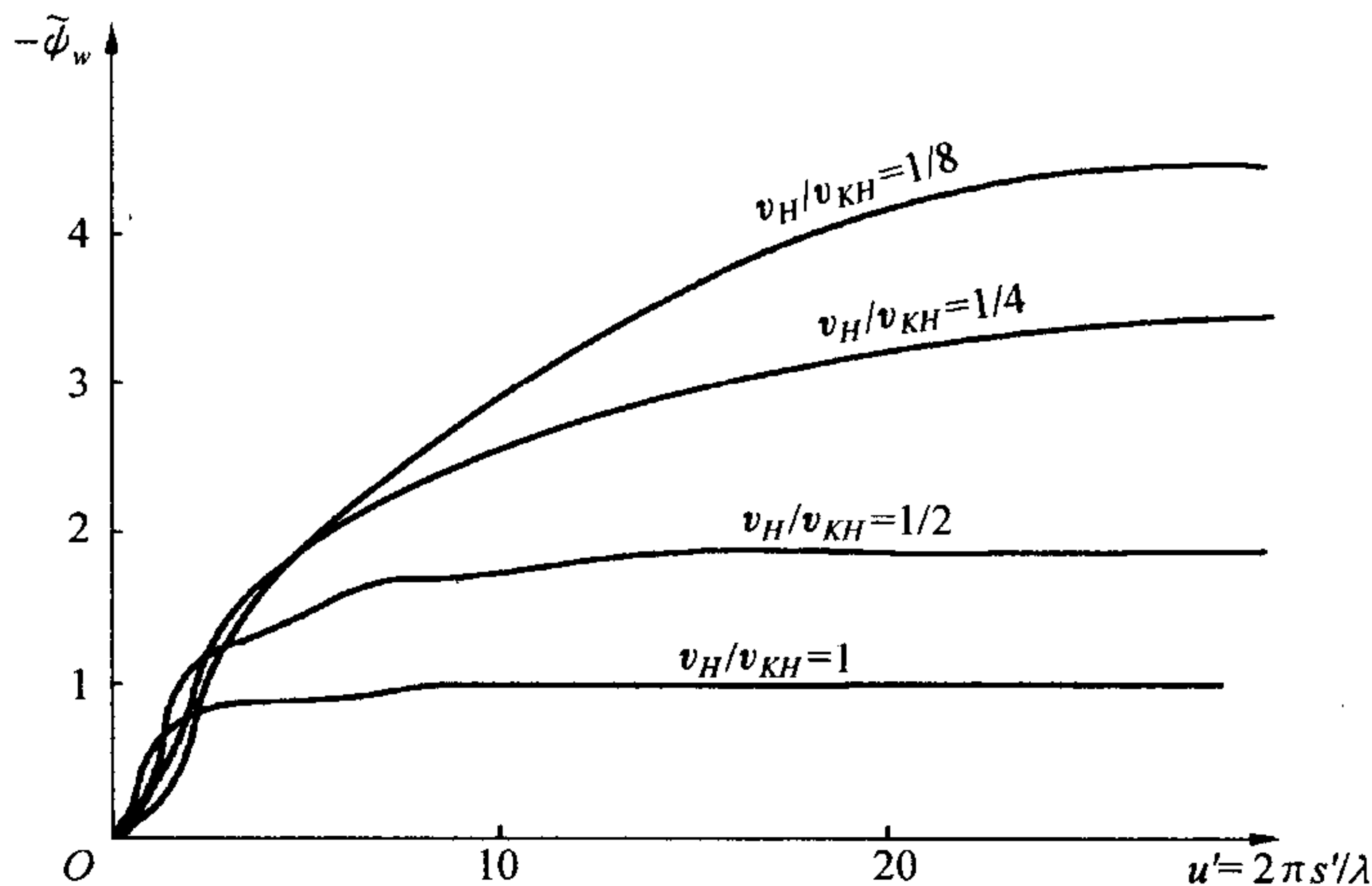


图 12.5  $-\tilde{\psi}_w - u'$  曲线

由上述情况可知, 在炮、箭速度比不大时, 采取较大的推力加速度有利减小风偏。但当速度比值较大时, 通过提高加速度的途径来减小风偏是困难的, 因为  $-\tilde{\psi}_w$  曲线随  $u'$  增加而上升的过程较短, 必须要求  $a_P$  有相当大的数值, 在这种情况下, 还是以小推力加速度为好。

当  $u'$  达到一定值时,  $-\tilde{\psi}_w$  值就不再随  $u'$  而变化, 这个  $u'$  满足什么条件? 从  $-\tilde{\psi}_w$  的表达式看, 函数  $B_R$  有一个特性,  $u_H$  (函数表上是  $u_0$ ) 达到足够大的值时, 比如  $u_H > \pi$  时, 可取  $B_R \approx 0$ , 于是式 (12.16) 变为下式

$$\tilde{\psi}_w \approx -\frac{v_{KH}}{v_H} \quad (12.17)$$

$\tilde{\psi}_w$  的极限值, 仅由速度比来决定。从图 12.5 也看得很清楚, 当  $v_H/v_{KH} = 1/2$  时,  $-\tilde{\psi}_w$  的极限值为 2; 当  $v_H/v_{KH} = 1/4$  时,  $-\tilde{\psi}_w$  的极限值为 4, 等等。

因为  $u_H = ks_H = 2\pi s_H/\lambda$ , 则  $u_H > \pi$  的条件相当于  $s_H/\lambda > 1/2$ ; 就是说, 点火时的有效滑轨长大于半个波长时, 在给定  $v_K$  下, 风偏仅决定于速度比  $v_H/v_{KH}$ 。这种情况下的风偏与火箭其他参数无关, 更与加速度大小无关, 这是一种很重要的情况。对此称火箭满足了“高初速条件”。

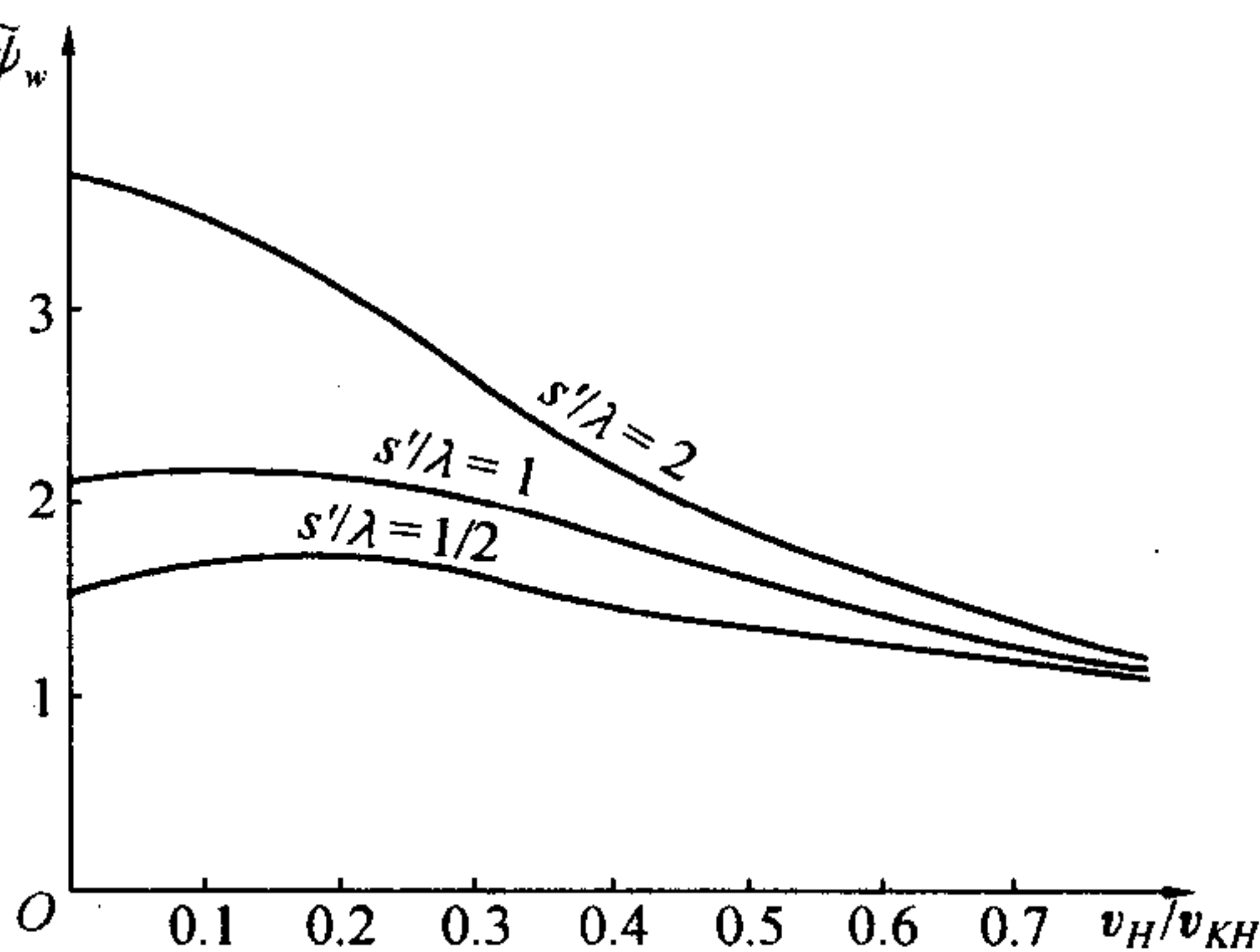


图 12.6  $-\tilde{\psi}_w - v_H/v_{KH}$  曲线





“高初速条件”为

$$s_H > \frac{\lambda}{2} \quad (12.18)$$

在此条件下,欲改变风偏大小,惟一的途径只有改变炮、箭速度比,另无其他办法。

由于  $s_H = v_H^2/(2\bar{a})$ ,那么式(12.18)也可写为下列条件

$$v_H > \sqrt{\bar{a}\lambda} \quad (12.19)$$

这是高初速条件的另一种形式。值得注意的是,所谓“高初速”,不是指  $v_H$  的绝对数值说的,而是相对乘积  $\bar{a}\lambda$  来说的,是一个相对的概念。

将式(12.18)代入式(12.9),可得

$$u' > \pi \left( \frac{v_{KH}}{v_H} \right)^2 \quad (12.20)$$

这也是高初速条件的一种表达式。以此条件去看图 12.3,可发现  $\phi_L^*$  在高初速条件下是随  $u'$  增加而递减的。就是说,在高初速条件下,减小推力加速度,对减小推力偏心引起的散布总是有利的。再看图 12.1,在条件(12.20)下的  $\sqrt{u_K} R_{\phi_0}(u_H, u_K)$  曲线,除了  $v_H/v_{KH}$  之值很小外,也是随  $u'$  增加而减小的。总之,就绝大多数情况看,在高初速条件下的角散布  $B(\phi_{\psi_H})$ 、 $B(\phi_{\beta_D})$ 、 $B(\phi_L)$  都随推力加速度减小而减小,而  $B(\phi_w)$  与它无关。这是高初速条件下的显著特点。

至于其他参数对散布的影响,分析起来并不困难。转速  $\dot{\gamma}_H$ (或  $n_\lambda$ ) 仅影响  $B(\phi_{\beta_D})$  和  $B(\phi_L)$ ,一个随  $\dot{\gamma}_H$  增加,一个随之减小,可作总散布曲线适当确定。但必须避开共振点,即  $n_\lambda$  不能在 1 附近,同时要满足稳定条件,此问题将在下一章介绍。

关于  $k$ ,亦可由作曲线确定。

通过上面分析看到,由于引进了两个重要参量  $v_H/v_{KH}$  和  $u'$ ,除了转速以外,它们便综合体现了影响增程弹扰动运动特性的主要参数。正确决定这两个参数,是增程弹设计中的重要任务之一。在具备高初速条件的情况下,通过减小推力加速度,有可能使散布  $B(\phi_{\psi_H})$ 、 $B(\phi_{\beta_D})$  和  $B(\phi_L)$  减小到相当的程度,但风偏的减小则依赖于  $v_H/v_{KH}$  的提高。在高初速条件下,某些其他扰动因素(譬如  $\phi_H$ )将会不改变其值而直接传到主动段末,是需要注意的。在高初速条件下,增程弹的诸扰动因素所引起的散布量都比较小(也许对风要除外)。相对地说,推力也小,升力的影响会增强,甚至比推力法向分量还大,就有必要寻求适于此条件下的更准确的特征函数公式。

## 12.3 起始扰动引起偏角的极限值

### 12.3.1 公式推导

在推导特征函数时,总把推力作为占绝对优势的量,但在高初速条件下,它对速度的方向



改变的影响甚至不及升力。因此原有特征函数用于此种情况,可能会带来比较大的相对误差。于是针对此种特点需重新推导其散布公式。

考虑有转速的情况,并且  $\Gamma = \dot{\gamma}/v$  可为变量。为方便计,下面将以弹道弧长  $s$  为自变量,并且仍以“ $'$ ”表示变量对  $s$  的导数(为了避免引入更多符号),则

$$\Gamma' = \frac{d\Gamma}{ds} = \frac{d\Gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} \dot{\Gamma} = \frac{1}{v} \left( \frac{\ddot{\gamma}}{v} - \frac{\dot{\gamma}}{v^2} \dot{v} \right) = \frac{1}{v^2} (\ddot{\gamma} - \Gamma \dot{v}) \quad (12.21)$$

式(8.153) 第二方程的齐次方程为

$$\Phi - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} \right) v \Phi + k^2 v^2 \Delta = 0 \quad (12.22)$$

亦可写为

$$\Phi' - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} \right) \Phi + k^2 (v\Delta) = 0 \quad (12.23)$$

又式(8.153) 第一方程的齐次方程为

$$v\Psi - a_P\Delta - b_y v^2 \Delta = 0 \quad (12.24)$$

将  $\Psi = \Phi - \Delta$  代入,有

$$\Phi - \Delta - \frac{a_P\Delta}{v} - b_y (v\Delta) = 0 \quad (12.25)$$

而

$$\Delta + \frac{a_P\Delta}{v} = \Delta + \frac{\dot{v}}{v} \Delta + \left( b_x + \frac{g \sin \theta}{v^2} \right) (v\Delta) = (v\Delta)' + \left( b_x + \frac{g \sin \theta}{v^2} \right) (v\Delta) \quad (12.26)$$

将上式代入式(12.25),得

$$\Phi - (v\Delta)' - b_N (v\Delta) = 0 \quad (12.27)$$

式中

$$b_N = b_x + b_y + \frac{g \sin \theta}{v^2} \quad (12.28)$$

于是得以  $s$  为自变量的联立方程组

$$\begin{cases} \Phi' - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} \right) \Phi + k^2 (v\Delta) = 0 & \text{①} \\ \Phi - (v\Delta)' - b_N (v\Delta) = 0 & \text{②} \\ \Phi - \Psi - \Delta = 0 & \text{③} \end{cases} \quad (12.29)$$

初始条件为

$$s = s_H \text{ 时, } \Phi = \Phi_H, \Psi = \Psi_H, \Delta = \Delta_H$$

下面将通过某种特殊办法求得偏角的极限值。

假设火箭的运动是稳定的,就是说,当  $s$  足够大时,即  $s \rightarrow \infty$  时,  $\Delta \rightarrow 0$ 。由于

$$\Psi - \Psi_H = \Phi - \Phi_H + \Delta_H - \Delta$$

则

$$\lim(\Psi - \Psi_H) = \lim(\Phi - \Phi_H + \Delta_H) \quad (12.30)$$



而

$$\Phi - \Phi_H = \int_{s_H}^s \frac{\dot{\Phi}}{v} ds \quad (12.31)$$

故

$$\lim(\Psi - \Psi_H) = \lim \int_{s_H}^s \frac{\dot{\Phi}}{v} ds + \Delta_H \quad (12.32)$$

可见,欲求  $\Psi$  的极限,关键在于求  $\int_{s_H}^s (\dot{\Phi}/v) ds$  的极限。而  $\Phi$  须从方程组(12.29)去求。为此需将式(12.29)化为以  $\Phi$  为函数的一元微分方程。将式(12.29)①对  $s$  求导一次,再将式(12.29)②的  $(v\Delta)'$  表达式代入,得

$$\dot{\Phi}'' - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} \right) \dot{\Phi}' - i \frac{\Gamma'}{n} \dot{\Phi} + k^2 [\dot{\Phi} - b_N(v\Delta)] = 0$$

再将式(12.29)①中的  $k^2(v\Delta)$  表达式代入,得

$$\dot{\Phi}'' + \left( b_N + k_{zd} - i \frac{\Gamma}{n} \right) \dot{\Phi}' + \left[ k^2 - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} \right) b_N - i \frac{\Gamma'}{n} \right] \dot{\Phi} = 0$$

忽略  $k_{zd}b_N$  项,便得如下方程

$$\dot{\Phi}'' - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N \right) \dot{\Phi}' + \left( k^2 - i \frac{\Gamma}{n} b_N - i \frac{\Gamma'}{n} \right) \dot{\Phi} = 0 \quad (12.33)$$

再将式(12.29)①重写如下

$$\dot{\Phi}' - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} \right) \dot{\Phi} + k^2(v\Delta) = 0 \quad (12.34)$$

显然,方程(12.33)是利用方程(12.34)得到的,它们两者之间存在着某种内在联系,令  $P$  表示线性算子,并且

$$P = D^2 - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N \right) D + \left( k^2 - i \frac{\Gamma}{n} b_N - i \frac{\Gamma'}{n} \right) \quad (12.35)$$

式中,  $D$  为微分算子,  $D = \frac{d}{ds}$ ;  $Q$  为共伴随算子,且

$$Q = D^2 + \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N \right) D + \left( k^2 - i \frac{\Gamma}{n} b_N \right) \quad (12.36)$$

作组合式

$$[P(\dot{\Phi})f(s) - Q(f)\dot{\Phi}]$$

它是函数

$$\left[ f\dot{\Phi}' - f'\dot{\Phi} - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N \right) f\dot{\Phi} \right]$$

的导函数,于是

$$\int_{s_H}^s [P(\dot{\Phi})f(s) - Q(f)\dot{\Phi}] ds = \left[ f\dot{\Phi}' - f'\dot{\Phi} - \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N \right) f\dot{\Phi} \right] \Big|_{s_H}^s \quad (12.37)$$





显然,当取

$$Q(f) = -\frac{1}{v} \quad (12.38)$$

时,式(12.37)左边为

$$\int_{s_H}^s \frac{\dot{\Phi}}{v} ds$$

而右边的  $\dot{\Phi}'$  由式(12.34)代入,则得

$$\int_{s_H}^s \frac{\dot{\Phi}}{v} ds = [(b_N f - f')\dot{\Phi} - k^2(v\Delta)f] \Big|_{s_H}^s \quad (12.39)$$

将上式代入式(12.32),便得

$$\lim(\Psi - \Psi_H) = \lim[(b_N f - f')\dot{\Phi} - k^2(v\Delta)f] \Big|_{s_H}^s + \Delta_H \quad (12.40)$$

因此,现在的问题是要解方程式(12.38),以求出  $f$ 。将算子  $Q$  的表达式(12.36)代入式(12.38),得

$$f = \frac{1}{D^2 + \left(i\frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N\right)D + \left(k^2 - i\frac{\Gamma}{n}b_N\right)} \left(-\frac{1}{v}\right) \quad (12.41)$$

可将算子分式展开成下列级数

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{D^2 + \left(i\frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N\right)D + \left(k^2 - i\frac{\Gamma}{n}b_N\right)} = \\ & \frac{-1}{k^2 - i\frac{\Gamma}{n}b_N} \left\{ 1 - \frac{i\frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N}{k^2 - i\frac{\Gamma}{n}b_N} D - \frac{1}{k^2 - i\frac{\Gamma}{n}b_N} \left[ 1 - \frac{\left(i\frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N\right)^2}{k^2 - i\frac{\Gamma}{n}b_N} \right] D^2 + \dots \right\} \approx \\ & -\frac{1}{k^2} \left( 1 + i\frac{\Gamma}{n} \frac{b_N}{k^2} \right) + \frac{1}{k^4} \left( i\frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N \right) D + \frac{1}{k^4} D^2 + \dots \end{aligned} \quad (12.42)$$

将式(12.42)代入式(12.41),并注意到

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{v}\right) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{ds} = -\frac{\dot{v}}{v^3} \\ D^2\left(\frac{1}{v}\right) &= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{3\dot{v}^2}{v^5} - \frac{\ddot{v}}{v^4} \approx 3\frac{\dot{v}^2}{v^5} \end{aligned}$$

则得(取级数前三项)

$$f = -\frac{1}{k^2 v} \left[ \left( 1 + i\frac{\Gamma b_N}{n k^2} \right) + \frac{1}{k^2} \left( i\frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N \right) \frac{\dot{v}}{v^2} - \frac{3}{k^2} \left( \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 \right] \quad (12.43)$$



对上式求导数

$$f' = -i \frac{\Gamma' b_N}{nk^2} \left( \frac{1}{k^2 v} \right) + \left( 1 + i \frac{\Gamma b_N}{nk^2} - i \frac{\Gamma'}{nk^2} \right) \frac{\dot{v}}{k^2 v^3} + \frac{3}{k^4} \left( i \frac{\Gamma}{n} - k_{zd} - b_N \right) \frac{\dot{v}^2}{v^5} - \frac{15}{k^2} \left( \frac{\dot{v}^3}{v^7} \right)$$

于是(略去  $1/v^7$  项)

$$b_N f - f' = -\frac{1}{k^2 v} \left\{ b_N + \left[ 1 - \frac{b_N}{k^2} (k_{zd} + b_N) \right] \frac{\dot{v}}{v^2} + i \frac{\Gamma}{nk^2} \left[ \left( b_N + \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 \right] - i \frac{\Gamma'}{nk^2} \left( b_N + \frac{\dot{v}}{v^2} \right) - 3(k_{zd} + 2b_N) \frac{1}{k^2} \left( \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 \right\}$$

由于  $b_N(k_{zd} + b_N)/k^2 \ll 1$ , 故上式可简化为下式

$$b_N f - f' = -\frac{1}{k^2 v} \left\{ \left( b_N + \frac{\dot{v}}{v^2} \right) \left( 1 - i \frac{\Gamma'}{nk^2} \right) + i \frac{\Gamma}{nk^2} \left[ \left( b_N + \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 \right] - 3(k_{zd} + 2b_N) \frac{1}{k^2} \left( \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 \right\} \quad (12.44)$$

将上式代入式(12.40), 并注意到  $s$  足够大时,  $\Phi/v$  和  $\Delta$  都趋于零, 因此便得

$$\begin{aligned} \lim(\Psi - \Psi_H) &= \Phi_H \frac{1}{k^2 v_H} \left\{ \left( b_N + \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right) \left( 1 - i \frac{\Gamma'_H}{nk^2} \right) + i \frac{\Gamma_H}{nk^2} \left[ \left( b_N + \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. 3(k_{zd} + 2b_N) \frac{1}{k^2} \left( \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right)^2 \right\} - \Delta_H \left[ i \frac{\Gamma_H}{nk^2} \left( b_N + \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{b_N + k_{zd}}{k^2} \left( \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right) - \frac{3}{k^2} \left( \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (12.45)$$

上式中,

$$b_N + \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} = b_x + b_y + \frac{g \sin \theta_H}{v_H^2} + \frac{1}{v_H^2} (a_P - b_x v_H^2 - g \sin \theta_H) = b_y + \frac{a_P}{v_H^2}$$

另外, 注意到  $\Delta_H = \Phi_H - \Psi_H$ , 从而由式(12.45)知  $\Phi_H$ 、 $\Phi_H$  和  $\Psi_H$  所对应的特征函数<sup>①</sup> 分别如下

$$\begin{aligned} \Psi_{\Phi_H}^*(s_H, \infty) &= \frac{1}{k^2 v_H} \left\{ \left( b_y + \frac{a_P}{v_H^2} \right) \left( 1 - i \frac{\Gamma'_H}{nk^2} \right) + i \frac{\Gamma_H}{nk^2} \left[ \left( b_y + \frac{a_P}{v_H^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. 3(k_{zd} + b_N) \frac{1}{k^2} \left( \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (12.46)$$

$$\Psi_{\Phi_H}^*(s_H, \infty) = -i \frac{\Gamma_H}{nk^2} \left( b_y + \frac{a_P}{v_H^2} \right) + 2 \frac{b}{k} \left( \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right) + \frac{3}{k^2} \left( \frac{\dot{v}_H}{v_H^2} \right)^2 \quad (12.47)$$

$$\Psi_{\Psi_H}^*(s_H, \infty) = 1 - \Psi_{\Phi_H}^*(s_H, \infty) \approx 1 \quad (12.48)$$

① 值得注意的是, 若直接由给出的初始值  $\Phi_H$ 、 $\Delta_H$  和  $\Psi_H$  计算偏角, 那么由式(12.45)知所对应的一组特征函数应为:  $\Psi_{\Phi_H}^*(s_H, \infty)$ ;  $\Psi_{\Delta_H}^*(s_H, \infty) = \Psi_{\Phi_H}^*(s_H, \infty)$ ;  $\Psi_{\Psi_H}^*(s_H, \infty) = 1$



式(12.47)中的  $b$  见式(7.44)。

### 12.3.2 简要分析

对式(12.46)作数量级比较,多数情况下可以将其简化为下式

$$\psi_{\dot{\varphi}_H}^*(s_H, \infty) \approx \frac{1}{k^2 v_H} \left( b_y + \frac{a_P}{v_H^2} \right) \quad (12.49)$$

这个式子表明,陀螺效应对  $\Psi_{\dot{\varphi}_H}^*$  的影响可以忽略,只剩下实部。这是一个准确性较好而又简明的公式,它明显地表明了法向力(升力和推力法向分量)对速度偏角的影响。事实上式(12.49)可变为下式

$$\psi_{\dot{\varphi}_H}^*(s_H, \infty) \approx \frac{1}{mv_H} \frac{mb_y v_H^2 \delta + ma_P \delta}{k^2 v_H^2 \delta} = \frac{1}{mv_H} \frac{R_y + F_P \delta}{\frac{M_Z}{A}} \quad (12.50)$$

式中,  $R_y$  为升力;  $F_P \delta$  为推力法向分量;  $mv_H$  为初始动量;  $M_Z$  为稳定力矩。可见,单位起始摆动角速度引起的偏角与法向力成正比,与初始动量及稳定力矩对赤道转动惯量的比值成反比。这一情况是易于从物理意义上理解的。

式(12.49)表明,减小推力加速度,增加初速,增加稳定性参量  $k$ , 都有利于减小  $\dot{\varphi}_H$  引起的偏角,这与上一节的一般分析是吻合的。为便于清楚地看出各参量的影响,将式(7.27)的  $b_y$  和  $k$  代入式(12.49),并注意到式(7.10)和式(7.12)

$$m'_z = \frac{l_d}{l} (C'_y + C_x) \approx \frac{l_d}{l} C'_y$$

则

$$\psi_{\dot{\varphi}_H}^* = \frac{R_A^2}{l_d v_H} + \frac{2ma_P R_A^2}{\rho S C'_y l_d v_H^3} \quad (12.51)$$

式(12.51)第一项是普通尾翼弹起始扰动引起的平均偏角,可参阅式(7.126),现在就是多了一个推力法向分量引起的第二项。在高初速条件下,往往第二项比第一项小。可见,为减小偏角从而减小角散布,最有效的办法之一,是加大尾翼到质心间的距离(如加尾管),以便使压力中心到质心距离  $l_d$  加长;因为  $\psi_{\dot{\varphi}_H}^*$  与  $l_d$  是反比关系!这比用增加翼展以使  $C'_y$  加大的办法要好得多,因为  $C'_y$  仅影响第二项,并且它是较次要的项。

就  $\Psi_{\dot{\varphi}_H}^*$  的表达式(12.47)来看,它是由虚部和实部组成,在未对具体型号的数据进行计算以前,很难断定这两部分谁是主要项;在转速较低时,可只保留实部。减小偏角的办法与  $\psi_{\dot{\varphi}_H}^*$  是类似的。

就式(12.48)来看,  $\Psi_H$  这个起始偏角将不会发生改变地传到主动段末端。对增程弹,特别是对反坦克增程弹的立靶散布,将会是一个很重要的根源。





## 12.4 周期性扰动因素引起的散布

推力线偏心、推力偏心角、动不平衡、气动偏心等扰动因素都随火箭一道绕纵轴旋转。在一个波长内,如果自转周数  $n_\lambda$  至少不小于 2,那么其强迫运动的幅值比自由运动要小得多,可以只计自由运动而将这些周期性扰动因素当作某一等效起始扰动处理。以线推力偏心  $L$  来讲,它在  $K$  点所引起的角散布为式(9.59),即

$$B(\phi_{LK}) = B_L \frac{a_P}{R_A^2 \dot{\gamma}_H} \psi_{\phi_H}^*(s_H, \infty) \quad (12.52)$$

在高初速条件下,式中,  $\psi_{\phi_H}^*(s_H, \infty)$  按(12.49) 式计算。

计算表明,公式(12.52) 对  $n_\lambda$  小于 2,甚至对反坦克火箭增程弹,小到  $n_\lambda = 1.5$  时,其准确性还是令人满意的。现今火箭设计中,一般  $n_\lambda$  不可能小于 1.5,因为小于 1.5 时,其共振效应将带来严重后果——攻角急剧加大,火箭强度受影响等等。

应该指出,当  $n_\lambda$  小到 1.5 这样数值时,推力偏心引起的攻角及偏角曲线,都将明显地表现出强迫运动的特性。其变化规律如图 12.7 和图 12.8 所示<sup>[6]</sup>。

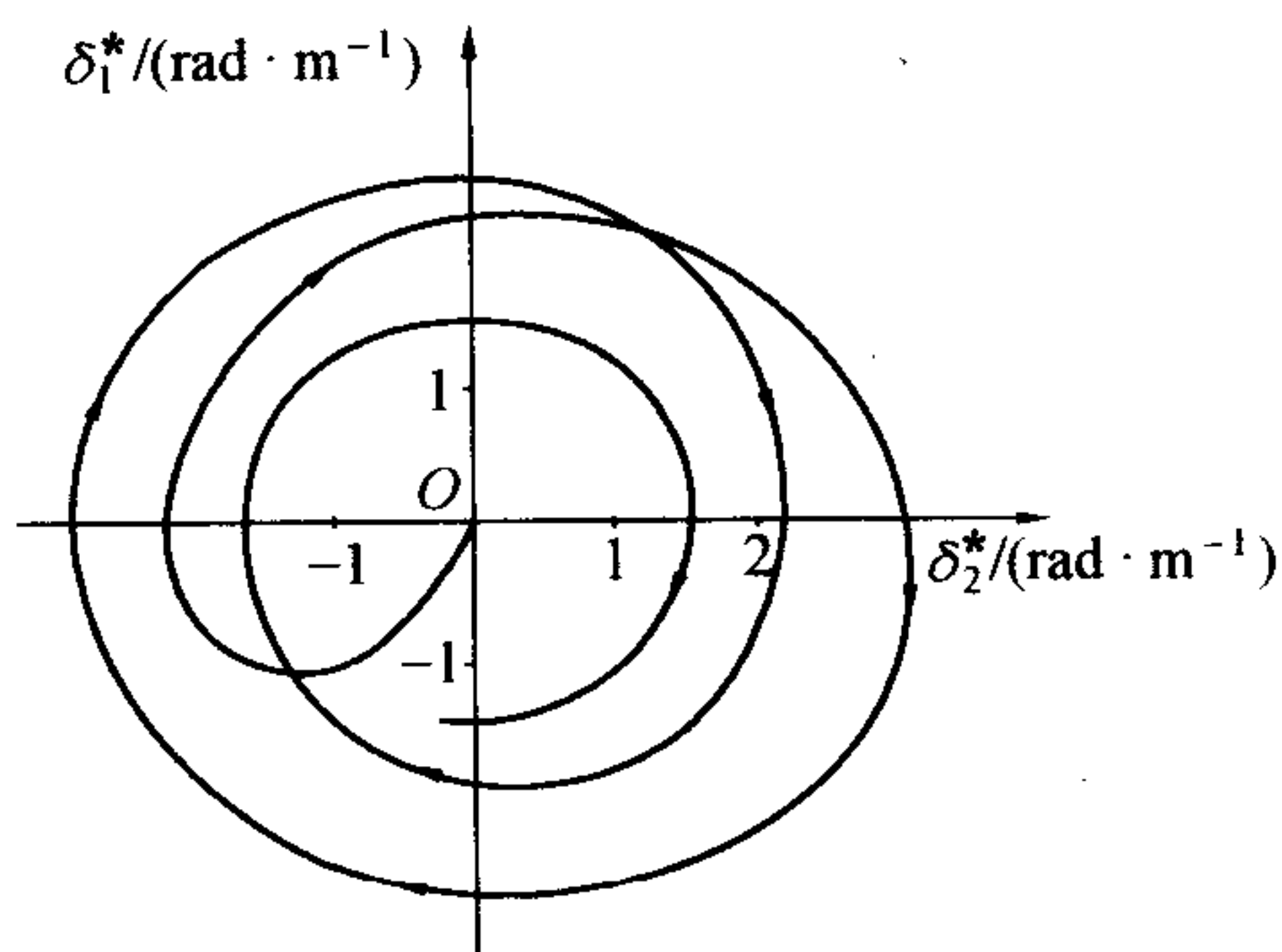


图 12.7  $\Delta_L^*$  曲线

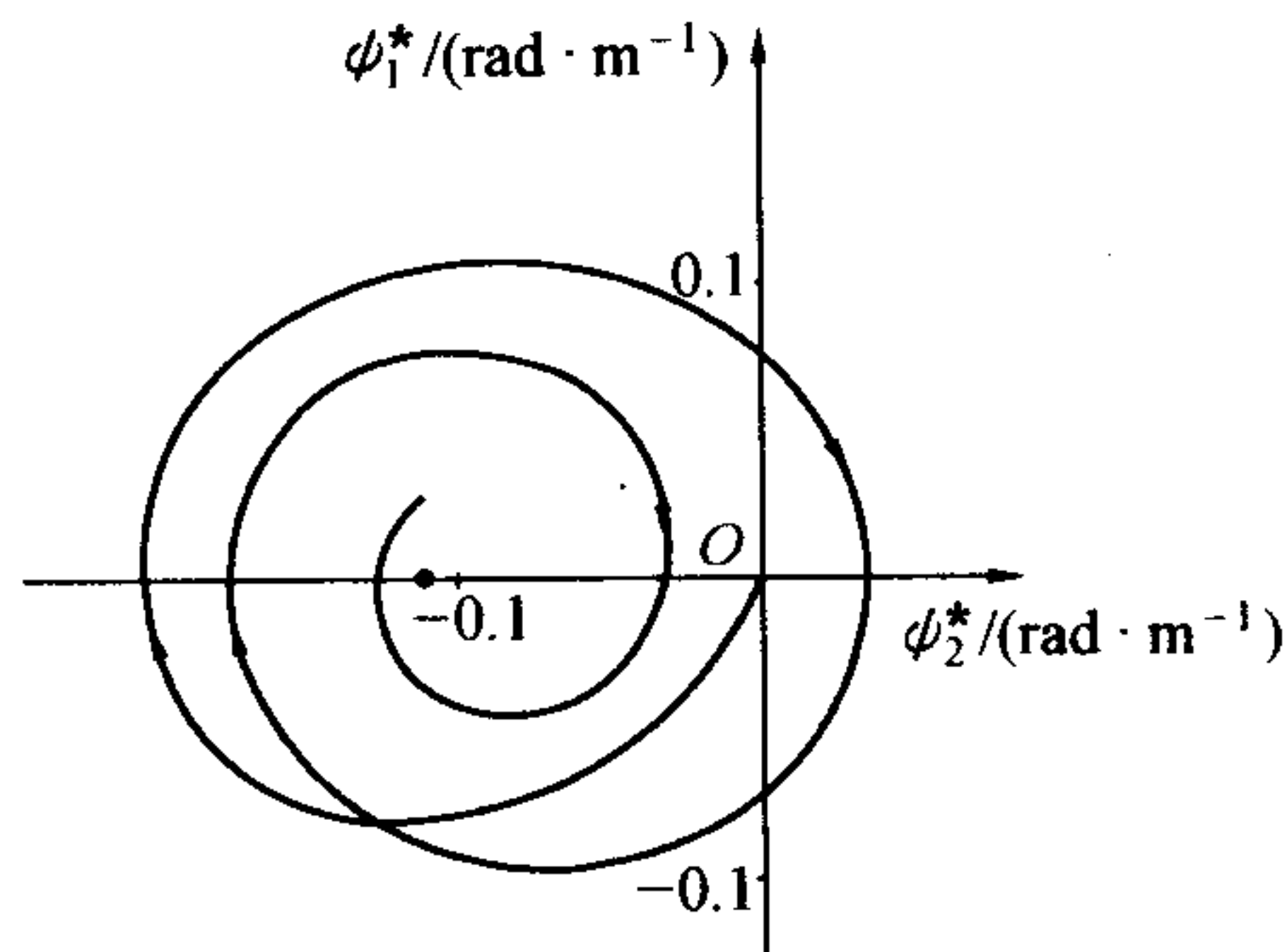


图 12.8  $\Psi_L^*$  曲线

图 12.7 的  $\Delta_L^*$  曲线,可以用解析方法推导出来。由微分方程(9.14) 知(由于所研究的火箭转速很低,取  $S_g \approx 0$ )

$$W'' + 2bW' + W = -\frac{a_P L}{k^2 R_A^2 v} \exp[in_\lambda(u - u_H)] \quad (12.53)$$

其中  $\gamma$  表达式引自式(9.46)。方程(12.53) 的初始条件( $u = u_H$  时) 为

$$\begin{cases} W' = (v\Delta)' = 0 \\ W = (v\Delta) = 0 \end{cases} \quad (12.54)$$



设式(12.53)的特解为

$$W = A_3(u) \exp[in_\lambda(u - u_H)] \quad (12.55)$$

代入式(12.53),得

$$A_3'' + 2(b + in_\lambda)A_3' + (1 - n_\lambda^2 + i2bn_\lambda)A_3 = -\frac{a_p L}{k^2 R_A^2} \left( \frac{1}{v} \right)$$

引入微分算子  $D = d/du$ , 上式变为

$$[D^2 + 2(b + in_\lambda)D + (1 - n_\lambda^2 + i2bn_\lambda)]A_3 = -\frac{a_p L}{k^2 R_A^2} \left( \frac{1}{v} \right)$$

则

$$A_3 = \frac{-1}{D^2 + 2(b + in_\lambda)D + (1 - n_\lambda^2 + i2bn_\lambda)} \left( \frac{a_p L}{k^2 R_A^2 v} \right)$$

将算子分式按  $D$  的升幂展开成级数, 则

$$A_3 = \frac{-1}{1 - n_\lambda^2 + i2bn_\lambda} \left[ 1 - \frac{2(b + in_\lambda)}{1 - n_\lambda^2 + i2bn_\lambda} D + \dots \right] \left( \frac{a_p L}{k^2 R_A^2 v} \right)$$

考虑在高初速条件下, 有

$$\frac{\dot{v}}{v^2} < \frac{\bar{a}}{v_H^2} < \frac{1}{\lambda}$$

这样, 随着  $D$  的幂次升高, 对  $1/v$  来讲, 它在方括号内的系数, 从第二项起就已远远小于 1 了, 便可忽略不计。只取第一项, 便得

$$A_3 \approx \frac{n_\lambda^2 - 1 + i2bn_\lambda}{(1 - n_\lambda^2)^2 + (2bn_\lambda)^2} \left( \frac{a_p L}{k^2 R_A^2 v} \right) \quad (12.56)$$

记

$$A_L = \frac{n_\lambda^2 - 1 + i2bn_\lambda}{(1 - n_\lambda^2)^2 + (2bn_\lambda)^2} \left( \frac{a_p L}{k^2 R_A^2} \right) \quad (12.57)$$

则

$$A_3 \approx \frac{A_L L}{v} \quad (12.58)$$

求得了特解, 便可求方程(12.53)的通解。因其齐次方程的特征根为

$$-b \pm \sqrt{b^2 - 1} \approx -b \pm i$$

故通解形式为

$$W = \exp[-b(u - u_H)] \{ A_1 \exp[i(u - u_H)] + A_2 [-i(u - u_H)] \} + A_3 \exp[in_\lambda(u - u_H)] \quad (12.59)$$

将初始条件(12.54)代入, 可确定常数  $A_1$  和  $A_2$



$$\begin{cases} A_1 = -\frac{1}{2}(n_\lambda + 1 - ib) \frac{A_L L}{v_H} \\ A_2 = \frac{1}{2}(n_\lambda - 1 - ib) \frac{A_L L}{v_H} \end{cases} \quad (12.60)$$

于是将(12.58)、(12.60)两式代入式(12.59),得推力偏心矩引起的攻角为

$$\Delta_L = \frac{A_L L}{2vv_H} \{ - (n_\lambda + 1 - ib) \exp[i(u - u_H)] + (n_\lambda - 1 - ib) \exp[-i(u - u_H)] \} \cdot \exp[-b(u - u_H)] + \frac{A_L L}{v^2} \exp[in_\lambda(u - u_H)] \quad (12.61)$$

很明显,在弹道坐标系内,弹轴运动是由自由运动和强迫运动合成的。当  $n_\lambda$  与 1 的差值不大时,强迫运动的幅值并不小于自由运动幅值。又由于自由运动衰减较快(对反坦克增程弹,其  $b$  值比一般野战火箭的要大),到后来将由强迫运动起决定性作用,故图 12.7 的  $\Delta_L^*$  曲线便逐渐变成了以原点为焦点的螺线,其体现的半径不断变小的圆圈运动,正是式(12.61)的强迫运动项。

由攻角与偏角的几何关系(切线与割线关系),从图 12.7 就可以理解图 12.8 的偏角变化规律。这里不准备从攻角表达式(12.61)去仔细地推导偏角。有了式(12.52),偏角的散布计算问题便已基本上得到了解决。尽管式(12.52)中的  $\phi_L^*$  仅是偏角曲线  $\Psi_L^*$  的焦点到原点的距离(图 12.8),但对大于两、三个波长的主动段终点偏角来说,它足以体现出  $\Psi_L^*$  的实际大小。

关于动不平衡引起的攻角和偏角,在高初速条件下,且  $n_\lambda$  与 1 相差不大时,强迫运动亦占有重要地位。如同推导式(12.61)一样,可从微分方程(9.14)解出动不平衡  $\beta_D$  引起的攻角  $\Delta_{\beta_D}$ ,这里仅写出结果(特征函数)

$$\Delta_{\beta_D}^* = A_{\beta_D} n_\lambda^2 \frac{v_H}{2v} \{ (n_\lambda + 1 - ib) \exp[i(u - u_H)] - (n_\lambda - 1 - ib) \exp[-i(u - u_H)] \} \cdot \exp[-b(u - u_H)] - A_{\beta_D} n_\lambda^2 \exp[in_\lambda(u - u_H)] \quad (12.62)$$

$$\text{式中} \quad A_{\beta_D} = \frac{1}{n_\lambda^2 - 1 - i2bn_\lambda} = \frac{n_\lambda^2 - 1 + i2bn_\lambda}{(n_\lambda^2 - 1)^2 + (2bn_\lambda)^2} \quad (12.63)$$

图 12.9 的  $\Delta_{\beta_D}^*$  曲线是对某型号增程弹用电子计算机算得的,与式(12.62)是一致的。在曲线的开始一段系由自由项和强迫项合成的,随着弹道的增长,自由项逐渐衰减掉了,基本上只剩下强迫项。式(12.62)中的强迫项是一个圆,故攻角曲线的后段体现出弹轴的圆锥进动。

有了攻角  $\Delta_{\beta_D}^*$ ,将它代入式(9.11)积分,便得偏角  $\Psi_{\beta_D}^*$

$$\Psi_{\beta_D}^* = \frac{1}{k} \int_{u_H}^u \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \Delta_{\beta_D}^*(u_H, u) du = \frac{1}{k} \int_{u_H}^u \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) A_{\beta_D} n_\lambda^2 \frac{v_H}{2v} \{ (n_\lambda + 1 - ib) \exp[i(u - u_H)] -$$





$$(n_\lambda - 1 - ib) \exp[-i(u - u_H)] \} \exp[-b(u - u_H)] du - \frac{1}{k} \int_{u_H}^u \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) A_{\beta_D} n_\lambda^2 \exp[in_\lambda(u - u_H)] du \quad (12.64)$$

精确积分上式是困难的,因此需要一定简化,以求得近似解。考虑到高初速条件,  $a_P/v^2$  很小(不大于  $b_y$ ),且变化甚缓;  $v_H/v$  相对周期函数来说,也是变化很缓慢的。在求积分的近似运算中,如对积分  $\int f_1(x)f_2(x)dx$  求其原函数,其中  $f_1(x)$  是变化很缓慢的函数,  $f_2(x)$  是变化很快的函数,  $f_2(x)$  的原函数为  $F_2(x)$ ,那么就可以把  $f_1(x)F_2(x)$  近似地作为  $f_1(x)f_2(x)$  的原函数。因为

$$\frac{d}{dx}[f_1(x)F_2(x)] = \frac{df_1(x)}{dx}F_2(x) +$$

$$f_1(x) \frac{dF_2(x)}{dx} \approx f_1(x)f_2(x)$$

现在,对式(12.64)的积分来讲,  $f_2$  相当于  $\exp[(i-b)(u-u_H)]$ 、 $\exp[-(i+b)(u-u_H)]$  以及  $\exp[in_\lambda(u-u_H)]$ , 它们的原函数分别为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i-b} \exp[(i-b)(u-u_H)] \\ & - \frac{1}{i+b} \exp[-(i+b)(u-u_H)] \\ & \frac{1}{in_\lambda} \exp[in_\lambda(u-u_H)] \end{aligned}$$

于是式(12.64)成为下式

$$\Psi_{\beta_D}^* \approx \left\{ A_{\beta_D} \frac{n_\lambda^2 v_H}{2kv} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \left[ \frac{n_\lambda + 1 - ib}{i-b} \exp[(i-b)(u-u_H)] + \frac{n_\lambda - 1 - ib}{i+b} \exp[-(i+b)(u-u_H)] \right] - A_{\beta_D} \frac{n_\lambda}{i} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \exp[in_\lambda(u-u_H)] \right\} \Big|_{u_H}^u$$

将上下限代入,并利用表达式(12.49)和式(12.63),经整理得

$$\Psi_{\beta_D}^* = A_{\beta_D} n_\lambda^2 \frac{v_H}{2kv} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \left\{ \frac{n_\lambda + 1 - ib}{i-b} \exp[i(u-u_H)] + \frac{n_\lambda - 1 - ib}{i+b} \exp[-i(u-u_H)] \right\} \cdot \exp[-b(u-u_H)] + i\dot{\gamma}_H \psi_{\varphi_H}^*(s_H, \infty) + i\dot{\gamma} A_{\beta_D} \psi_{\varphi_H}^*(s, \infty) \exp[in_\lambda(u-u_H)] \quad (12.65)$$

式中

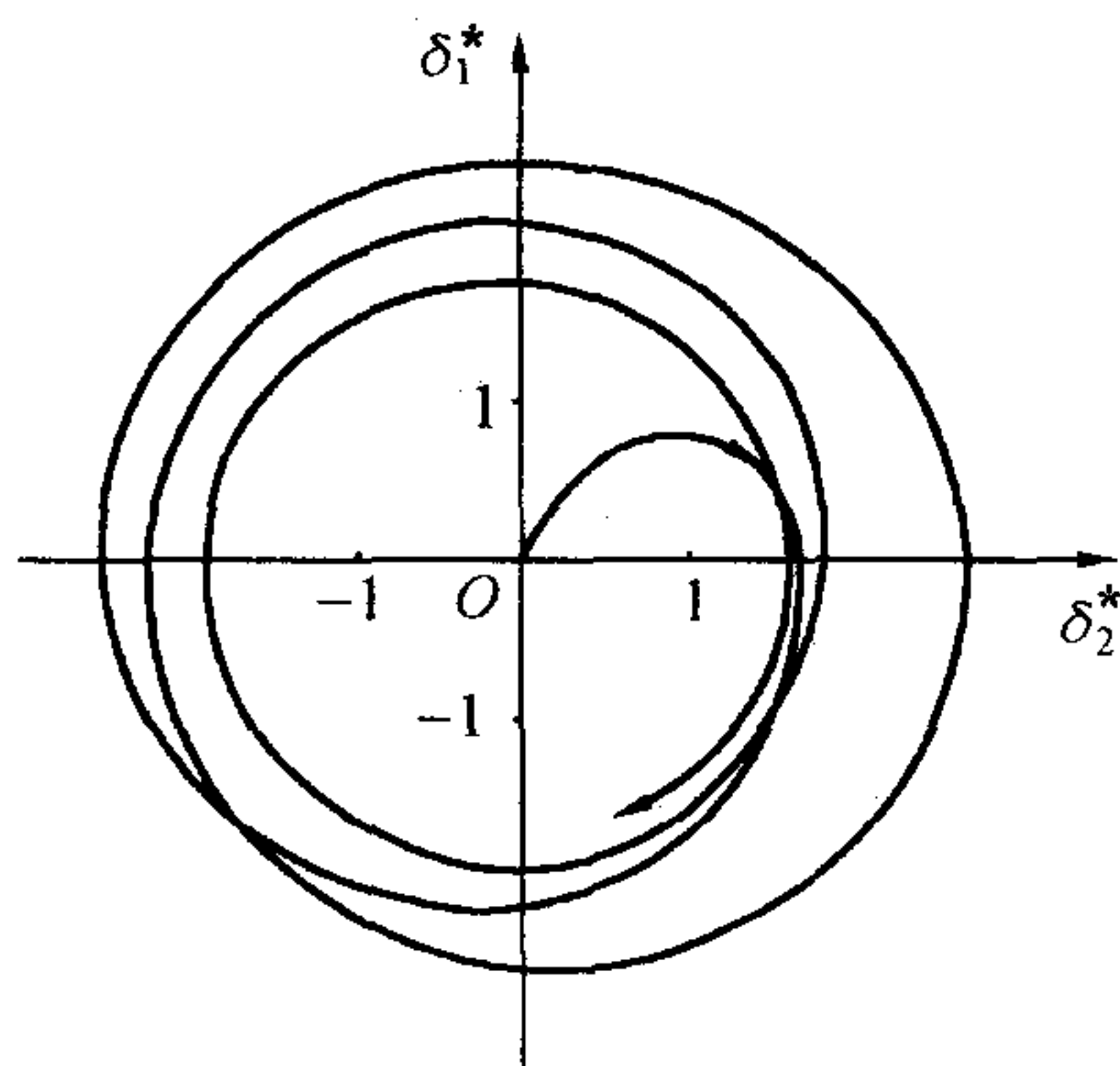


图 12.9  $\Delta_{\beta_D}^*$  曲线



$$\psi_{\varphi_H}^*(s, \infty) = \frac{1}{k^2 v} \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y \right) \quad (12.66)$$

式(12.65)表明,偏角由自由项、强迫项和常值项(平均项)组成,与图 12.10 的电子计算结果是一致的。自由项在开始一段起重要作用,经几个波长后,便就基本上衰减掉了,最后  $\Psi_{\beta_D}^*$  曲线成了一个中心(或曲线焦点)在虚轴正方向上的螺线(很接近圆)。

这样,略去式(12.65)的自由项,便得主动段末的偏角为

$$\Psi_{\beta_D K}^* \approx i\dot{\gamma}_H \psi_{\varphi_H}^*(s_H, \infty) + i\dot{\gamma}_K A_{\beta_D} \psi_{\varphi_H}^*(s_K, \infty) \times \exp[in_\lambda(u_K - u_H)] \quad (12.67)$$

式中,  $A_{\beta_D}$  可表示为

$$A_{\beta_D} = |A_{\beta_D}| \exp(i\epsilon)$$

式中

$$\epsilon = \arctan\left(\frac{2bn_\lambda}{n_\lambda^2 - 1}\right)$$

则  $\beta_D$  引起偏角幅值的平方为

$$|\Psi_{\beta_D}|^2 = |\beta_D|^2 \{ [\dot{\gamma}_H \psi_{\varphi_H}^*(s_H, \infty)]^2 + [(\dot{\gamma}_K |A_{\beta_D}| \psi_{\varphi_H}^*(s_K, \infty))]^2 + 2\dot{\gamma}_H \dot{\gamma}_K |A_{\beta_D}| \psi_{\varphi_H}^*(s_H, \infty) \psi_{\varphi_H}^*(s_K, \infty) \cos[n_\lambda(u_K - u_H) + \epsilon] \}$$

对多发弹射击时,幅角  $[n_\lambda(u_K - u_H) + \epsilon]$  是一个变化比较大的随机量,假定它在  $[-\pi, \pi]$  区间均匀分布,则依“两独立随机变量乘积的数学期望等于其数学期望乘积”的运算法则,得  $|\Psi_{\beta_D}|^2$  的数学期望为

$$E[|\Psi_{\beta_D}|^2] = E[|\beta_D|^2] \{ [\dot{\gamma}_H \psi_{\varphi_H}^*(s_H, \infty)]^2 + [\dot{\gamma}_K |A_{\beta_D}| \psi_{\varphi_H}^*(s_K, \infty)]^2 \}$$

将式(12.63)的  $A_{\beta_D}$  代入,得  $|\Psi_{\beta_D}|$  在一定方向投影的中间误差为

$$B(\psi_{\beta_D}) = B_{\beta_D} \sqrt{[\dot{\gamma}_H \psi_{\varphi_H}^*(s_H, \infty)]^2 + [\dot{\gamma}_K \psi_{\varphi_H}^*(s_K, \infty)]^2 [(n_\lambda^2 - 1)^2 + (2bn_\lambda)^2]^{-1}} \quad (12.68)$$

若将此式与式(9.86)对比,其差别在于此处计及了以焦点为中心的螺线半径。在高初速条件下,  $\dot{\gamma}_K \psi_{\varphi_H}^*(s_K, \infty)$  可取下式

$$\dot{\gamma}_K \psi_{\varphi_H}^*(s_K, \infty) = \frac{\Gamma}{k^2} \left( b_y + \frac{a_P}{v_K^2} \right) \approx n_\lambda \frac{b_y}{k} \quad (12.68^*)$$

周期性扰动因素,除了上述线推力偏心 and 动不平衡外,还有角推力偏心引起的推力侧分力  $F_{Pl}$  以及气动偏心、质量偏心等。在高初速条件下及  $n_\lambda$  与 1 相差不大时,强迫运动亦将显出其

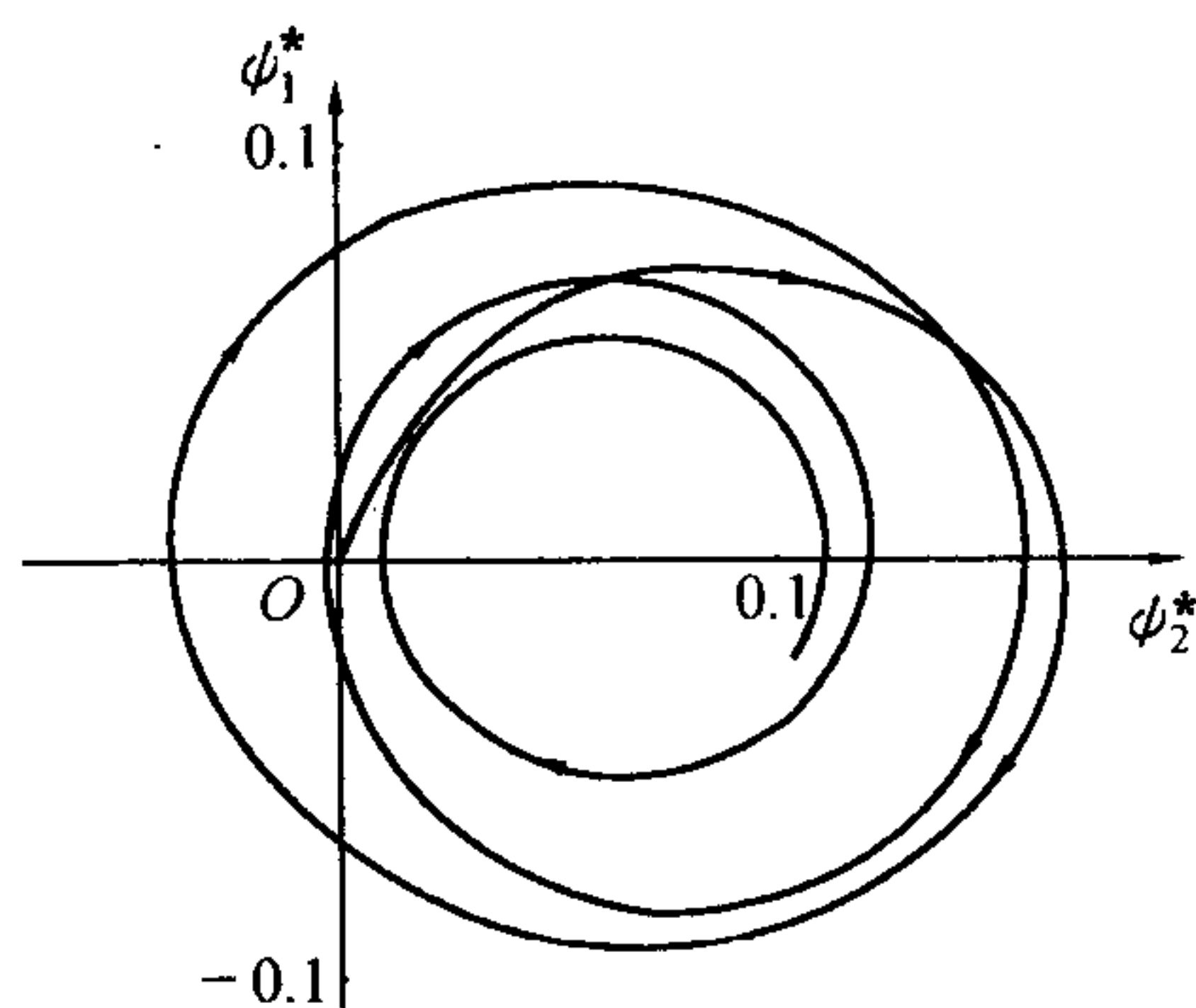


图 12.10  $\Psi_{\beta_D}^*$  曲线



重要影响;攻角和偏角的图象,与上述讨论过的两因素有很多相似之处。在现有工艺水平上,它们造成角散布的数量级,和线推力偏心造成的散布差不多。全面的散布计算表明,在  $n_\lambda > \sqrt{2}$  时,推力偏心( $L, \beta_p$ )与气动偏心所引起的散布将随转速增加而减小;而动静不平衡( $\beta_D, L_m$ )所引起的散布随转速增加而变大。在高初速条件下,前者在  $n_\lambda = 1 \sim 2$  的区间内减小得很快,在增程弹总体设计时,往往取  $n_\lambda$  值为  $1.5 \sim 2$ 。当然,这里指的是尾翼弹。这仅仅是从减小散布的角度来考虑的,它必须以满足全弹道内的飞行稳定性条件为前提。

## 12.5 合理点火条件的选择

有一类增程弹,由火炮发射出去后,飞达一定距离,发动机才开始点火。点火位置  $H$  到炮口  $O$  的实际弹道弧长  $s_H$  应如何确定呢?本节将从减小散布的要求出发来讨论这个问题<sup>[14~16]</sup>。

### 12.5.1 在起始段内的运动

在低速旋转范围内,起始扰动所引起的尾翼式火箭的扰动运动,可简化为平面摆动。当  $H$  点有扰动量  $\dot{\varphi}_H, \delta_H$  和  $\psi_H$  作用于同一平面时,便在主动段末的  $K$  点产生偏角  $\psi_K$ ,其表达式为

$$\psi_K = \dot{\varphi}_H \psi_{\dot{\varphi}_H}^* + \delta_H \psi_{\delta_H}^* + \psi_H \quad (12.69)$$

而  $\varphi_H = \delta_H + \psi_H$ ,可见  $\psi_K$  依赖于  $H$  点的  $\delta_H$  和  $\psi_H$ ,该二量则取决于起始段内的运动。为了求得  $\delta_H$  和  $\psi_H$ ,需要了解火箭在起始段  $\widehat{OH}$  内的运动规律。当忽略陀螺效应时,在炮口扰动量  $\dot{\delta}_0$  和  $\delta_0$  作用下的攻角表达式可由公式(7.125)得

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{kv} \exp(-bu) \sin u + \delta_0 \frac{v_0}{v} \exp(-bu) \cos u \quad (12.70)$$

由于起始段很短(譬如对反坦克增程弹,一般都在 50 m 以下),故衰减可不考虑,取

$$\frac{1}{v} \exp(-bu) \approx \frac{1}{v_0}$$

式(12.70)可认为是射击面内的表达式,也适用于横向。代入式(7.45),得偏角为

$$\psi = \dot{\delta}_0 K_n (1 - \cos u) + \delta_0 k v_0 K_n \sin u + \psi_0 \quad (12.71)$$

式中

$$K_n = \frac{b_y}{k^2 v_0} \approx \frac{R_A^2}{l_d v_0} \quad (12.72)$$

以上是一种理想的情况。其实,根据试验测定,攻角变化曲线在靠近炮口一段弹道内(大约几米),并不符合表达式(12.70)的函数规律,如图 12.11 那样。这显然是由于炮口后效期作用,以及尾翼(折叠式)张开过程的影响。若将攻角曲线变化规则的部分循其规律向坐标原点方向延伸(图中虚线表示),并且与横坐标轴相交于点  $O^*$ ,那么在  $O^*$  点的攻角值为零,但攻角角速度不等于零。这个攻角角速度是虚拟的,不是测量值,为了避免引入更多的符号,约定仍用  $\dot{\delta}_0$





这个符号表示。还可把  $O^*$  看成是一个虚拟的炮口, 把  $\dot{\delta}_0$  称为虚拟炮口扰动。这样, 整个攻角曲线便是由  $\dot{\delta}_0$  在  $O^*$  处作用的结果。于是, 式(12.70) 便用下列简单的攻角表达式替代

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{kv_0} \sin(u - u^*) \quad (12.73)$$

式中,  $u^*$  是  $OO^*$  之距离  $s^*$  与  $k$  之积。

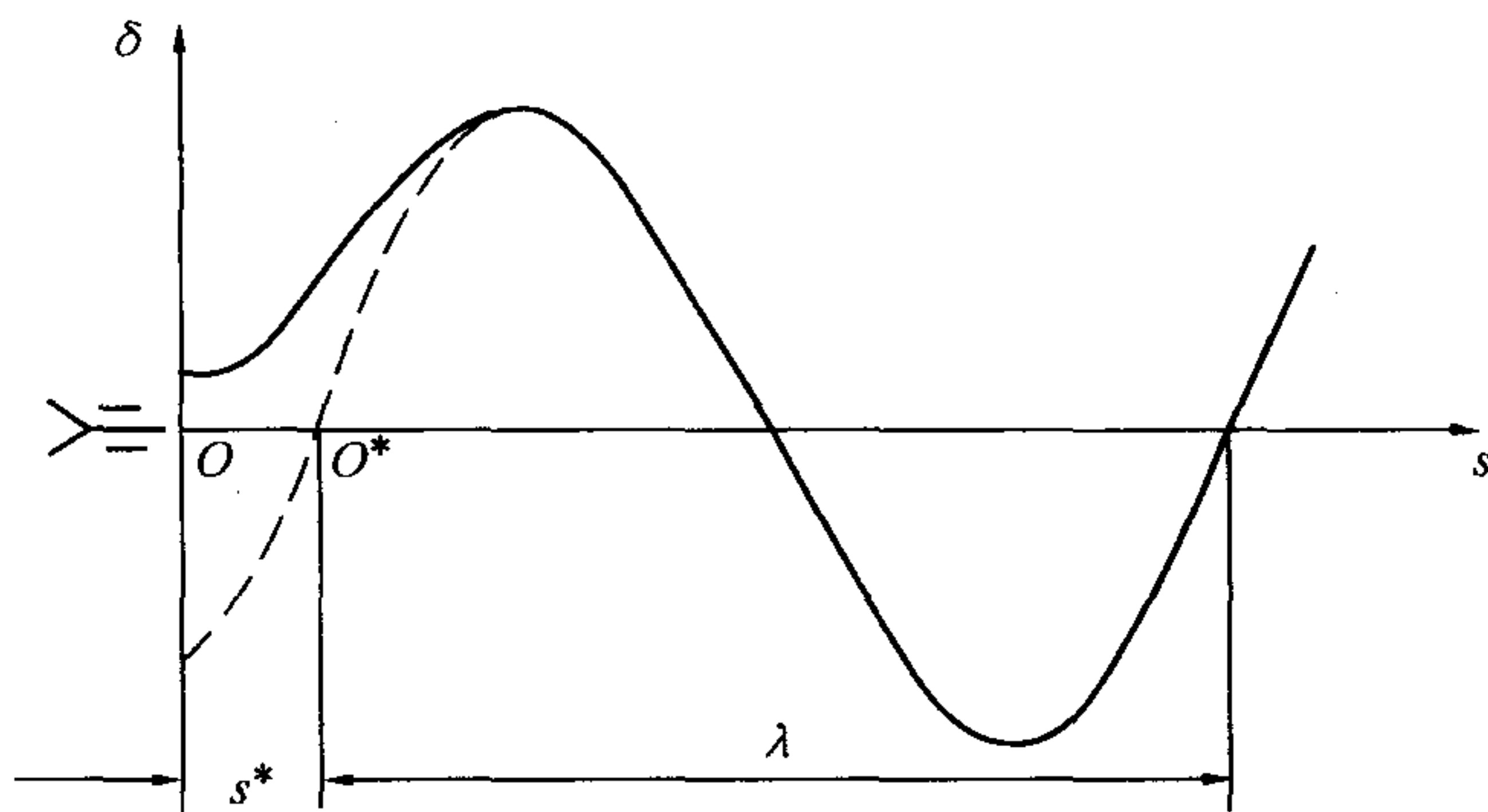


图 12.11  $\delta - s$  曲线

通常  $\dot{\delta}_0$  是由试验测得的攻角曲线反求的, 由攻角最大值  $\delta_{\max}$  和波长  $\lambda$ , 便从式(12.73) 知

$$\dot{\delta}_0 = kv_0 \delta_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda} v_0 \delta_{\max} \quad (12.74)$$

而偏角的表达式相应地成为下式

$$\psi = \dot{\delta}_0 K_n [1 - \cos(u - u^*)] + \psi_0 \quad (12.75)$$

根据目前对反坦克增程弹实测数据来看, 虚拟炮口扰动  $\dot{\delta}_0$  的数值的中间误差大致为  $(0.4 \sim 1.3)$  rad/s; 其横向平均值基本上为零, 但高低上的平均值却有不为零的(有的数值还不算小)。这不是一种好的情况, 对使用并不利, 设计中应该尽量消除这一系统性的平均值。

### 12.5.2 最佳点火位置

所谓最佳点火位置, 就是由虚拟炮口扰动  $\dot{\delta}_0$  引起的主动段终点角散布为最小的点火位置。为了弄清问题的实质, 不致被复杂的数学式子影响我们的思路, 不妨研究横向偏角散布为最小的问题, 而且假定虚拟炮口扰动的平均值为零。

将(12.73) 和(12.75) 两式代入式(12.69) 可得

$$\psi_K = \dot{\delta}_0 \left[ (\psi_{\varphi_H}^* - K_n) \cos(u_H - u^*) + K_n + (b_y v_0 \psi_{\varphi_H}^* + \psi_{\varphi_H}^*) \frac{1}{kv_0} \sin(u_H - u^*) \right] + \psi_0$$

或写成如下简单形式



$$\phi_K = \dot{\delta}_0 [K_n + K_a \cos(u_H - u^* - \alpha_H)] + \phi_0 \quad (12.76)$$

式中

$$\begin{cases} K_a = \left[ (\psi_{\dot{\varphi}_H}^* - K_n)^2 + \frac{1}{k^2 v_0^2} (b_y v_0 \psi_{\dot{\varphi}_H}^* + \psi_{\dot{\varphi}_H}^*)^2 \right]^{1/2} \\ \alpha_H = \arctan \left[ \frac{b_y v_0 \psi_{\dot{\varphi}_H}^* + \psi_{\dot{\varphi}_H}^*}{k v_0 (\psi_{\dot{\varphi}_H}^* - K_n)} \right] \end{cases} \quad (12.77)$$

从式(12.76)看出,如果不考虑点火距离  $s_H$  和虚拟炮口位置到实际炮口距离  $s^*$  这两个量的误差,而且  $\dot{\delta}_0$  和  $\phi_0$  是相互独立的随机量,其中间误差分别为  $B_{\dot{\delta}_0}$  和  $B_{\phi_0}$ ,则得

$$B^2(\phi_K) = B_{\dot{\delta}_0}^2 [K_n + K_a \cos(u_H - u^* - \alpha_H)]^2 + B_{\phi_0}^2 \quad (12.78)$$

第一项是  $\dot{\delta}_0$  引起的散布,与点火距离  $s_H$  密切相关;第二项为炮口偏角引起的散布,此与点火位置无关。因此在研究最佳点火位置时,仅考虑  $\dot{\delta}_0$  引起的散布。为使  $B(\phi_K)$  最小,须使  $[K_n + K_a \cos(u_H - u^* - \alpha_H)]^2$  最小,为此考虑:

(1) 当  $K_n \geq K_a$  时,使  $\cos(u_H - u^* - \alpha_H) = -1$ ,那么

$$u_H - u^* - \alpha_H = (2n + 1)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.79)$$

或写成下式

$$s_H - s^* = \left( n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha_H}{2\pi} \right) \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.80)$$

(2) 当  $K_n \leq K_a$  时,使  $\cos(u_H - u^* - \alpha_H) = -K_n/K_a$ ,那么

$$u_H - u^* - \alpha_H = 2n\pi \pm \arccos\left(-\frac{K_n}{K_a}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.81)$$

或写成下式

$$s_H - s^* = \left[ n \pm \frac{1}{2\pi} \arccos\left(-\frac{K_n}{K_a}\right) + \frac{\alpha_H}{2\pi} \right] \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.82)$$

式(12.80)和(12.82)就是当  $(s_H - s^*)$  的散布很小的最佳点火位置。事实上,这两个公式也可用对式(12.78)求极值的办法得到。

现在有一个问题,就是实际上的  $(u_H - u^*)$  是一个随机量,而且火箭弹的波长(由  $k$  决定)也有散布,那么上述的最佳点火位置是否可靠?一般来说,波长  $\lambda$  的散布并不大,下面将推导  $s_H$  及  $s^*$  具有散布情况下的  $\phi_K$  的散布量,进而重新寻求最佳点火位置。

首先看看  $(s_H - s^*)$  的散布。把起始段近似看作等速运动过程,那么  $s_H$  便近似是初速  $v_0$  与点火时间  $t_H$  之积,即  $s_H \approx v_0 t_H$ ,其中  $t_H$  是由点火具控制的。若初速平均值为  $\bar{v}_0$ ,平均点火时间为  $\bar{t}_H$ ,则  $s_H$  之增量的线性表达式为

$$\Delta s_H = \bar{v}_0 \Delta t_H + \bar{t}_H \Delta v_0$$

则  $s_H$  的均方差为



$$\sigma_{s_H} = \sqrt{(\bar{v}_0 \sigma_{t_H})^2 + (\bar{t}_H \sigma_{v_0})^2} \quad (12.83)$$

那么  $(u_H - u^*)$  的均方差  $\sigma$  为

$$\sigma = k \sqrt{\sigma_{s_H}^2 + \sigma_s^{2*}} \quad (12.84)$$

式中,  $\sigma_s^*$  是虚拟炮口距离  $s^*$  的均方差, 一般远小于  $\sigma_{s_H}$ , 记

$$u = u_H - u^*$$

认定  $u$  满足正态分布, 其平均值为  $\bar{u}$ , 则其微分分布函数为

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(u - \bar{u})^2}{2\sigma^2}\right] \quad (12.85)$$

下面就是考虑到式(12.76)中的  $(u - \alpha_H)$  也是随机量的情况下, 求出  $\phi_K$  的散布量。用概率论中的方差作为散布指标, 则由式(12.76)有(注意  $\dot{\delta}_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} D[\phi_K] &= D\{\dot{\delta}_0[K_n + K_a \cos(u - \alpha_H)]\} + D[\phi_0] = \\ &D[\dot{\delta}_0]E[K_n + K_a \cos(u - \alpha_H)]^2 + D[\phi_0] \end{aligned}$$

利用关系式

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad \text{及} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

上式成为下式

$$\begin{aligned} D[\phi_K] &= D[\dot{\delta}_0]K_a^2 \left\{ \left( \frac{K_n}{K_a} \right)^2 + \frac{1}{2} + 2 \frac{K_n}{K_a} E[\cos(u - \alpha_H)] + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} E[\cos 2(u - \alpha_H)] \right\} + D[\phi_0] \end{aligned} \quad (12.86)$$

根据概率论, 若某随机变量  $u$  的微分分布函数为  $f(u)$ , 则随机变量函数  $\eta(u)$  的数学期望为

$$E[\eta(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(u) f(u) du$$

于是得

$$\begin{aligned} E[\cos 2(u - \alpha_H)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(u - \bar{u})^2}{2\sigma^2}\right] \cos 2(u - \alpha_H) du = \\ &\quad \exp(-2\sigma^2) \cos 2(\bar{u} - \alpha_H) \\ E[\cos(u - \alpha_H)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(u - \bar{u})^2}{2\sigma^2}\right] \cos(u - \alpha_H) du = \\ &\quad \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \cos(\bar{u} - \alpha_H) \end{aligned}$$

代入式(12.86) 经整理得方差





$$D[\phi_K] = D[\delta_0] K_a^2 J(\sigma, \bar{u}) + D[\phi_0] \quad (12.87)$$

式中

$$J(\sigma, \bar{u}) = \left( \frac{K_n}{K_a} \right)^2 + \frac{1}{2} + 2 \frac{K_n}{K_a} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \cos(\bar{u} - \alpha_H) + \frac{1}{2} \exp(-2\sigma^2) \cos 2(\bar{u} - \alpha_H) \quad (12.88)$$

式(12.87)就是综合考虑到  $\delta_0$ 、 $\phi_0$  及点火位置具有散布情况下的偏角  $\phi_K$  的散布公式。

下面寻求  $D[\phi_K]$  为最小值的条件,也就是寻求  $J(\sigma, \bar{u})$  取极小值的条件。由于

$$\frac{d J(\sigma, \bar{u})}{d(\bar{u} - \alpha_H)} = -2 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \sin(\bar{u} - \alpha_H) \left\{ \frac{K_n}{K_a} + \exp\left[-\left(\frac{3}{2}\right)\sigma^2\right] \cos(\bar{u} - \alpha_H) \right\}$$

当  $d J(\sigma, \bar{u})/d(\bar{u} - \alpha_H) = 0$  时,必须

$$\sin(\bar{u} - \alpha_H) = 0 \quad (12.89)$$

或

$$\frac{K_n}{K_a} + \exp\left(-\frac{3}{2}\sigma^2\right) \cos(\bar{u} - \alpha_H) = 0 \quad (12.90)$$

解方程(12.89),得极值点

$$\bar{u} - \alpha_H = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.91)$$

解方程(12.90),得极值点

$$\bar{u} - \alpha_H = 2\pi n \pm \arccos(-E_1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.92)$$

式中

$$E_1 = \frac{K_n}{K_a} \exp\left(\frac{3}{2}\sigma^2\right) \quad (12.93)$$

显然式(12.92)只有  $E_1 \leq 1$  时才成立。

为了找出极小值点,需求出  $J(\sigma, \bar{u})$  的二阶导数

$$\frac{d^2 J(\sigma, \bar{u})}{d(\bar{u} - \alpha_H)^2} = -2 \frac{K_n}{K_a} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \cos(\bar{u} - \alpha_H) - 2 \exp(-2\sigma^2) \cos 2(\bar{u} - \alpha_H) \quad (12.94)$$

将式(12.91)代进式(12.94),满足

$$\frac{d^2 J(\sigma, \bar{u})}{d(\bar{u} - \alpha_H)^2} > 0$$

时,须满足下列条件,也就是  $J(\sigma, \bar{u})$  取极小值的条件为

$$\begin{cases} E_1 > 1 \\ \bar{u} - \alpha_H = (2n + 1)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (12.95)$$

将式(12.92)代入式(12.94),除了  $E_1 = 1$  以外,全满足

$$\frac{d^2 J(\sigma, \bar{u})}{d(\bar{u} - \alpha_H)^2} > 0$$

故得  $J(\sigma, \bar{u})$  取极小值的另一条件是



$$\begin{cases} E_1 < 1 \\ \bar{u} - \alpha_H = 2n\pi \pm \arccos(-E_1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (12.96)$$

至于  $E_1 = 1$  虽是一个过渡条件,但实际上可得  $J$  的极小值,故可归并到上两类中。若比较 (12.95) 与 (12.79) 两式,发现它们是完全一致的;比较式 (12.96) 与式 (12.81),发现它们也是完全一致的。只不过从数量上说来,以  $(K_n/K_a)\exp[(3/2)\sigma^2]$  替代  $K_n/K_a$  罢了。这就是是否考虑点火距离及虚拟炮口距离散布的差别。

对  $J(\sigma, \bar{u})$  随  $(\bar{u} - \alpha_H)$  变化的函数关系作曲线,绘于图 12.12 和图 12.13 中。图 12.12 是  $E_1 > 1$  的曲线,图 12.13 是  $E_1 < 1$  的曲线。

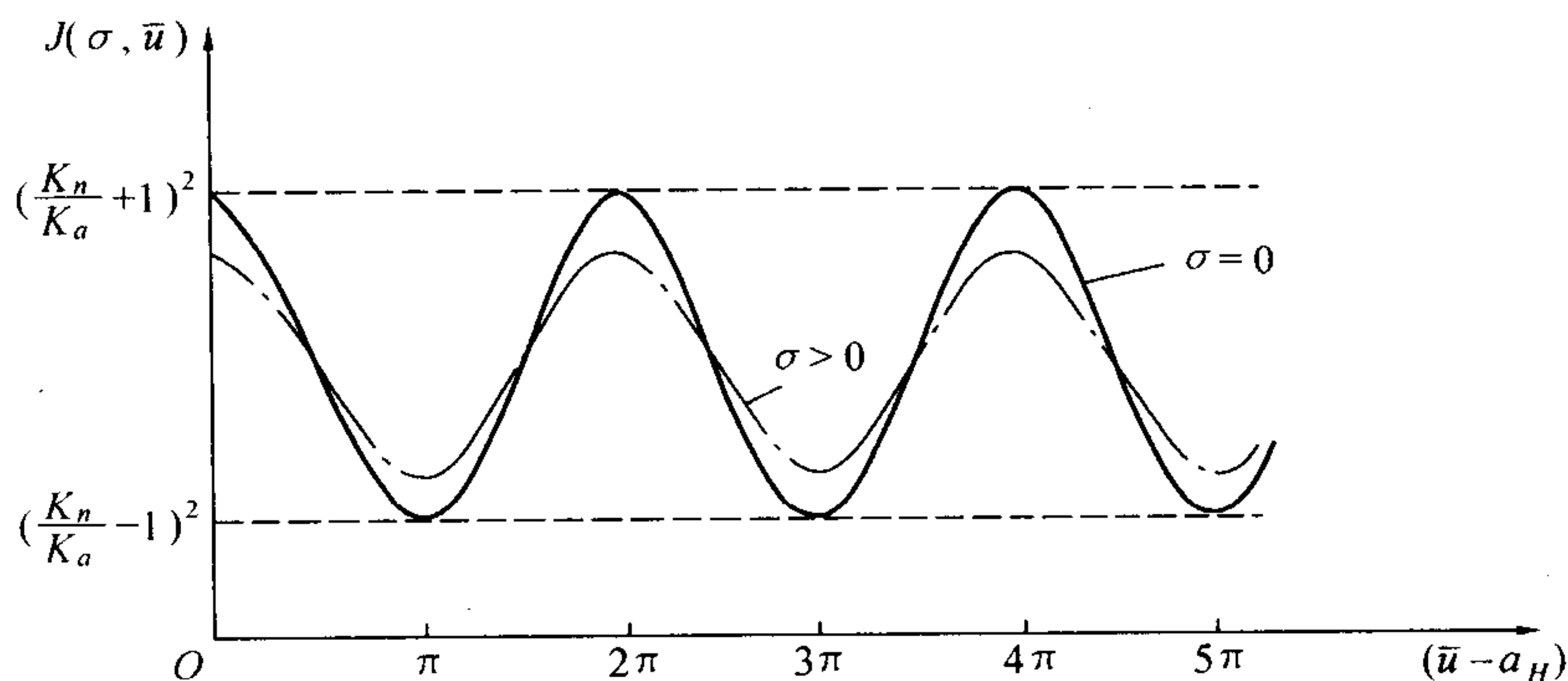


图 12.12  $E_1 > 1$  时的  $J(\sigma, \bar{u}) - (\bar{u} - \alpha_H)$  曲线

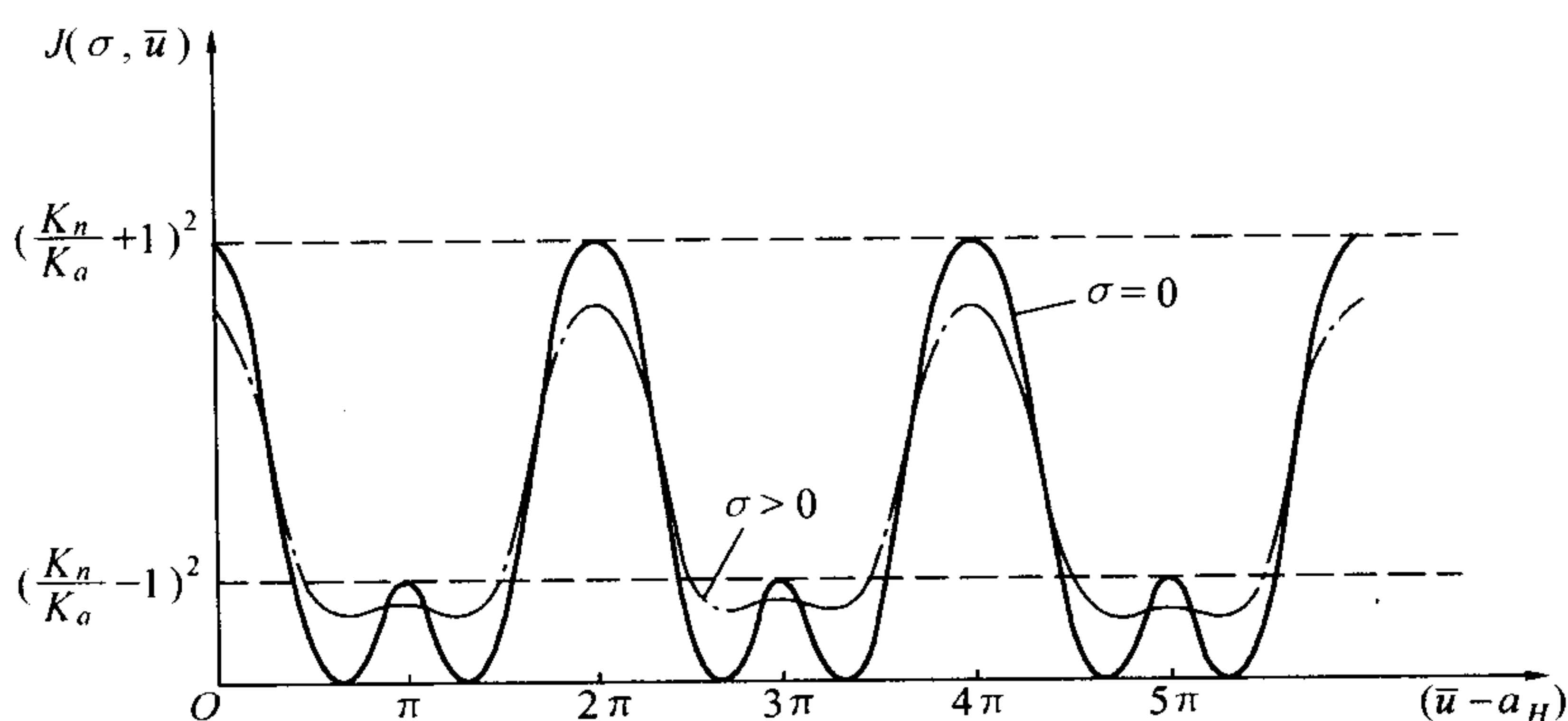


图 12.13  $E_1 < 1$  时的  $J(\sigma, \bar{u}) - (\bar{u} - \alpha_H)$  曲线

### 12.5.3 $\sigma$ 的影响

为表征散布量  $\sigma$  对角散布的影响,特引入下列几个量:

$J_1(\sigma)$ —— $J_1(\sigma, \bar{u})$  的极大值,无论  $E_1$  值多大,其极大值点都在  $\bar{u} - \alpha_H = 2n\pi$  上,



此处  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;

$J_2(\sigma)$ ——当  $\bar{u} - \alpha_H = (2n + 1)\pi$  时的  $J(\sigma, \bar{u})$ ,

此处  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 若  $E_1 \geq 1$  时为  $J(\sigma, \bar{u})$  的极小值;

$J_3(\sigma)$ ——当  $E_1 < 1$  时之  $J(\sigma, \bar{u})$  的极小值。

由上述  $J_1(\sigma)$ 、 $J_2(\sigma)$ 、 $J_3(\sigma)$  的定义, 便根据式(12.88)得它们的表达式如下:

$$J_1(\sigma) = \left[ \frac{K_n}{K_a} + \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \right]^2 + \frac{1}{2}[1 - \exp(-\sigma^2)]^2 \quad (12.97)$$

$$J_2(\sigma) = \left[ \frac{K_n}{K_a} - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \right]^2 + \frac{1}{2}[1 - \exp(-\sigma^2)]^2 \quad (12.98)$$

$$J_3(\sigma) = \frac{1}{2}[1 - \exp(-2\sigma^2)] - \left(\frac{K_n}{K_a}\right)^2 (\exp\sigma^2 - 1) \quad (12.99)$$

根据前面的讨论,  $J_3(\sigma)$  只有在  $E_1 < 1$  时才有意义; 当  $E_1 > 1$  时, 它就不存在了, 而由  $J_2(\sigma)$  代替其作用。由  $E_1$  的定义便知  $J_3(\sigma)$  定义域的上界  $\sigma_1$  由下式确定

$$\frac{K_n}{K_a} \exp\left(\frac{3}{2}\sigma_1^2\right) = 1$$

则

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{3} \ln \frac{K_a}{K_n}} \quad (12.100)$$

因此当  $\sigma < \sigma_1$  时(此时  $E_1 < 1$ ), 最佳点火位置由式(12.96)确定, 其他条件下的最佳点火位置都由式(12.95)确定。

对于  $K_n/K_a > 1$ ,  $K_n/K_a = 1$  及  $K_n/K_a < 1$  的三种条件下的  $J_1(\sigma)$ 、 $J_2(\sigma)$  和  $J_3(\sigma)$  随  $\sigma$  的变化曲线, 分别绘制于图 12.14, 图 12.15, 图 12.16。其中  $J_3(\sigma)$  只有当  $K_n/K_a < 1$  且  $\sigma < \sigma_1$  时才存在。

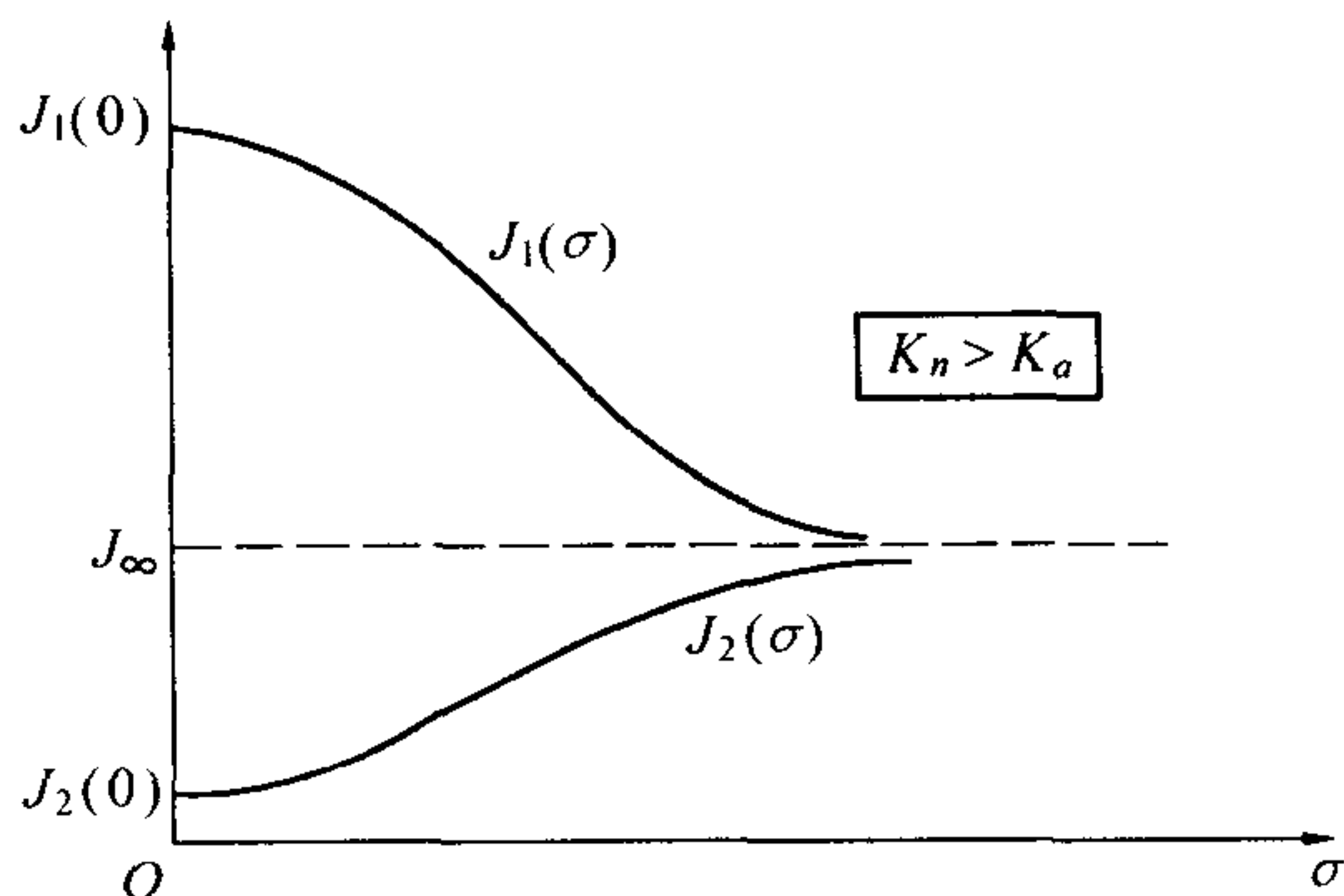


图 12.14  $J_1(\sigma)$ 、 $J_2(\sigma)$  -  $\sigma$  曲线

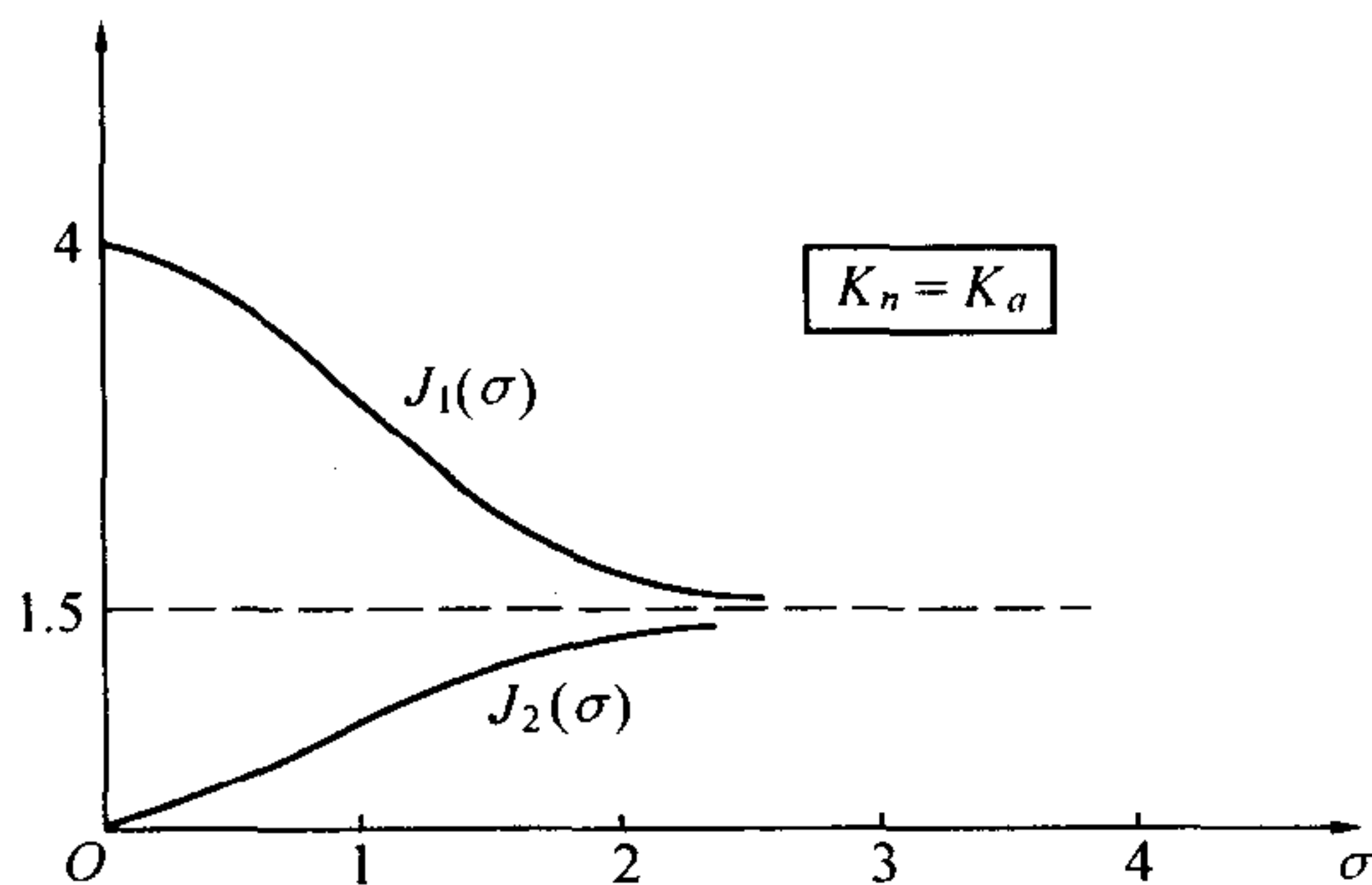


图 12.15  $J_1(\sigma)$ 、 $J_2(\sigma)$  -  $\sigma$  曲线





当  $\sigma = 0$  时, 由 (12.97)、(12.98)、(12.99) 诸式知

$$\begin{cases} J_1(0) = \left(\frac{K_n}{K_a} + 1\right)^2 \\ J_2(0) = \left(\frac{K_n}{K_a} - 1\right)^2 \\ J_3(0) = 0 \end{cases} \quad (12.101)$$

而当  $\sigma \rightarrow \infty$  时,  $J_1(\sigma)$  和  $J_2(\sigma)$  趋于常值

$$J_\infty = \left(\frac{K_n}{K_a}\right)^2 + \frac{1}{2} \quad (12.102)$$

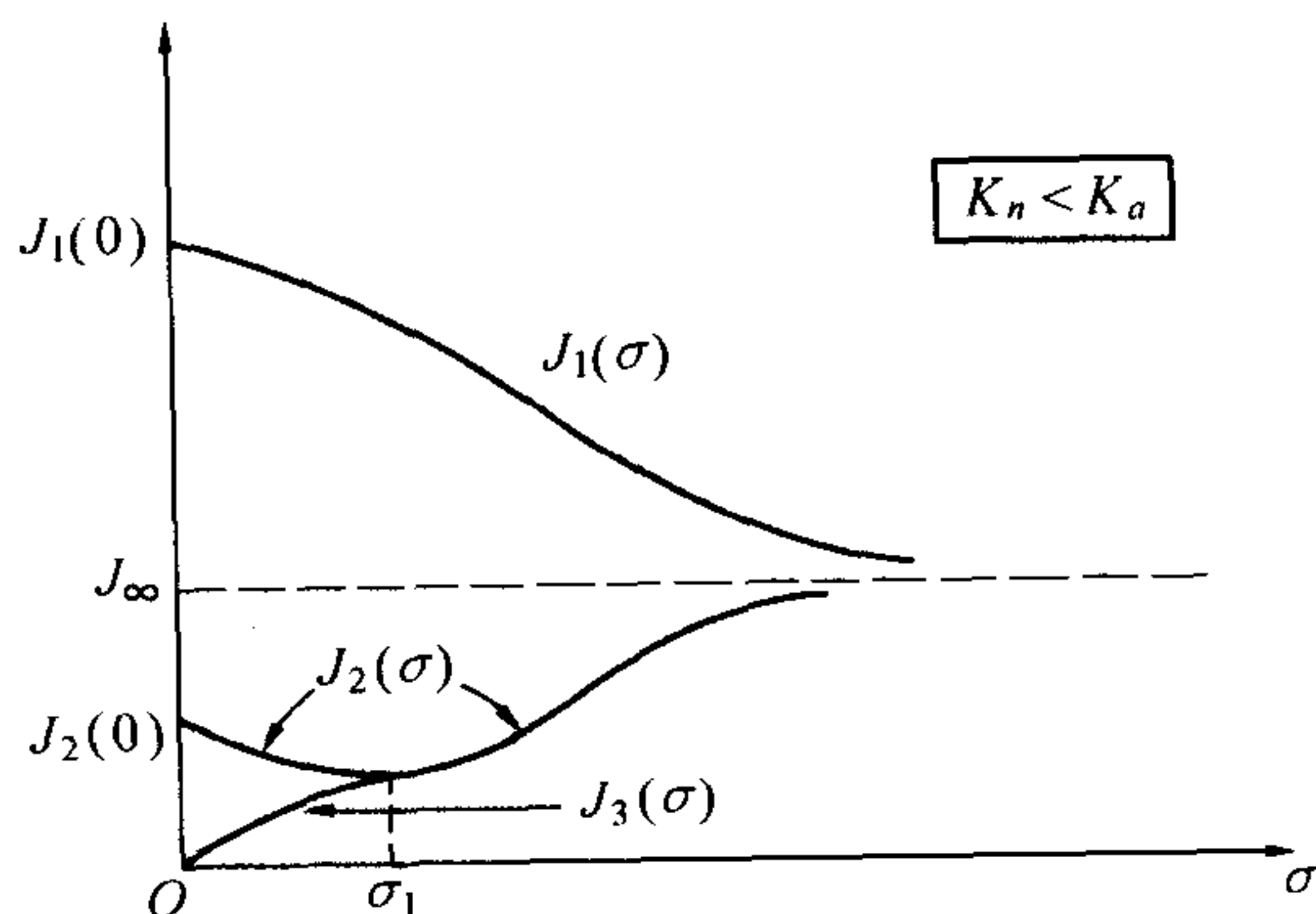


图 12.16  $J_1(\sigma)$ 、 $J_2(\sigma)$ 、 $J_3(\sigma)$  -  $\sigma$  曲线

对图 12.14 来说,  $K_n/K_a = 1$  时,  $J_\infty = 1.5$ ,

$J_1(0) = 4$ ,  $J_2(0) = 0$ 。  $J_1(\sigma)$  随  $\sigma$  增加而递减;  $J_2(\sigma)$  随  $\sigma$  增加而递增。当  $\sigma$  较小时, 选取点火条

件 (12.95) 不仅能有效地减小  $\delta_0$  引起的散布, 而且必须选取这样的点火条件。

就图 12.14 来看, 最大散布量与最小散布量之比值为

$$\frac{J_1(0)}{J_2(0)} = \left(\frac{\frac{K_n}{K_a} + 1}{\frac{K_n}{K_a} - 1}\right)^2 \quad (12.103)$$

当  $K_n$  与  $K_a$  相差较大时, 则  $J_1(0)/J_2(0) \approx 1$ , 那么, 无论  $\sigma$  大小如何, 点火位置的选择便失去了意义。只有在  $K_n$  与  $K_a$  两值相差不大时, 选取较小的  $\sigma$  并在 (12.95) 条件下点火才是必要而有效的。

就  $K_n/K_a < 1$  的图 12.16 而论, 当  $\sigma < \sigma_1$  时, 点火位置由式 (12.96) 确定; 当  $\sigma > \sigma_1$  而又大得不太多时, 点火条件由式 (12.95) 确定。显然这样的点火位置对减小角散布是必要而有效的。

通观全局, 当  $\sigma$  足够大时, 选择点火位置便失去了意义。 $\sigma$  对角散布的影响是明显的, 只有在  $\sigma$  较小且  $K_n$  和  $K_a$  相差甚小时, 实现最佳点火位置才有意义。当然总的前提是由  $\delta_0$  引起的散布在火箭总散布中具有不可忽视的地位, 否则, 本节所讨论的全部问题都是多余的。

至于  $\sigma$  足够大时, 角散布量趋于一个常值的原因, 是不难理解的。因为各发火箭弹的点火位置可以在很大范围内出现, 那就等于对点火位置不加控制, 因而角散布量将与平均点火位置无关。也就是说, 平均点火位置失去了意义。由 (12.83) 式看出, 为使  $\sigma$  较小, 平均点火位置距炮口不宜太远 (即减小  $\bar{t}_H$ ), 对点火具时间散布及初速散布都加以限制。

问题的另一方面是, 当  $\sigma$  越小时, 就愈要按最佳点火位置点火, 否则把点火位置弄到不当部位, 则不但不能达到减小散布, 反而散布比对点火位置不加控制 ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) 的还要大。这从图 12.12 ~ 12.16 中可很明显地看出。



#### 12.5.4 结束语

本节就炮口扰动  $\delta_0$  引起的方向散布,讨论了最佳点火位置。当散布量  $\sigma$  不大时,宜取最佳点火位置如下:

(1) 当  $E_1 = (K_n/K_a)\exp\left(\frac{3}{2}\sigma^2\right) < 1$  时

$$\bar{s}_H - \bar{s}^* = \left[ n \pm \frac{1}{2\pi} \arccos(-E_1) + \frac{\alpha_H}{2\pi} \right] \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.104)$$

(2) 当  $E_1 \geq 1$  时

$$\bar{s}_H - \bar{s}^* = \left( n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha_H}{2\pi} \right) \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12.105)$$

式中,  $\bar{s}^*$  与后效期长度和尾翼打开距离有关,可通过攻角试验测量确定。

当点火位置由式(12.104)确定时,  $\delta_0$  引起的角散布可由下式计算<sup>①</sup>

$$B(\psi_{\delta_0 K}) \approx B_{\delta_0} K_a \sqrt{J_3(\sigma)} \quad (12.106)$$

当点火位置由式(12.105)确定时,  $\delta_0$  引起的角散布可由下式计算

$$B(\psi_{\delta_0 K}) \approx B_{\delta_0} K_a \sqrt{J_2(\sigma)} \quad (12.107)$$

对高低散布,当  $\delta_0$  的平均值为零,或者甚小时,上述确定的最佳点火条件是近似适用的。依据类似处理问题方法,对  $\delta_0$  平均值不为零的情况,也可计算出它引起角散布的指标来。但一般说来,当  $K_n/K_a \geq 1$  时,由式(12.105)确定的点火位置,总可使  $\delta_0$  引起的角散布较小。

对野战火箭增程弹,增程的目的主要是增加射程(反坦克增程弹,增程目的也是为了增加直射距离,但点火位置对射程影响不像野战火箭那样明显)。点火位置的选择,将以达到射程的极大值为出发点。因此这类弹的最佳点火位置的确定,将是一个弹道计算问题。至于在既要使射程较大而又使散布较小的综合要求下,如何确定最佳点火条件的问题,有待进一步研究。

### 12.6 反坦克增程弹的立靶密集度

影响立靶散布(即密集度)的因素很多,从外弹道方面来看,影响高低散布的主要因素有:起始扰动、最大速度  $v_k$  的散布  $B_{v_k}$ 、推力偏心及动不平衡等。

影响方向散布的主要因素有:起始扰动、横风(阵风)、推力偏心及动不平衡等。

无论对高低或是方向,下列因素引起的立靶散布量都是用同样公式计算。

<sup>①</sup> 只有当  $\delta$  甚小时,  $\psi_{\delta_0 K}$  才近似正态分布,故式(12.106)、(12.107)是近似的。





(1) 对起始偏角  $\psi_0$ , 立靶中间误差为  $B_{\psi_0} X$  ( $X$  为立靶到炮口距离)。

(2) 虚拟炮口扰动  $\delta_0$ 、推力线偏心  $L$ 、动不平衡角  $\beta_D$ , 它们在主动段末的偏角中间误差为  $B(\psi_{\delta_0 K})$ 、 $B(\psi_{LK})$ 、 $B(\psi_{\beta_D K})$ , 则立靶中间误差为

$$\sqrt{B^2(\psi_{\delta_0 K}) + B^2(\psi_{LK}) + B^2(\psi_{\beta_D K})} (X - x_K)$$

(3) 主动段末  $K$  点扰动量  $\dot{\delta}_K$  和  $\delta_K$ , 主要是  $\dot{\delta}_K$  引起的偏角中间误差, 其平均值可由式(12.75)得  $B(\dot{\delta}_K) K_n$ , 则立靶中间误差为  $B(\dot{\delta}_K) K_n (X - x_K)$ 。

$\dot{\delta}_K$  是在主动段内形成的, 在主动段内, 起始扰动和横风引起的攻角都逐渐衰减掉了, 剩下的只有周期性扰动因素如推力线偏心、动不平衡角等引起的攻角, 而且其自由项也已被衰减掉, 只有高频的强迫项。由式(12.61)及式(12.62)知

$$\begin{cases} \Delta_L \approx \frac{A_L L}{v^2} \exp[in_\lambda(u - u_H)] \\ \Delta_{\beta_D} \approx -\beta_D n_\lambda^2 A_{\beta_D} \exp[in_\lambda(u - u_H)] \end{cases} \quad (12.108)$$

由此得

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_L \approx i\Gamma v \Delta_L \\ \dot{\Delta}_{\beta_D} \approx i\Gamma v \Delta_{\beta_D} \end{cases} \quad (12.109)$$

曾认定  $L$  及  $\beta_D$  的二分量是正态随机量, 并且各自的二分量具有相同的中间误差  $B_L$  和  $B_{\beta_D}$ , 则  $L$  和  $\beta_D$  造成的攻角角速度二分量在  $K$  点的中间误差为

$$B_{\dot{\delta}_K} = \Gamma v_K \sqrt{\left(\frac{B_L |A_L|}{v_K^2}\right)^2 + (B_{\beta_D} n_\lambda^2 |A_{\beta_D}|)^2} \quad (12.110)$$

以上三方面因素对高低和方向散布是共同性的; 还有  $v_K$  和  $w_z$  造成的立靶散布是单方面的。

### 1. $v_K$ 的散布量 $B_{v_K}$ 引起的高低散布

如果弹道计算算出  $v_K$  每变化 1 m/s 时引起的立靶高低偏差量为  $\partial y_c / \partial v_K$ , 则立靶高低中间误差为

$$B_{v_K} \left| \frac{\partial y_c}{\partial v_K} \right|$$

### 2. 横风散布 $B_{w_z}$ 引起的立靶方向散布

横风对立靶偏差量及散布影响极大, 而且由于反坦克弹的被动段长度比之主动段来也不是很长, 为精确计算, 得将风对弹道各段的影响一并考虑。

#### (1) 起始段内风引起的 $H$ 点侧偏 $Z_{Hw}$

由火炮外弹道学可知, 横风引起的侧偏公式为





$$Z = w_z \left( T - \frac{X}{v_0 \cos \theta_0} \right) \quad (12.111)$$

由此知

$$z_{Hw} = w_z \left( t_H - \frac{x_H}{v_0 \cos \theta_0} \right) \approx w_z \left( t_H - \frac{x_H}{v_0} \right) \quad (12.112)$$

(2) 横风引起  $K$  点偏角造成的立靶侧偏  $Z_{w主}$

$$Z_{w主} = \phi_{wK} (X - x_K) = w_z \left( -\frac{\phi_{\phi_0}^*}{v_H} + \frac{1}{v_K} \right) (X - x_K) \quad (12.113)$$

(3) 横风在主动段内形成的  $K$  点侧向位移  $z_{Kw}$

$$\begin{aligned} z_{Kw} &= \int_{s_H}^{s_K} \phi_w ds = w_z \int_{s_H}^{s_K} \left( -\frac{\phi_{\phi_0}^*}{v_H} + \frac{1}{v} \right) ds = w_z \left( -\frac{\phi_{\phi_0}^*}{v_H} \int_{s_H}^{s_K} ds + \int_{t_H}^{t_K} dt \right) \approx \\ &w_z \left[ (t_K - t_H) - \frac{\phi_{\phi_0}^*}{v_H} (x_K - x_H) \right] \end{aligned} \quad (12.114)$$

(4) 被动段侧偏  $Z_{w被}$

由式(12.113) 知

$$Z_{w被} = w_z \left( T - t_K - \frac{X - x_K}{v_K \cos \theta_K} \right) \approx w_z \left( T - t_K - \frac{X - x_K}{v_K} \right) \quad (12.115)$$

于是得横风引起的立靶总侧偏  $Z_w$  为

$$Z_w = z_{Hw} + Z_{w主} + z_{Kw} + Z_{w被}$$

将上面式(12.112) ~ (12.115) 代入, 经整理得

$$Z_w = w_z \left( T - \frac{\phi_{\phi_0}^*}{v_H} X + \frac{\phi_{\pi_0}^* x_H}{v_H} - \frac{x_H}{v_0} \right)$$

因为一般  $v_0 \approx v_H / \phi_{\phi_0}^*$ , 则

$$Z_w = w_z \left( T - \phi_{\phi_0}^* \frac{X}{v_H} \right) \approx w_z \left( T - \frac{X}{v_0} \right) \quad (12.116)$$

这是计算横风引起立靶侧偏的一个简单而准确的公式。由于  $T$  为射程  $X$  与全弹道平均速度  $\bar{v}$  之商, 而一般  $\bar{v} > v_0$ , 故  $T < X/v_0$ , 那么将在立靶上形成“逆风偏”。如要作到“零风偏”, 则必须使  $\bar{v} = v_0$  才行。

由式(12.116) 知横风散布引起立靶中间误差为

$$B_{Zw} = B_{w_z} \left| T - \frac{X}{v_0} \right| \quad (12.117)$$

基于上述, 便得立靶高低和方向中间误差  $B_{y_c}$  和  $B_z$  如下

$$B_{y_c} = \left\{ (B_{\phi_0} X)^2 + [B^2(\phi_{\delta_0 K}^*) + B^2(\phi_{LK}) + B^2(\phi_{\beta_D K})] (X - x_K)^2 + \left[ \left( \frac{B_L |A_L|}{v_K^2} \right)^2 + \right. \right.$$



$$(B_{\beta_D} n_{\lambda}^2 | A_{\beta_D} |)^2] (K_n \Gamma v_K)^2 (X - x_K)^2 + \left( B_{v_K} \left| \frac{\partial y_c}{\partial v_K} \right| \right)^2 \}^{1/2} \quad (12.118)$$

$$B_z = \left\{ (B_{\psi_0} X)^2 + [B^2(\psi_{\delta_0 K}^*) + B^2(\psi_{LK}) + B^2(\psi_{\beta_D K})] (X - x_K)^2 + \left[ \left( \frac{B_L | A_L |}{v_K^2} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. (B_{\beta_D} n_{\lambda}^2 | A_{\beta_D} |)^2] (K_n \Gamma v_K)^2 (X - x_K)^2 + \left( B_{w_z} \left| T - \frac{X}{v_0} \right| \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (12.119)$$

显然,只要将有关的弹体参数和弹道参数给出,用上面两式计算立靶密集度是很方便的。

## 第十三章 无控火箭的运动稳定性

### 13.1 引言

研究一个系统的某个运动是否稳定,需要考察受干扰作用后的运动,与未受干扰作用时的运动之间的偏差大小。沿用李雅普诺夫在 1892 年提出的稳定性定义,设微分方程组

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

满足初始条件  $y_i(t_0) = \bar{y}_{i0} (j = 1, 2, \dots, n)$  的解是  $\bar{y}_i(t)$ , 今考察别的解  $y_i(t)$  与  $\bar{y}_i(t)$  的偏差, 即扰动运动

$$x_j(t) = y_j(t) - \bar{y}_j(t)$$

如果任意给定  $\epsilon > 0$ , 总存在相应的正数  $\delta = \delta(t_0, \epsilon)$ , 使得只要初始值  $x_{j0}$  满足不等式

$$|x_{j0}| < \delta$$

的扰动运动  $x_j(t)$  对所有  $t > t_0$  都满足

$$|x_j(t)| < \epsilon$$

则称未被扰动的运动  $\bar{y}_i(t)$  是稳定的; 否则就是不稳定的。

如果  $\bar{y}_i(t)$  不仅稳定, 而且还有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$$

则称此运动是渐近稳定的。

然而, 实际工作中有经验的人会发现, 李雅普诺夫的定义并不是对一切系统都适合, 其中包括当  $t \rightarrow \infty$  时系统的渐近性能。比如火箭的飞行时间是不长的,  $t$  趋于无穷大的定义就不完全符合实际情况。于是有人就从工程实际需要出发, 对稳定性定义做了一点修改<sup>[60]</sup>。若初始扰动满足限制条件

$$|x_{j0}| < \delta$$

在系统的工作时间间隔  $\tilde{t}$  内的任何  $t$  都有

$$|x_j(t)| < \epsilon$$

则说系统对给定的一对数值  $\delta$  和  $\epsilon$  在  $\tilde{t}$  时间内稳定。这就是有限时间运动稳定性问题。

对火箭主动段的扰动运动而言, 这里所说的初始扰动, 不仅仅指起始扰动, 也包括其他扰动因素, 如线推力偏心  $L$ 、动不平衡角  $\beta_D$  等等。从火箭扰动运动方程看出, 如果攻角足够小时,





那么偏角和摆动角也是足够小的。只要攻角满足稳定性条件,火箭的运动就是稳定的。为保证火箭全弹道的飞行稳定性,必须具备下列条件:

(1) 火箭的自由运动是稳定的;

(2) 不产生共振效应;

(3) 在重力形成的弹道弯曲过程中,弹轴追随弹道切线方向变化,其攻角限制在允许数值之内。

本书将用微分方程特征根求取动稳定条件,这一传统方法虽推导较繁,但物理意义清晰;用李雅普诺夫直接法也可导出同样的动稳定条件,可参阅参考文献[2]、[5]。

## 13.2 扰动运动方程的简化与变换

在推导火箭自由运动稳定条件之前,首先要对运动方程做一些数学处理。方程组(8.186)取为

$$\begin{cases} \dot{\Psi} - \left[ \left( \frac{a_P}{v^2} - b_y \right) - i b_{zm} \Gamma \right] v \Delta = F_1 & \text{①} \\ \ddot{\Phi} + \left[ k_{zd} - i \left( \frac{1}{n} + k_G \right) \Gamma \right] v \dot{\Phi} + k_{z\delta} v \dot{\Delta} - (k_z - i k_y) v^2 \Delta = F_2 & \text{②} \\ \Phi - \Psi - \Delta = 0 & \text{③} \end{cases} \quad (13.1)$$

式中,  $F_1$  和  $F_2$  是方程组(8.186)的非齐次项。在该方程组中,已略去了次要项  $(-\Psi g \sin \theta / v)$  以及周期性诱导侧向力和诱导侧向力矩。后者只有在大攻角情况下,特别当尾翼弹发生共振运动时才显出较大的影响,通常情况下不用考虑。

依照方程(9.14)的推导过程,可以将方程组(13.1)变成单一的因变量方程。仍取因变量为  $W = v\Delta$ ,但自变量不再用  $u$ ,而采用弹道弧长  $s$ 。这是因为稳定性理论计算要与弹道测量结合起来;在弹道测量中,以  $s$  为自变量比较方便。为便于书写,本章约定用“ $'$ ”表示对  $s$  的导数,上标“ $\cdot$ ”仍表示对时间  $t$  的导数。由式(13.1)①知

$$\Psi' = \left[ \left( \frac{a_P}{v} + b_y \right) - i b_{zm} \Gamma \right] \Delta + \frac{F_1}{v} \quad (13.2)$$

又

$$W' = v\Delta' + v'\Delta$$

或

$$\Delta' = \frac{W'}{v} - \frac{v'}{v} \frac{W}{v} \quad (13.3)$$

将式(13.1)③求导一次,并将式(13.2)、(13.3)代入得

$$\begin{aligned} \Phi' &= \left[ \left( \frac{a_P}{v^2} + b_y - \frac{v'}{v} \right) - i b_{zm} \Gamma \right] \frac{W}{v} + \frac{W'}{v} + \frac{F_1}{v} = \\ &= (k b^* - i b_{zm} \Gamma) \frac{W}{v} + \frac{W'}{v} + \frac{F_1}{v} \end{aligned} \quad (13.4)$$



式中,  $b^*$  见式(7.41)。

对式(13.4)求导(考虑到  $b^*$  中的  $v^2$  是变化的)可得

$$\Phi'' = \frac{W''}{v} + \left[ \left( kb^* - \frac{v'}{v} \right) - ib_{zm}\Gamma \right] \frac{W'}{v} - \left[ k \left( b^* + \frac{2g\sin\theta}{v^2} \right) - ib_{zm}\Gamma \right] \frac{v'}{v^2} W + \left( \frac{F_1}{v} \right), \quad (13.5)$$

$$\text{又} \quad \dot{\Phi} = \Phi' v \quad (13.6)$$

$$\ddot{\Phi} = \Phi'' v^2 + \Phi' \dot{v} \quad (13.7)$$

将式(13.4)、(13.5)代入式(13.6)、(13.7)中,再代入式(13.1)②中,经整理得

$$W'' + (H - iP)W' - (M + iPT)W = F \quad (13.8)$$

$$\text{式中} \quad F = \frac{F_2}{v} - \left[ k_{zd} - i \left( \frac{1}{n} + k_G \right) \Gamma \right] F_1 - F'_1 \quad (13.9)$$

$$\begin{cases} H = b_x + b_y + \frac{g\sin\theta}{v^2} + k_{zd} + k_{z\dot{\delta}} \\ P = \left( \frac{1}{n} + k_G + b_{zm} \right) \Gamma \\ M = k_z + \left( k_{z\dot{\delta}} + 2 \frac{g\sin\theta}{v^2} \right) \frac{\dot{v}}{v^2} - \left( b_x + b_y + \frac{g\sin\theta}{v^2} \right) k_{zd} + \left( \frac{1}{n} + k_G \right) b_{zm} \Gamma^2 \\ T = \frac{1}{P} \left[ \left( b_x + b_y + \frac{g\sin\theta}{v^2} \right) \left( \frac{1}{n} + k_G \right) \Gamma + k_{zd} b_{zm} \Gamma - k_y \right] \end{cases} \quad (13.10)$$

在弹道学中,式(13.8)是线性二阶复数微分方程的标准形式,其系数中的  $H$ 、 $P$ 、 $M$ 、 $T$  已成了人们当今惯用的通用符号。一般说来,这些系数是变化的,但在一定的弹道区间内可视为常数。用数学观点来看,即为冻结系数法。在稳定性分析中,冻结系数法甚至对相当多的变系数系统都是行之有效的,但在某些情况下则不能应用。那么在什么条件下才能应用?目前理论界还没有作出答案[60]。不过,经验表明,如果微分方程系数变化甚缓,应用冻结系数法一般没有问题。当系数变化很快时,应用冻结系数法就得小心。幸好,由式(13.10)可见,在火箭飞行过程中,  $H$ 、 $P$ 、 $M$ 、 $T$  的确是一些慢变参数;在一定的弹道区间内,可以取为常数,这样就得出方程(13.8)的分析解。

### 13.3 动态稳定条件的推导

现在研究火箭自由运动的稳定性,并建立保证飞行稳定性的充要条件。方程(13.8)的齐次方程为

$$W'' + (H - iP)W' - (M + iPT)W = 0 \quad (13.11)$$

其通解为二圆模式<sup>[10]</sup>



$$W = A_{10}\exp[(d_1 + i\phi'_1)(s - s_0)] + A_{20}\exp[(d_2 + i\phi'_2)(s - s_0)] \quad (13.12)$$

式中,  $A_{10}$ 、 $A_{20}$  为常量,  $d_1$ 、 $d_2$  为阻尼指数,  $\phi'_1$ 、 $\phi'_2$  是以  $s$  为自变量的圆运动角速度, 即圆频率。这些量由下列特征方程确定

$$(d_{1,2} + i\phi'_{1,2})^2 + (H - iP)(d_{1,2} + i\phi'_{1,2}) - (M + iPT) = 0$$

根据代数学中关于二次方程的韦达定理知

$$\begin{cases} (d_1 + i\phi'_1) + (d_2 + i\phi'_2) = -(H - iP) \\ (d_1 + i\phi'_1)(d_2 + i\phi'_2) = -(M + iPT) \end{cases} \quad (13.13)$$

由此得参数  $H$ 、 $P$ 、 $M$ 、 $T$  与频率和阻尼指数间的重要关系式

$$P = \phi'_1 + \phi'_2 \quad (13.14)$$

$$H = -(d_1 + d_2) \quad (13.15)$$

$$M = \phi'_1\phi'_2 - d_1d_2 \quad (13.16)$$

$$PT = -(d_1\phi'_2 + d_2\phi'_1) \quad (13.17)$$

它们使空气动力系数与火箭运动参数直接联系起来了。由上面特征方程得

$$d_{1,2} + i\phi'_{1,2} = \frac{1}{2}[-H + iP \pm \sqrt{H^2 - P^2 + 4M + i2P(2T - H)}] \quad (13.18)$$

为简化书写, 记

$$S_{dw} = \frac{2T - H}{H} \quad (13.19)$$

$$Q = \left(\frac{H}{P}\right)^2 + \frac{1}{S_g} - 1 \quad (13.20)$$

式中

$$S_g = \frac{P^2}{4M} \quad (13.21)$$

$S_g$  称为陀螺稳定因子, 其简化式的绝对值即式(9.15);  $S_{dw}$  称为动稳定因子。于是式(13.8) 变成下列形式

$$d_{1,2} + i\phi'_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-H + iP \pm P\sqrt{Q + i\frac{2H}{P}S_{dw}}\right] \quad (13.22)$$

上式中, 根号下的复数开方结果, 与其虚部正负有关。而  $H/P$  是正数, 那么开方出来的虚部正负号取决于  $S_{dw}$ 。

当  $S_{dw} > 0$  时

$$\sqrt{Q + i\frac{2H}{P}S_{dw}} = \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P}S_{dw}\right)^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P}S_{dw}\right)^2}}{2}}$$

当  $S_{dw} < 0$  时

$$\sqrt{Q + i\frac{2H}{P}S_{dw}} = -\sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P}S_{dw}\right)^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P}S_{dw}\right)^2}}{2}}$$





将以上开方结果代入式(13.22)中,则得出各实部和虚部的表达式。

当  $S_{dw} > 0$  时

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{2} \left[ -H + P \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}}{2}} \right] \\ \phi'_1 = \frac{P}{2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}}{2}} \right] \\ d_2 = \frac{1}{2} \left[ -H - P \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}}{2}} \right] \\ \phi'_2 = \frac{P}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}}{2}} \right] \end{cases} \quad (13.23)$$

当  $S_{dw} < 0$  时

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{2} \left[ -H - P \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}}{2}} \right] \\ \phi'_1 = \frac{P}{2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}}{2}} \right] \\ d_2 = \frac{1}{2} \left[ -H + P \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}}{2}} \right] \\ \phi'_2 = \frac{P}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{-Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}}{2}} \right] \end{cases} \quad (13.24)$$

从式(13.23)、(13.24)看出,无论  $S_{dw}$  之值是正是负,快圆的圆频率  $\phi'_1$  是相同的,慢圆的圆频率  $\phi'_2$  也是相同的;但阻尼指数有所不同。当  $S_{dw} > 0$  时,慢圆的阻尼指数  $d_2$  是负值,慢圆运动是稳定的;而快圆的阻尼指数  $d_1$  则不一定是负的。当  $S_{dw} < 0$  时,情况刚好相反,快圆的阻尼指数  $d_1$  是负值,快圆运动是稳定的;而慢圆的阻尼指数  $d_2$  则不一定是负的。总之,当  $S_{dw} > 0$  时,如果,发生不稳定,必然是快圆运动不稳定;当  $S_{dw} < 0$  时,如果发生不稳定,必然是慢圆运动不稳定。为使快、慢圆运动都是稳定的,必须  $S_{dw} > 0$  时的  $d_1$  或  $S_{dw} < 0$  时的  $d_2$  为负值,即



$$\frac{1}{2} \left[ -H + P \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}}{2}} \right] = d_j < 0 \quad (13.25)$$

将上式移项并两边平方得

$$\frac{1}{2} \left[ Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2} \right] < \left(\frac{H}{P}\right)^2$$

再移项并两边平方得

$$Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2 < \left[ 2\left(\frac{H}{P}\right)^2 - Q \right]^2$$

则

$$S_{dw}^2 < \left(\frac{H}{P}\right)^2 - Q$$

把  $Q$  的表达式(13.20) 代入, 得

$$\frac{1}{S_g} < 1 - S_{dw}^2 \quad (13.26)$$

这是关于  $W(=v\Delta)$  的动(态)稳定条件。然而所关心的是攻角  $\Delta$  的稳定性, 由式(13.12) 知

$$\Delta = \frac{A_{10}}{v} \exp[(d_1 + i\phi'_1)(s - s_0)] + \frac{A_{20}}{v} \exp[(d_2 + i\phi'_2)(s - s_0)]$$

为使攻角圆运动幅值是衰减的, 只需  $\exp(d_j s)/v$  是递减函数就行了。考虑到

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\exp(d_j s)}{v} \right] = \left( d_j - \frac{\dot{v}}{v^2} \right) \frac{\exp(d_j s)}{v}$$

那么攻角幅值衰减的条件应为

$$d_j - \frac{\dot{v}}{v^2} < 0 \quad (13.27)$$

将式(13.25) 之  $d_j$  代入上式, 并移项得

$$\sqrt{Q + \sqrt{Q^2 + \left(\frac{2H}{P} S_{dw}\right)^2}} < \frac{\sqrt{2} \left( H + 2 \frac{\dot{v}}{v^2} \right)}{P}$$

或写成

$$\sqrt{Q + \sqrt{Q^2 + \left[ \frac{2 \left( H + 2 \frac{\dot{v}}{v^2} \right)}{P} S_d \right]^2}} < \frac{\sqrt{2} \left( H + 2 \frac{\dot{v}}{v^2} \right)}{P} \quad (13.28)$$

式中

$$S_d = \frac{2T - H}{H + 2 \frac{\dot{v}}{v^2}} \quad (13.29)$$

$S_d$  是表征攻角动态特性的动稳定因子, 后面将要论及这个重要参量。将式(13.28) 平方并移项, 再平方可得



$$S_d^2 < \frac{1}{P^2} \left( H + 2 \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 - Q$$

将式(13.20)代入上式,则

$$\frac{1}{S_g} < 1 - S_d^2 + \frac{4}{P^2} \left( H + \frac{\dot{v}}{v^2} \right) \frac{\dot{v}}{v^2}$$

或

$$\left[ 1 - \frac{1}{M} \left( H + \frac{\dot{v}}{v^2} \right) \frac{\dot{v}}{v^2} \right] \frac{1}{S_g} < 1 - S_d^2$$

对一般火箭而言,  $H$  和  $M$  的量级为  $10^{-3} \sim 10^{-2}$ ; 在火箭弹道主动段, 加速度  $\dot{v}$  的量级为  $5 \times 10^2$ 。故在飞行速度  $v < 200 \text{ m/s}$  的炮口附近 ( $< 40 \text{ m}$ ) 才计及上式左边第二项, 且简化为下式

$$\left[ 1 - \frac{1}{M} \left( \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 \right] \frac{1}{S_g} < 1 - S_d^2 \quad (13.30)$$

除了炮口附近一小段弹道之外, 在其余主动段和被动段范围内, 都可将  $(\dot{v}/v^2)^2/M$  忽略不计。在通常情况下取

$$\left[ 1 - \frac{1}{M} \left( \frac{\dot{v}}{v^2} \right)^2 \right] \frac{1}{S_g} \approx \frac{1}{S_g}$$

则

$$\frac{1}{S_g} < 1 - S_d^2 \quad (13.31)$$

该式在形式上与式(13.26)完全相同, 仅动稳定因子  $S_d$  的定义稍有差别而已。式(13.31)是适用于各类弹箭的动态稳定性判据<sup>[23]</sup>。

## 13.4 稳定性区域

由式(13.31)或式(13.26)看出<sup>①</sup>, 既然  $S_d^2 > 0$ , 那么必有  $1/S_g < 1$ 。这意味着或者  $S_g < 0$ , 或者  $S_g > 1$ 。前者是静力矩系数导数  $m'_z < 0$  的情况, 它表示空气动力合力作用点在质心之后, 静力矩是稳定力矩。如第七章 7.2 指出的那样, 当给予火箭一小的攻角时, 就将产生稳定力矩, 使攻角很快恢复到零。这种保持弹轴与气流方向平行的特性, 就是静稳定性。反之, 如果  $m'_z > 0$ , 则有翻转力矩出现, 使弹轴偏离气流方向, 这时弹箭是静不稳定的。为使弹轴保持原有的方位, 需要让弹体绕纵轴高速旋转, 以产生陀螺定向性。由第十章 10.2 知, 就必须  $S_g > 1$ , 才有可能使攻角不致发散; 这是翻转力矩作用下, 弹箭飞行稳定性的一个必要条件, 称为陀螺稳定条件。

在以  $1/S_g$  为纵轴, 以  $S_d$  为横轴的坐标平面内, 按静稳定性和陀螺稳定性分区, 可分成三个区域(图 13.1):

$1/S_g > 1$ , 为不稳定区;

① 无论对  $W(= \omega \Delta)$  或是  $\Delta$ , 其动(态)稳定条件的形式是相同的。下面讨论时以式(13.31)为主。





$0 < 1/S_g < 1$ , 为陀螺稳定区;

$1/S_g < 0$ , 为静稳定区。

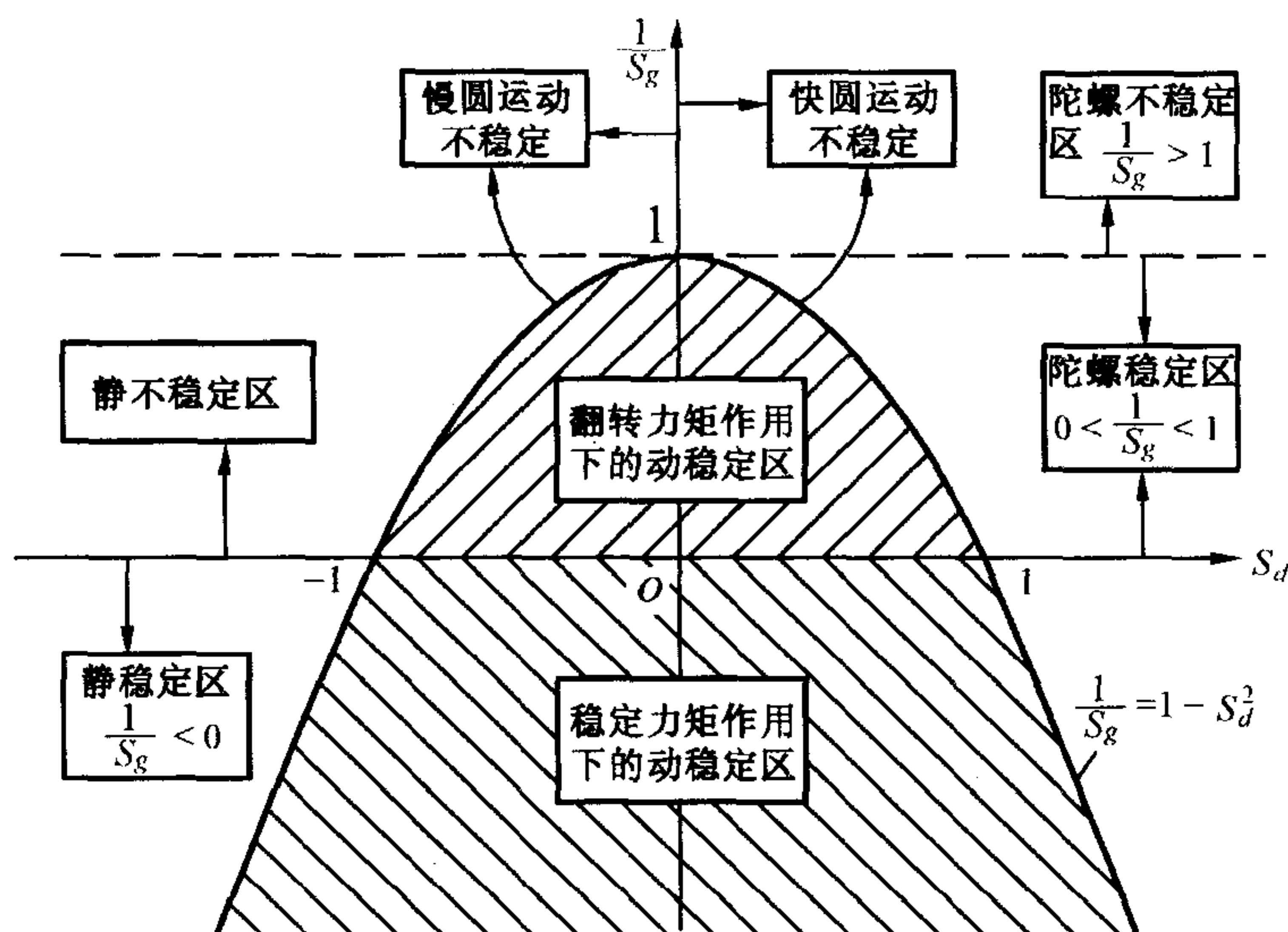


图 13.1 稳定性区域

再作一条抛物线

$$\frac{1}{S_g} = 1 - S_d^2$$

其顶点坐标为(0,1),与横轴的交点为  $S_d = \pm 1$ 。抛物线以外的区域都不满足不等式(13.31),是动不稳定区;抛物线以内的区域都满足不等式(13.31),是动稳定区。由上节可知,在动不稳定区域内,又可分为快圆运动不稳定区和慢圆运动不稳定区。前者相应于  $S_d > 0$ ,后者相应于  $S_d < 0$ 。在动稳定区域内,又可分为翻转力矩作用下的动稳定区和稳定力矩作用下的动稳定区。前者的  $S_d$  区间为  $(-1, 1)$ ,后者的  $S_d$  区间为  $(-\infty, \infty)$ 。可见,要保证静不稳定弹的动态稳定性,必须满足  $|S_d| < 1$  这个条件。对静稳定弹,当  $1/S_g \rightarrow 0$  时,  $S_d$  的取值范围缩小为  $(-1, 1)$ ,这相当于陀螺稳定性增强而静稳定性减弱的情形。当  $1/S_g \rightarrow -\infty$  时,  $S_d$  的取值范围相应扩大到  $(-\infty, \infty)$ ,这相当于静稳定性很强或转速很低的情形。由此可知,不旋转的尾翼弹,若具有静稳定性,那么也具有动稳定性。

基于上述,依靠陀螺效应稳定的旋转弹的动稳定区,仅属陀螺稳定区的一部分;同样,依靠尾翼稳定的尾翼弹的动稳定区,也仅属静稳定区的一部分。清楚地表明了静稳定、陀螺稳定和动稳定三个不同概念的区别与联系,不能将它们混为一谈!



### 13.5 几个主要参量对动态稳定性的影响

影响动稳定性的参量包含在  $S_g$  和  $S_d$  中。工程计算中,式(13.10)中的  $P$  和  $M$  可取简化式

$$P \approx \frac{\Gamma}{n} = \frac{C\dot{\gamma}}{Av} \quad (13.32)$$

$$M \approx k_z = \frac{\rho S l m'_z}{2A} \quad (13.33)$$

则

$$S_g = \frac{P^2}{4M} = \frac{(C\dot{\gamma})^2}{4AM_z \delta} \quad (13.34)$$

可见  $S_g$  依赖于陀螺效应的强弱和静力矩的大小。

除了陀螺力矩和静力矩这两个主要力矩之外,其他力和力矩的影响体现在  $S_d$  之中。将式(13.10)中的  $H$  和  $T$  的简化式

$$T = b_x + b_y + \frac{g \sin \theta}{v^2} - \frac{k_y}{P} \quad (13.35)$$

以及

$$\frac{\dot{v}}{v^2} = \frac{a_p - g \sin \theta}{v^2} - b_x$$

代入式(13.29)得

$$S_d = \frac{b_x + \frac{g \sin \theta}{v^2} + b_y - k_{zd} - k_{z\dot{\delta}} - \frac{2Ak_y}{C\Gamma}}{b_y + k_{zd} + k_{z\dot{\delta}} + \frac{2a_p - g \sin \theta}{v^2} - b_x}$$

再将参量  $b_x, b_y, k_{zd}, \dots$  的定义式(8.101)、(8.139)、(8.147)代入,并注意到式(8.61)和(8.63)所确定的关系式  $m'_y = m_y'' \Gamma d$ , 经整理可得:

$$S_d = \frac{C_x + \frac{2mg \sin \theta}{S \rho v^2} + C'_y - \left(\frac{l}{R_A}\right)^2 (m'_{zd} + m'_{z\dot{\delta}}) - \frac{2ld}{R_C^2} m''_y}{C'_y + \left(\frac{l}{R_A}\right)^2 (m'_{zd} + m'_{z\dot{\delta}}) + \frac{2m}{S \rho v^2} (2a_p - g \sin \theta) - C_x} \quad (13.36)$$

不言而喻,式(13.34)、(13.36)适用于各类火箭和炮弹弹道(仅火箭主动段  $a_p \neq 0$ )。

动稳定条件式(13.31)相当于如下两个不等式:

$S_d > 0$  时

$$S_d < \sqrt{1 - \frac{1}{S_g}} \quad (13.37)$$

$S_d < 0$  时





$$S_d > -\sqrt{1 - \frac{1}{S_g}} \quad (13.38)$$

根据 13.3 节对式(13.23) 和(13.24) 的分析知,式(13.37) 是快圆运动的稳定条件,式(13.38) 是慢圆运动的稳定条件。将式(13.36) 代入式(13.37) 和式(13.38),并略去量级较小的阻力和重力项,得快圆运动的稳定条件为

$$\sqrt{1 - \frac{1}{S_g}} \frac{4F_P}{S_{\rho v^2}} - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{S_g}}\right) C'_y + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{S_g}}\right) \left(\frac{l}{R_A}\right)^2 (m'_{zd} + m'_{z\dot{\delta}}) + \frac{2ld}{R_C^2} m''_y > 0 \quad (13.39)$$

慢圆运动的稳定条件为

$$\sqrt{1 - \frac{1}{S_g}} \frac{4F_P}{S_{\rho v^2}} + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{S_g}}\right) C'_y - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{S_g}}\right) \left(\frac{l}{R_A}\right)^2 (m'_{zd} + m'_{z\dot{\delta}}) - \frac{2ld}{R_C^2} m''_y > 0 \quad (13.40)$$

由上面二式可得到如下结论:

(1) 陀螺稳定因子  $S_g$ :对静稳定弹  $S_g < 0$ ,  $|S_g|$  越小,越有利于不等式(13.39) 和(13.40) 成立,即有利于动稳定性;对静不稳定弹  $S_g > 1$ ,  $S_g$  越大,越有利于动稳定性。前者意味着尽量减小转速,加大稳定力矩;后者意味着尽量提高转速以加强陀螺效应,减小翻转力矩。

(2) 推力  $F_P$  是火箭主动段内的稳定因素。

(3) 升力系数导数  $C'_y$ :对静稳定弹总是稳定因素;对静不稳定弹的慢圆运动起稳定作用,对快圆运动起不稳定作用。

(4) 横向阻尼力矩系数导数  $(m'_{zd} + m'_{z\dot{\delta}})$ :对静稳定弹总起稳定作用;对静不稳定弹的快圆运动起稳定作用,对慢圆运动起不稳定作用。

(5) 马格努斯力矩系数导数  $m'_y$ :当  $m'_y$  为正,即马格努斯力矩使攻角平面绕速度矢量  $\mathbf{v}$  逆时针旋转时(从弹后往前看),该力矩过大,会使慢圆运动不稳定;当  $m'_y$  为负,即该力矩使攻角平面顺时针旋转时,该力矩过大,会使快圆运动不稳定。

马格努斯力矩总是一个不稳定因素,这可以从力学意义上加以解释。图 13.2(a) 表示攻角复平面上一个周期过程的快圆运动,其中心到原点  $T$  是慢圆半径(为讨论方便计,慢圆中心置于横坐标轴上)。由于偏角一般比攻角小一个数量级,在定性分析时,可近似认为摆动角  $\Phi$  与攻角  $\Delta$  相等,相应的角速度  $\dot{\Phi}$  与  $\dot{\Delta}$  近似相等。在图中圆的上半部和下半部任选两点  $B_1$  和  $B_2$ ,并画出这两点上马格努斯力矩的等效力  $f_1$  和  $f_2$ ,它们分别与圆的割线(弦)  $TB_1$  和  $TB_2$  垂直。设马格努斯力矩为正,则  $f_1$  和  $f_2$  的方向应使  $TB_1$  和  $TB_2$  逆时针旋转。再将  $f_1$  和  $f_2$  沿圆的切线和法线方向投影,并分别研究切向分量和法向分量所起的作用。

由于圆运动是顺时针方向,图中  $f_1$  和  $f_2$  的切向分量皆与运动方向相反,故而作用的结果,会使速率  $|\dot{\Delta}|$  逐渐减小。在法向力一定的情况下,  $|\dot{\Delta}|$  减小便使快圆运动的半径减小,因而在马格努斯力矩为正值情况下,它对快圆运动起稳定作用。反之,该力矩为负值时,  $f_1$  和  $f_2$  的





切向分量使  $|\Delta|$  增大,对快圆运动起不稳定作用。

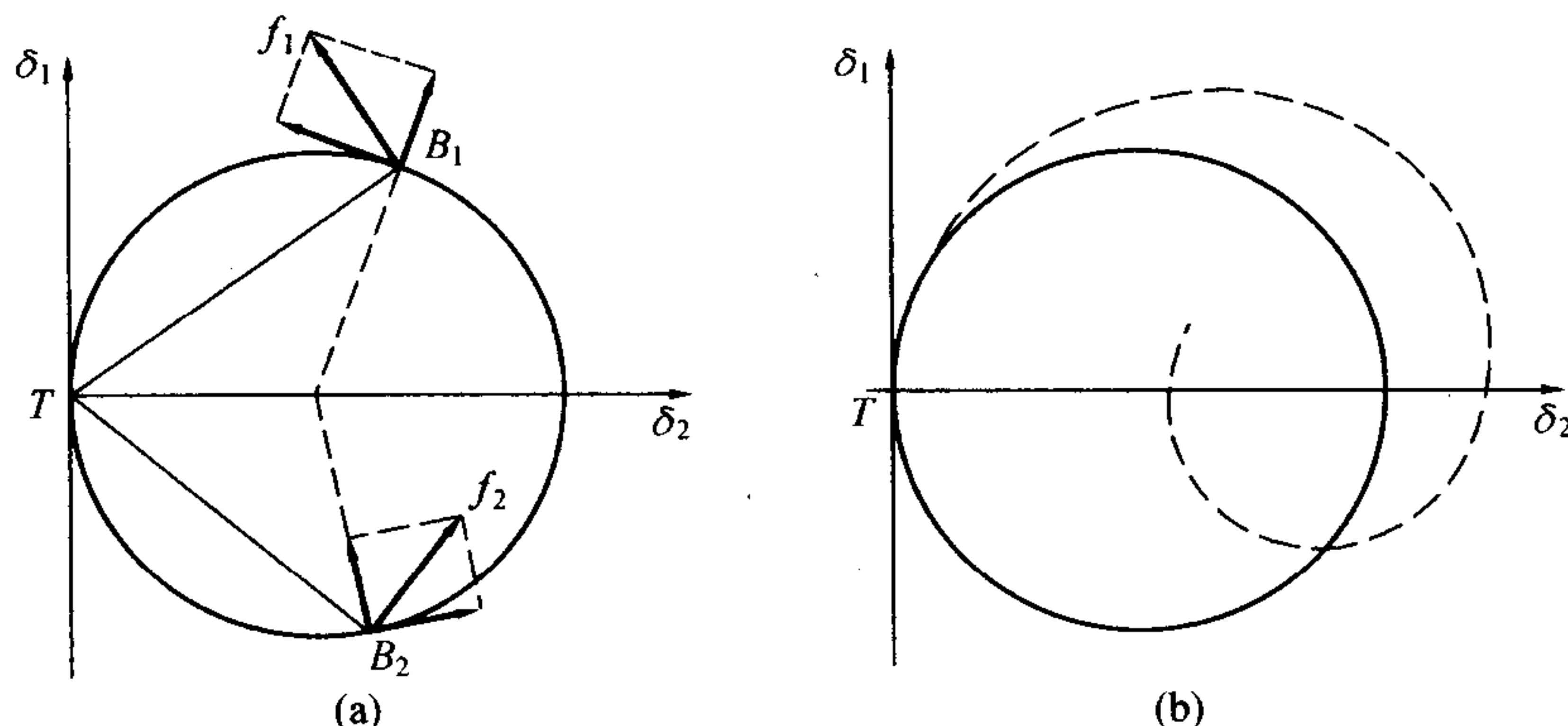


图 13.2 马格努斯力矩对攻角的影响

再看  $f_1$  和  $f_2$  的法向分量对运动的影响。 $f_1$  的法向分量起离心作用; $f_2$  的法向分量起向心作用。那么上半圆的曲率半径增大,下半圆的曲率半径减小。综合起来,使  $B$  点轨迹向右远离原点  $T$ ,如图 13.2(b) 所示,这样慢圆运动半径增大,即对慢圆运动起不稳定作用。反之,若马格努斯力矩为负,则其等效力的法向分量对慢圆运动起稳定作用。

由以上分析可知,马格努斯力矩等效力的切向分量影响快圆运动稳定,法向分量影响慢圆运动稳定性。该力矩为正时,使快圆运动稳定,使慢圆运动不稳定;反之,该力矩为负时,使快圆运动不稳定,使慢圆运动稳定。

此外,由于表达式(13.36)令  $|S_d| > 1$ ,就可得到下列条件(略去较小的阻力和重力分量)

$$\frac{ld}{R_C^2} m_y'' > C_y' + \frac{2F_P}{S\rho v^2} \quad (13.41)$$

$$\text{或} \quad -\frac{ld}{R_C^2} m_y'' > \left(\frac{l}{R_A}\right)^2 (m_{zd}' + m_{z\delta}) + \frac{2F_P}{S\rho v^2} \quad (13.42)$$

这表明,当  $|m_y''|$  之值大到一定程度,满足上面条件时,静不稳定的涡轮式火箭弹及其他炮弹、炮弹,无论如何都不能稳定。

至于其他几个因素对稳定性影响的物理解释,这里不予一一赘述,请读者思考。

还有一个人们关心的问题,就是尾翼弹的气动压力中心到质心的距离  $l_d$  如何确定。它与稳定性有什么关系?能不能用它来代替稳定性判据式(13.31)?可以说,它是影响稳定性的参量之一,而且也是影响散布的参量之一,但不能以它的大小范围代替稳定性判据。在结论 1 中提及综合参量  $S_g$  的影响,若将式(7.12)代入  $S_g$  的表达式中,则

$$S_g = -\frac{(C\Gamma)^2}{2A\rho S C_y' l_d}$$

可见  $l_d$  越大,则  $|S_g|$  越小,有利于尾翼弹的动稳定性。如同其他影响动稳定性的参量一样,就



同一参量而言,各不同型号弹箭的差别比较大,不能千篇一律,对  $l_d$  也是如此。所需要的是满足式(13.31)的  $l_d$ ,有的弹所要求的  $l_d$  或许大些,有的或许小些,不能说  $l_d$  较大的弹比  $l_d$  较小的弹更稳定。所以,单从  $l_d$  的大小是无法对尾翼弹的稳定性做出评价的。

以上仅从动稳定条件分析各参量的影响,就飞行性能而言,是不够的。合理地选取弹箭的参量,必须顾及到下面将要介绍的飞行稳定性的其他方面,并进一步考虑到前几章所述的减小散布和增大射程。值得注意的是,稳定性和散布不是一个概念。况且各参量(包括各气动参数)是相互影响的,当改变某一参量的量值时,就会使其他有关参量的量值发生变化。在弹箭总体设计中,务必进行全面考虑,以确定出满足上述诸要求的气动外形和结构布局。

## 13.6 共振效应

火箭在周期性干扰因素作用下,将产生受迫运动。与一般工程中的受迫振动一样,对火箭的受迫运动(对火箭的绕心运动不习惯于称“振动”)的幅值,直接依赖于火箭固有频率与干扰频率之差值;当两者接近时,幅值将变得很大,即是通常所说的发生了共振。火箭弹在飞行中,亦务必避免共振发生。

作用于火箭的周期性干扰因素,前几章曾多次论及,如推力偏心、动不平衡之类。它们的频率乃以每一波长内火箭的自转周数为标志;这是很有趣的,因为干扰频率是人为确定的,只要人们能科学地进行设计,避免共振的可能性是很大的。当然,也有一些干扰因素无法控制,比如气流扰动(阵风),如果偶尔其频率与固有频率一致,也可能发生共振。这需要进一步对环境中的干扰因素加以考察,以避免发生意外。但一般来讲,与固有频率相近的扰动作用时间是短暂的,不致造成严重影响。

哪种类型的火箭弹发生共振的可能性大?对涡轮式火箭,在第十章 10.3 曾指出,以  $u$  为自变量的推力偏心圆周频率  $n_\lambda$  达 80 ~ 200 之多,而自振圆周频率  $H_1 = 2.4 \sim 4.2$ ,  $H_2 = 0.2 \sim 0.4$ ,差距很大。事实上,从较大的  $H_1$  和  $n_\lambda$  之比

$$\frac{H_1}{n_\lambda} = \frac{\sqrt{S_g} + \sqrt{S_g - 1}}{n_\lambda} < \frac{2\sqrt{S_g}}{n_\lambda} = \frac{2 \times \frac{n_\lambda}{2n}}{n_\lambda} = \frac{1}{n}$$

来看,现今涡轮弹  $n = A/C$  达 30 以上,  $H_1$  和  $n_\lambda$  相关太大,是不可能发生共振的。

对转速不甚高的尾翼弹,发生共振的可能性是存在的,下面将进一步研究尾翼弹的受迫运动。现假定方程(13.8)的强迫项为周期性干扰力矩所形成,可写成下列形式:

$$F = A_f v \exp[i\Gamma(s - s_0)] \quad (13.43)$$

比如式(8.188)中的气动偏心角  $\Delta_M$  或动不平衡角  $\beta_D$  存在时就是如此。方程(13.8)的通解为三圆模式

$$W = A_{10} \exp[(d_1 + i\phi'_1)(s - s_0)] + A_{20} \exp[(d_2 + i\phi'_2)(s - s_0)] + A_3 \exp[i\Gamma(s - s_0)] \quad (13.44)$$





式中,  $d_1, \phi_1, d_2, \phi_2$  由式(13.23)、(13.24)确定。在保证动稳定条件下, 前两项自由运动将随弹道弧长  $s$  增加而逐渐衰减掉。第三项是受迫项, 幅值不会衰减掉, 将该项代入式(13.8)中可得

$$A_3'' + [H + i(2\Gamma - P)]A_3' - [(M + \Gamma^2 - \Gamma P) + i(PT - H\Gamma)]A_3 = A_f v \quad (13.45)$$

由于  $P = \Gamma/n \ll \Gamma, PT \ll H\Gamma$ , 且尾翼弹的  $M \approx -k^2$ , 故该方程可简化为

$$A_3'' + 2\left(\frac{H}{2} + i\Gamma\right)A_3' + (k^2 - \Gamma^2 + \Gamma P + iH\Gamma)A_3 = A_f v$$

可变为以  $u (= ks)$  为自变量的方程

$$\frac{d^2 A_3}{du^2} + 2(b + in_\lambda) \frac{dA_3}{du} + \left(1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n} + i2bn_\lambda\right)A_3 = \frac{A_f}{k^2}v$$

式中,  $b = H/2k$ , 是阻尼系数, 与式(7.44)的定义相同, 只不过式(7.44)中忽略了  $k_{\dot{x}}$ ;  $n_\lambda = \Gamma/k$ , 见式(9.47)。

引入微分算子  $D = d/du$ , 则

$$\left[D^2 + 2(b + in_\lambda)D + \left(1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n} + i2bn_\lambda\right)\right]A_3 = \frac{A_f}{k^2}v$$

那么

$$A_3 = \frac{1}{D^2 + 2(b + in_\lambda)D + \left(1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n} + i2bn_\lambda\right)} \left(\frac{A_f}{k^2}v\right) \quad (13.46)$$

将算子分式按升幂展成级数, 并对  $v$  作微分运算, 得

$$A_3 = \frac{1}{1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n} + i2bn_\lambda} \left[ 1 - \frac{2(b + in_\lambda)}{1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n} + i2bn_\lambda} \left(\frac{\dot{v}}{kv^2}\right) + \dots \right] \frac{A_f}{k^2}v$$

于是知攻角的受迫项为

$$\Delta_3 = \frac{1}{1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n} + i2bn_\lambda} \left[ 1 - \frac{2(b + in_\lambda)}{1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n} + i2bn_\lambda} \left(\frac{\dot{v}}{kv^2}\right) + \dots \right] \frac{A_f}{k^2} \exp[i\Gamma(s - s_0)] \quad (13.47)$$

当  $n_\lambda = 0$ , 即转速为零时的攻角, 常称为静攻角。为考察转速对受迫运动的影响, 通常以强迫力(矩)引起的攻角幅值  $|\Delta_3|$  对静攻角幅值  $|\Delta_{30}|$  之比值作为指标, 此称为幅值放大系数, 由上式知

$$\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_{30}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n}\right)^2 + (2bn_\lambda)^2}} \left| 1 - \frac{2(b + in_\lambda)}{1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n} + i2bn_\lambda} \left(\frac{\dot{v}}{kv^2}\right) + \dots \right|$$

在多数情况下, 上式可取近似式





$$\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_{30}} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{(1 - n_\lambda^2 + \frac{n_\lambda^2}{n})^2 + (2bn_\lambda)^2}} \quad (13.48)$$

$|\Delta_3/\Delta_{30}|$  除了与阻尼系数  $b$  有关外,主要取决于  $n_\lambda$  的大小,它随  $n_\lambda$  的变化规律如图 13.3 所示。

利用求函数极值方法,可知当

$$n_\lambda = \left[ \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - 2 \left( \frac{b}{1 - \frac{1}{n}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13.49)$$

时,  $|\Delta_3/\Delta_{30}|$  取极大值;特别当  $1/n \ll 1$  时,则

$$n_\lambda = \sqrt{1 - 2b^2} \approx 1 \quad (13.50)$$

代入式(13.48)得幅值放大系数最大值

$$\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_{30}} \right|_{\max} \approx \frac{1}{2b} \quad (13.51)$$

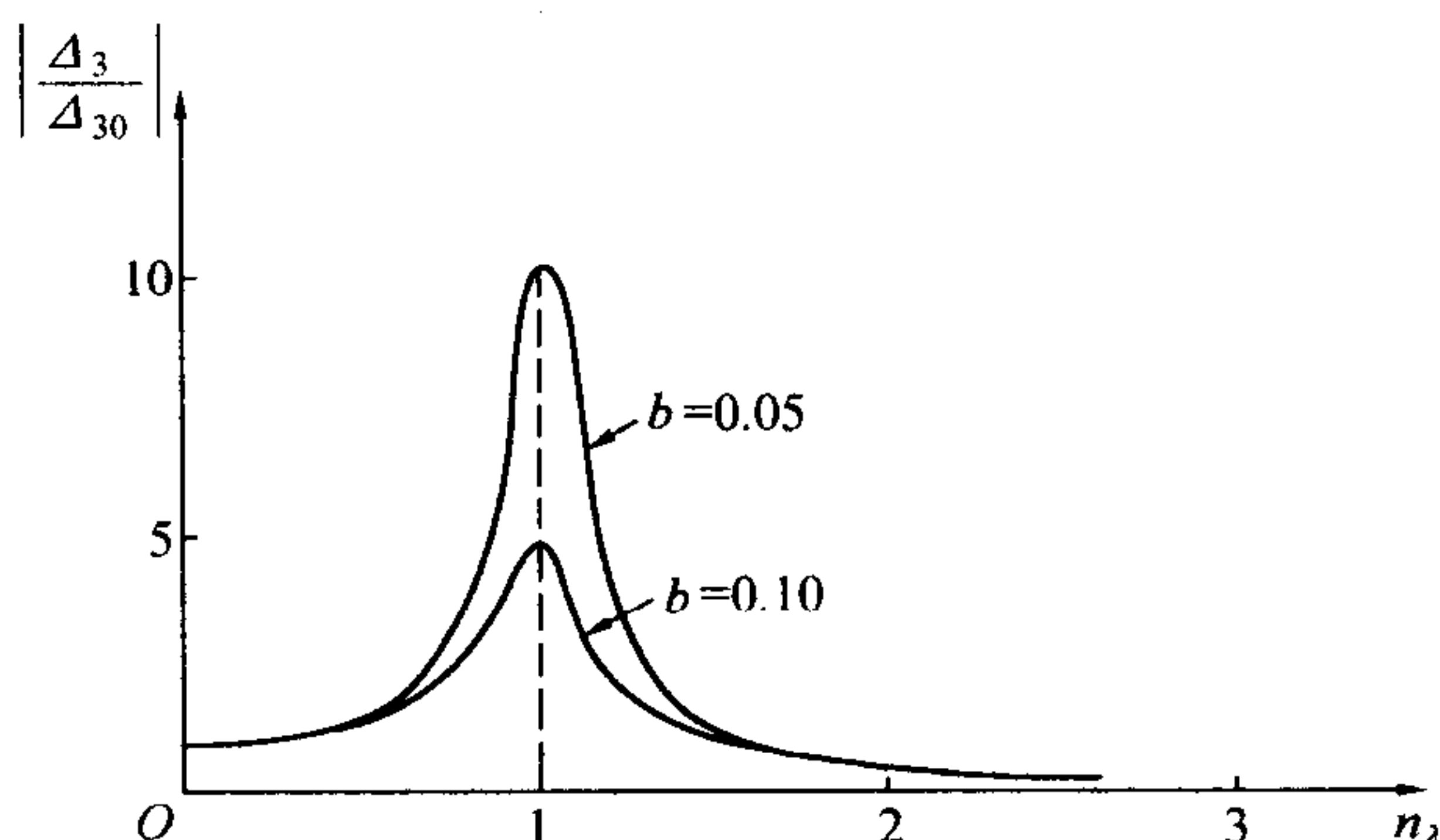


图 13.3  $|\Delta_3/\Delta_{30}| - n_\lambda$  曲线

也就是说,每波长内自转一周时,受迫运动攻角幅值将为静攻角幅值的数倍到数十倍,这就是共振,是必须避免的。而随  $n_\lambda$  从 1 增大的过程中,  $|\Delta_3/\Delta_{30}|$  很快减小;当  $n_\lambda \approx \sqrt{2}$  时,  $|\Delta_3/\Delta_{30}| \approx 1$ 。这样,只要保证  $n_\lambda > \sqrt{2}$ ,就可以避免共振,在尾翼弹设计中,这个数值可作为选取转速下限的参考。

以上所述共振效应,无论对主动段或被动段都是必须引起注意的问题。实践表明,一旦共振发生,由于攻角较大,从而产生较大的诱导滚转力矩和诱导侧向力矩,致使式(8.189)等号右边为零,那么滚转角加速度为零,转速将为常值。若翼片方位角  $r$  某一值  $r^*$  满足上述条件,且为稳态值,那么转速就会保持常量,即发生转速闭锁(spin lock-in),这时弹体的滚转速率与进动速率相等,而弹体某一条母线总处于进动圆锥的外侧。如果进一步计及式(8.169)的诱导侧向力和式(8.172)的诱导侧向力矩,即在方程组(13.1)中计及方程组(8.186)中的  $b_s$  或  $k_s$  时,那么推导出的共振放大系数将会可能比式(13.51)更大。由此可见,共振及转速闭锁是必须避免的。

## 13.7 无控火箭的追随稳定性

因为重力作用,速度矢量  $\mathbf{v}$  的方向不断向下偏转,那么弹轴是否也跟随矢量  $\mathbf{v}$  一起向下偏转呢?这就是所谓“追随稳定性”问题。对尾翼弹,如果不计陀螺效应,由于  $\mathbf{v}$  以  $\dot{\theta}$  的角速度向下



偏转,若弹轴亦以  $\dot{\theta}$  的角速度向下偏转时,必受到赤道阻尼力矩  $M_{zd} = Ak_{zd}v|\dot{\theta}|$  的作用。与此同时,必产生一相应的攻角  $\delta_{1P}$ ,以形成稳定力矩  $M_z = Ak^2v^2\delta_{1P}$ ,使力矩平衡,于是由

$$M_{zd} = M_z$$

得弹轴滞后于速度矢量  $v$  的夹角

$$\delta_{1P} = \frac{k_{zd}}{k^2v} |\dot{\theta}| = \frac{k_{zd}}{k^2v^2} g \cos \theta \quad (13.52)$$

这个平均攻角,就是尾翼弹的动力平衡角。计算表明,在大射角和小射程时,弹道顶点的  $\delta_{1P}$  最大值为  $1^\circ \sim 3^\circ$ ,它是一个系统量,不引起散布。故尾翼弹的追随稳定性一般不成问题。

由上面分析可知,动力平衡角产生的根本原因在于重力产生了速度矢量  $v$  的转动角速度  $\dot{\theta}$ ,对涡轮式火箭弹来说,也是产生动力平衡角的根源。不过由于陀螺效应,涡轮式火箭动力平衡角的公式与式(13.52)不相同。在主动段内,弹轴亦将滞后于  $v$  一个角度,与此同时,由于翻转力矩作用,弹轴还将有围绕速度矢量的进动。计算表明,主动段内的这种纯由重力产生的动力平衡角的幅值,比被动段内的动力平衡角的最大值小,因此主要考察被动段内的追随稳定性就行了。

如果准确求得其值,只要保留方程(8.186)中的非齐次项

$$i \frac{R_C^2}{R_A^2} \dot{\gamma} \dot{\theta} - \ddot{\theta} - k_{zd}v\dot{\theta}$$

在零初始条件下,就可解出动力平衡角。这里将介绍一下在工程中常用的近似推导方法。

涡轮式火箭弹与尾翼弹动力平衡角的根源,都是速度矢量因重力作用向下偏转,如果说这是一个外因,那么它们各自的内因是不同的。尾翼弹由稳定力矩和赤道阻尼力矩动力平衡而产生动力平衡角;而涡轮式火箭弹,则是由翻转力矩与陀螺力矩动力平衡的结果。

若不考虑其他扰动因素,视动量矩矢量和弹轴一致。对飞行稳定性良好的弹箭,动量矩矢量  $K = C\dot{\gamma}$  将随弹道切线以  $|\dot{\theta}|$  的角速度向下偏转,如图 13.4 所示。

根据动量矩定理,动量矩矢端速度必与翻转力矩矢量相等。这个翻转力矩乃由偏向右方的动力平衡角  $\delta_{2P}$  产生,于是

$$K|\dot{\theta}| = Ak^2v^2\delta_{2P}$$

则

$$\delta_{2P} = \frac{\dot{\gamma}}{nk^2v^2} |\dot{\theta}| \quad (13.53)$$

与此  $\delta_{2P}$  相应的升力指向右方,使质心向右偏移,这就是旋转弹所谓“偏流”产生的根本原因。

需要补充说明的是,对尾翼式旋转弹,仿照式(13.

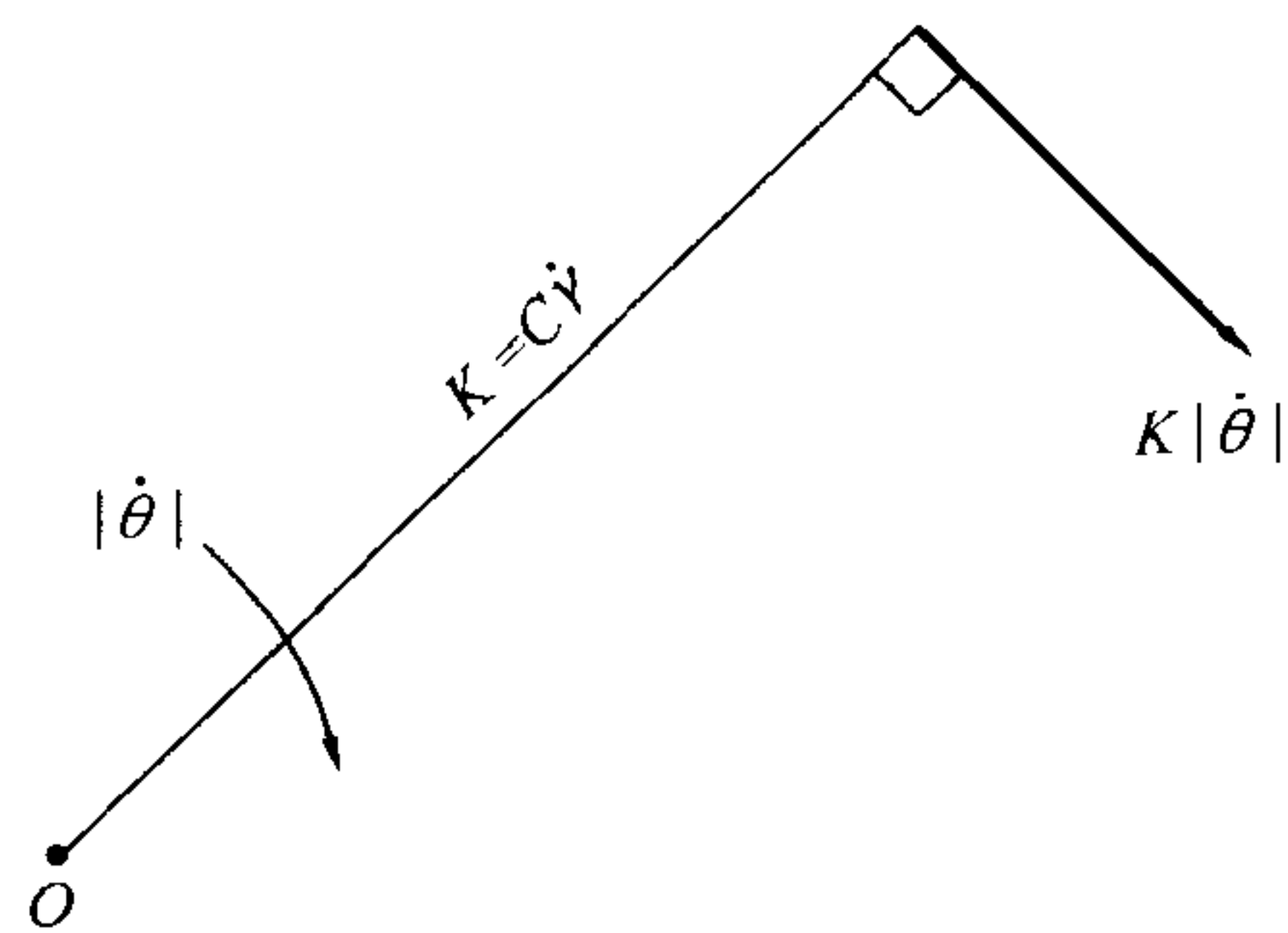


图 13.4  $K$  的矢端速度



53) 的推导,则由于稳定力矩和陀螺力矩的共同作用,使尾翼式旋转弹动力平衡角侧向分量向左,其“偏流”也是向左偏。

依据动量矩定理,当  $\delta_{2P}$  有角速度  $\dot{\delta}_{2P}$  时,则在射击面内必有一动力平衡角  $\delta_{1P}$  产生翻转力矩,与  $K$  的矢端速度(大小为  $K\dot{\delta}_{2P}$ ) 相等,即

$$K\dot{\delta}_{2P} = Ak^2v^2\delta_{1P}$$

得

$$\delta_{1P} = \frac{\dot{\gamma}}{nk^2v^2}\dot{\delta}_{2P} \quad (13.54)$$

一般  $\delta_{1P}$  比  $\delta_{2P}$  小很多,图 13.5 是  $\Delta_P = \delta_{1P} + i\delta_{2P}$  曲线图。对追随稳定性,应以弹道顶点附近动力平衡角最大值

$$|\Delta_P|_{\max} \approx |\Delta_P|_S \approx \delta_{2PS} < [\delta_P] \quad (13.55)$$

得到满足为准。其中  $[\delta_P]$  是给定的允许值,根据经验,  $[\delta_P] = 2^\circ \sim 4^\circ$ 。动力平衡角超过此值,将使散布加大,其原因有待进一步研究。

考虑到极阻尼力矩  $M_{xd}$  的作用,转速  $\dot{\gamma}$  是不断下降的,由下列方程确定

$$C \frac{d\dot{\gamma}}{dt} = -M_{xd} = -\frac{1}{2}\rho v S l d m'_{xd} \dot{\gamma}$$

令

$$k_{xd} = \frac{\rho S l d m'_{xd}}{2C} \quad (13.56)$$

则

$$\frac{d\dot{\gamma}}{dt} = -k_{xd} v \dot{\gamma}$$

$$\frac{d\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}} = -k_{xd} ds$$

得

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_K \exp(-k_{xd}s) \quad (13.57)$$

对  $k_{xd}$  中的  $\rho$  可由近似值  $\bar{\gamma} = (\gamma_K + \gamma)/2$  查取。

在以前的外弹道学中,常用极阻尼力矩表达式

$$M_{xd} = \frac{d^3 l}{g} 10^3 H(\gamma) v K_\Gamma \dot{\gamma} \quad (13.58)$$

此式与式(8.78) 比较,可进行系数换算

$$m'_{zd} = 2.15 \times 10^2 K_\Gamma \quad (13.59)$$

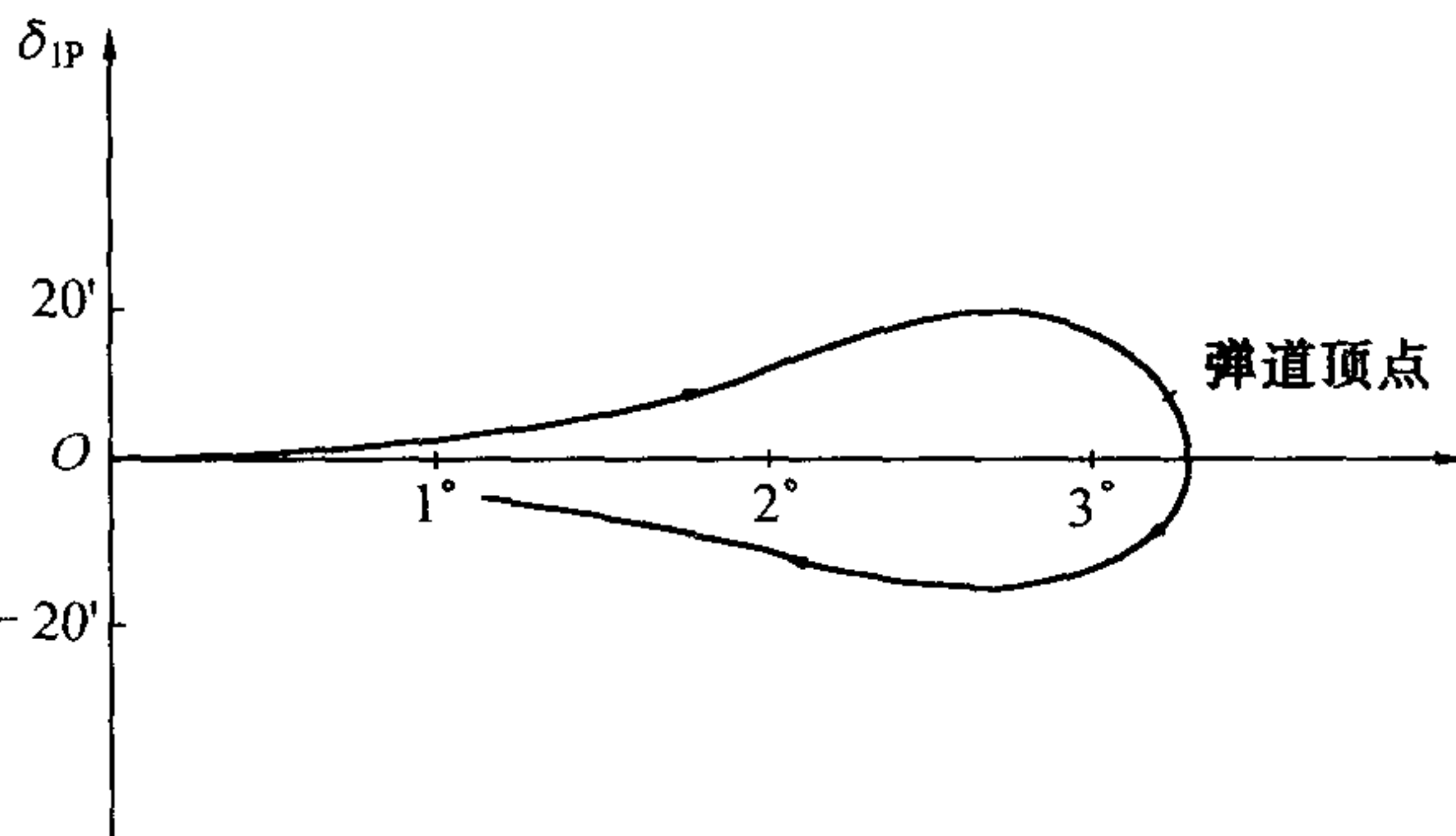


图 13.5  $\Delta_P$  曲线





一般炮弹的  $K_F$  之数量级为  $1.5 \times 10^{-5}$ , 可作为参考。

下面看看动力平衡角与弹箭有关参量间的关系。将  $k^2$  的表达式代入式(13.53), 并考虑到  $lm'_x \approx l_d C'_y$ , 以及仅有高空顺风作用下的不利情况, 则

$$\delta_{2P} = \frac{2C\dot{\gamma}_K g \cos\theta}{\rho S l_d C'_y v (v - w_{//})^2} \exp(-k_{zd}s) \quad (13.60)$$

可见  $\delta_{2P}$  随极转动惯量  $C$  增加而加大, 随压力中心到质心距离  $l_d$  增大而减小。对射程较大的弹箭, 宜加上稍长的风帽, 可使  $l_d$  明显增大, 而  $C$  又不致增加, 对减小  $\delta_{2P}$  有利。另外, 为限制  $\delta_{2P}$  之值, 务必限制转速  $\dot{\gamma}_K$ , 这说明, 转速存在着上限。

### 13.8 尾翼式火箭弹的转速范围

第九章进行散布分析时, 曾指出转速对野战尾翼式旋转火箭弹散布的影响: 转速的增加, 对减小  $B(\psi_L)$  是有利的, 而  $B(\psi_{\beta_D})$  将增加,  $B(\psi_{\phi_0})$  也略有增加。由此需作出转速对总散布的关系曲线, 以择取其适当值。但是, 这个值应该在允许范围之内。这个“允许范围”是指什么? 其下限应从避免共振出发, 如 13.6 节指出的, 应取  $n_\lambda$  最小值为

$$n_{\lambda \min} = \sqrt{2} \quad (13.61)$$

其上限应以保证动态稳定性为准。

从动稳定条件式(13.31)看出, 当  $|S_d| < 1$  时是稳定的; 当  $|S_d| > 1$  时, 则

$$\frac{1}{S_g} < -(S_d^2 - 1)$$

由于  $S_g < 0$ , 于是

$$|S_g| < \frac{1}{S_d^2 - 1}$$

将  $|S_g| = (n_\lambda/n)^2/4$  代入, 得

$$n_\lambda < \frac{2n}{\sqrt{S_d^2 - 1}} \quad (13.62)$$

因此  $n_\lambda$  的上限取为

$$n_{\lambda \max} = \frac{2n}{\sqrt{S_d^2 - 1}} \quad (13.63)$$

总之, 由散布分析所取的转速指标  $n_\lambda$  应满足下式

$$\sqrt{2} < n_\lambda < \frac{2n}{\sqrt{S_d^2 - 1}} \quad (13.64)$$

值得注意的是, 以上仅从外弹道学方面考虑转速范围。实际上, 火箭弹是一个弹性体系, 它



具有一定的振动频率;而且尾翼片也有一定的振动频率。火箭弹的实际转速,必须使其自转频率避开上述结构自振频率。否则,将可能导致结构的破坏。

### 13.9 涡轮式火箭弹的转速范围——喷管倾斜角的确定

涡轮式火箭弹一般不存在共振现象,但要保证其动态稳定性和追随稳定性。对涡轮式火箭弹来说,动稳定条件中的  $S_d^2 < 1$ ,故式(13.31)为

$$S_g > \frac{1}{1 - S_d^2} \quad (13.65)$$

而  $S_g$  为

$$S_g = \left( \frac{\dot{\gamma}}{2nk v} \right)^2$$

值得注意的是,当火箭逆风(平行风速为  $w_{//} = w_x \cos \theta$ ) 飞行时,翻转力矩比无风时要大,翻转力矩中的  $v$  要用相对速度  $v_r = v + w_{//}$  替代,因而此时的实际稳定因子  $S_{gw}$  将减小。在飞行过程中,应该使  $S_{gw}$  满足式(13.65),即

$$S_{gw} = \left[ \frac{\dot{\gamma}}{2nk(v + w_{//})} \right]^2 = S_g \left( \frac{v}{v + w_{//}} \right)^2 > \frac{1}{1 - S_d^2}$$

或

$$S_g > \frac{1}{1 - S_d^2} \left( 1 + \frac{w_{//}}{v} \right)^2 \quad (13.66)$$

在主动段内,比值  $w_{//}/v$  在炮口最大,  $S_g$  也在炮口较大,后者原因在于炮口  $m_z'$  较小。此后  $m_z'$  随速度增加而变大,  $S_g$  有所减小,但不及  $(1 + w_{//}/v)^2$  减小的快。因此一般对主动段不太高的火箭,只要保证炮口满足式(13.66)就可以了。在被动段内,火箭向顶点上升时,  $\Gamma = \dot{\gamma}/v$  是增加的;过顶点一段弹道后的降弧段,  $v$  不断增加,  $\dot{\gamma}$  继续减小,  $\Gamma = \dot{\gamma}/v$  将减小,尤其大射角弹道落点附近的  $\Gamma$  更小。因此被动段内的动稳定性,必须要求大射角时的弹道落点满足式(13.66)。

将  $S_g = \Gamma^2/(2nk)^2$  代入式(13.66),便可确定出转速比  $\Gamma$  的下限,即

$$\Gamma > \Gamma_{\min} = \frac{2nk}{\sqrt{1 - S_d^2}} \left( 1 + \frac{w_{//}}{v} \right) \quad (13.67)$$

至于喷管倾斜角的最小值  $\epsilon_{\min}$ ,如以炮口为准,将式(10.1)的  $\Gamma$  表达式代入式(13.67),便得

$$\tan \epsilon_{\min} = \frac{4kR_A^2}{d^* \sqrt{1 - S_d^2}} \left( \frac{u_{\text{eff}}'}{u_1} \right) \left( 1 + \frac{w_{//}}{v_0} \right) \quad (13.68a)$$

如以落点为准,则落点时有



$$\Gamma_C = \frac{\dot{\gamma}_C}{v_C} = \frac{\dot{\gamma}_K}{v_C} \exp(-k_{xd}S_C) = \Gamma_K \frac{v_K}{v_C} \exp(-k_{xd}S_C)$$

式中,  $S_C$  为全被动段弹道弧长, 可查表 17。

将式(10.1)代入上式  $\Gamma_K$ , 再将  $\Gamma_C$  代入式(13.67), 得

$$\tan \epsilon_{\min} = \frac{4kR_A^2}{d^* \sqrt{1-S_d^2}} \left( \frac{u_{\text{eff}}'}{u_1} \right) \left( 1 + \frac{w_{\parallel}}{v_C} \right) \frac{v_C}{v_K} \exp(k_{xd}S_C) \quad (13.68b)$$

喷管实际的倾斜角应大于(13.68a) 与(13.68b) 中较大的  $\epsilon_{\min}$ 。

为保证追随稳定性, 依据条件(13.55) 式来确定转速比的上限  $\Gamma_{\max}$ 。式(13.55) 还应该在最大射角  $\theta_{0\max}$  时得到满足; 将(13.60) 代入, 并注意  $\dot{\gamma}_K = \Gamma_K v_K$  及  $\cos \theta_S = 1$ , 可得

$$\Gamma < \Gamma_{\max} = [\delta_P] \left[ \frac{\rho S l_d C_y' v_S (v_S - w_x)^2}{2 C_g v_K} \exp(k_{xd}S_S) \right]_{\theta_{0\max}} \quad (13.69)$$

将式(10.1)代入, 得与  $\Gamma_{\max}$  相应的喷管最大倾斜角  $\epsilon_{\max}$

$$\tan \epsilon_{\max} = [\delta_P] \left( \frac{u_{\text{eff}}'}{u_1} \right) \left[ \frac{\rho S l_d C_y' v_S (v_S - w_x)^2}{m g d^2 v_K} \exp(k_{xd}S_S) \right]_{\theta_{0\max}} \quad (13.70)$$

式中,  $K$  点到顶点  $S$  的弹道弧长  $s_S$  可近似计算

$$s_S \approx \frac{1}{2} (v_K + v_S) (t_S - t_K)$$

$v_S$  和  $t_S$  之值, 当  $v_K > 700$  m/s 时, 可由高炮弹道表近似查取; 当  $v_K < 700$  m/s 时, 可利用西亚切解法求出。另外, 当  $v_K < 700$  m/s 时,  $v_S$  也可由下式估算

$$v_S \approx \frac{X - x_K}{T - t_K}$$

综上所述, 在散布分析中(第十章) 择取的适当转速比应该在  $\Gamma_{\min}$  和  $\Gamma_{\max}$  的范围之内, 实际的喷管倾斜角  $\epsilon$  便就相应地确定在  $\epsilon_{\min}$  和  $\epsilon_{\max}$  的范围之内。

问题的另一方面, 在选取转速时, 如果以为只要满足上述稳定性要求就行, 而不考虑对减小散布是否有利, 也是不对的。减小散布是主要目的之一, 满足稳定条件(转速不超过其上下限) 仅是减小散布的一个必要条件, 并不是充分条件; 充分条件所要求的转速, 则是如前几章对散布分析中所得出的最佳转速。



## 第十四章 有控弹一般运动方程组

### 14.1 概 述

与无控弹道的主要不同点,在于有控弹道研究的对象是可操纵的运动物体,其典型代表就是导弹。除了无控火箭所受到的力和力矩作用之外,还受到控制力和力矩的作用,而且这些控制力和力矩依赖于导弹的运动状态。

有控理想弹道与无控理想弹道也有不同点,尽管它也把导弹当作一个质点处理,而且控制系统被假定为严格保证导引关系,然而,有控理想弹道计及了某些角度(如攻角)对力的影响。本章和下一章将以导弹为对象,建立有控弹的一般运动方程并进行飞行稳定性分析。

在建立导弹一般运动方程组时,除了考虑质心运动和绕质心运动外,还必须加进控制系统工作过程的控制方程。对这样方程组求解出来的弹道,称为控制弹道。控制弹道并没有计及诸扰动因素(起始扰动、阵风、推力偏心等等)。就是说,实际弹道与控制弹道是不同的。

对导弹运动稳定性及散布分析的方法,不是像无控火箭那样,考虑全部力和力矩的作用,以求解扰动方程解析解进行计算与分析;对导弹来讲,这种方法很难对一般问题得到解析结果。因此在飞行稳定理论研究中,不是直接研究扰动因素的作用,而是采用迄今稳定理论中常见的小扰动法。对散布,则需要用随机过程理论进行分析。因此,建立导弹运动方程组时,可不计及扰动因素。

从研究导弹运动的发展史来看,在很多方面(如气动力、坐标系等方面),与飞机飞行力学具有共同点。而且为了照顾传统的习惯,本书对无控和有控弹道,在分析和处理问题方面的差别采取承认的态度。但对于轴对称体的导弹,研究其运动状态也可以采用第八章的坐标系及参考基,这对于既有无控段又有控制段的现代火箭弹道就能采用统一的模型和处理问题的方法。

### 14.2 导弹飞行力学中的惯用坐标系及其相互关系

#### 14.2.1 坐标系及其基

##### 1. 地面坐标系与平动坐标系

此与 8.2 节相同。

##### 2. 弹道坐标系

该坐标系定义亦与 8.2 节定义相同。又称之为弹道固连坐标系,或半速度坐标系,仍以



$o - x_2 y_2 z_2$  表示。

### 3. 速度坐标系

该坐标系以  $o - x_v y_v z_v$  表示(导弹飞行力学中常以  $o - x_c y_c z_c$  表示)。原点取弹体质心,  $ox_v$  与  $ox_2$  轴一致,  $oy_v$  取在弹体纵对称平面内并与  $ox_v$  轴垂直, 向上为正,  $oz_v$  依右手定则确定。该坐标系的基以  $e_v$  表示。

### 4. 相对速度坐标系

该坐标系以  $o - x_r y_r z_r$  表示。原点取弹体质心,  $ox_r$  轴与相对速度  $v_r$  一致(由于考虑风速或水中的涌浪速度,  $v_r$  与弹箭质心速度  $v$  是有差别的);  $oy_r$  轴在弹体纵对称平面内并与  $ox_r$  轴垂直, 向上为正;  $oz_r$  轴依右手定则确定。该坐标系的基仍以  $e_r$  表示。它是气动力或水动力计算与测量的基准。

### 5. 弹体坐标系

该坐标系以  $o - x_1 y_1 z_1$  表示。原点在弹体几何中心,  $ox_1$  轴沿纵轴并指向前方(有的型号如飞航式导弹之  $ox_1$  可取翼弦方向);  $oy_1$  轴在导弹纵对称平面内, 垂直  $ox_1$  轴, 指向上方为正;  $oz_1$  轴依右手定则确定。该坐标系的基以  $e_b$  表示。

### 6. 弹轴坐标系

又称为半弹体坐标系, 以  $o - \xi \eta \zeta$  表示。原点取弹体几何中心; 将坐标系  $o - x_1 y_1 z_1$  绕  $ox_1$  轴逆时针方向转动至  $oy_1$  轴处于铅直平面内即得。该坐标系的基以  $e_a$  表示。

## 14.2.2 角度关系

各坐标系即基之间的关系由它们相互间的转角完全确定, 如图 14.1 所示。

图中  $\psi_a$ ——偏航角, 水平轴  $ox$  与弹轴  $ox_1$  在水平面上的投影之间的夹角, 弹轴左偏为正;

$\vartheta$ ——俯仰角,  $ox_1$  与水平面  $xoz$  的夹角, 向上为正;

$\gamma$ ——滚转角, 自转角, 导弹纵对称面与过  $ox_1$  的铅直面之夹角, 右旋为正;

$\psi_v$ ——弹道偏角, 速度  $v$  在水平面上的投影与  $ox$  轴之夹角,  $v$  左偏为正;

$\theta$ ——弹道倾角,  $v$  与水平面之夹角;

$\gamma_v$ ——速度倾斜角,  $oy_2$  轴绕  $ox_2$  轴顺时针方向转动至  $oy_v$ ,  $oy_v$  与  $oy_2$  之夹角;

$\phi_r$ ——相对速度偏角,  $v_r$  在水平面的投影与  $ox$  轴之夹角,  $v_r$  左偏为正;

$\theta_r$ ——相对速度倾角,  $v_r$  与水平面之夹角;

$\gamma_r$ ——相对速度倾斜角,  $x_r oy_r$  平面与过  $v_r$  铅直面之间的夹角,  $oy_r$  轴绕  $ox_r$  轴右旋为正;

$\beta$ ——侧滑角, 速度  $v$  与导弹纵对称面之夹角, 以速度系统绕  $oy_v$  逆时针转动为正向;

$\alpha$ ——冲角, 导弹纵轴  $ox_1$  与  $v$  在纵对称面  $x_1 oy_1$  上的投影之夹角, 以弹体系统  $oz_1$  轴逆

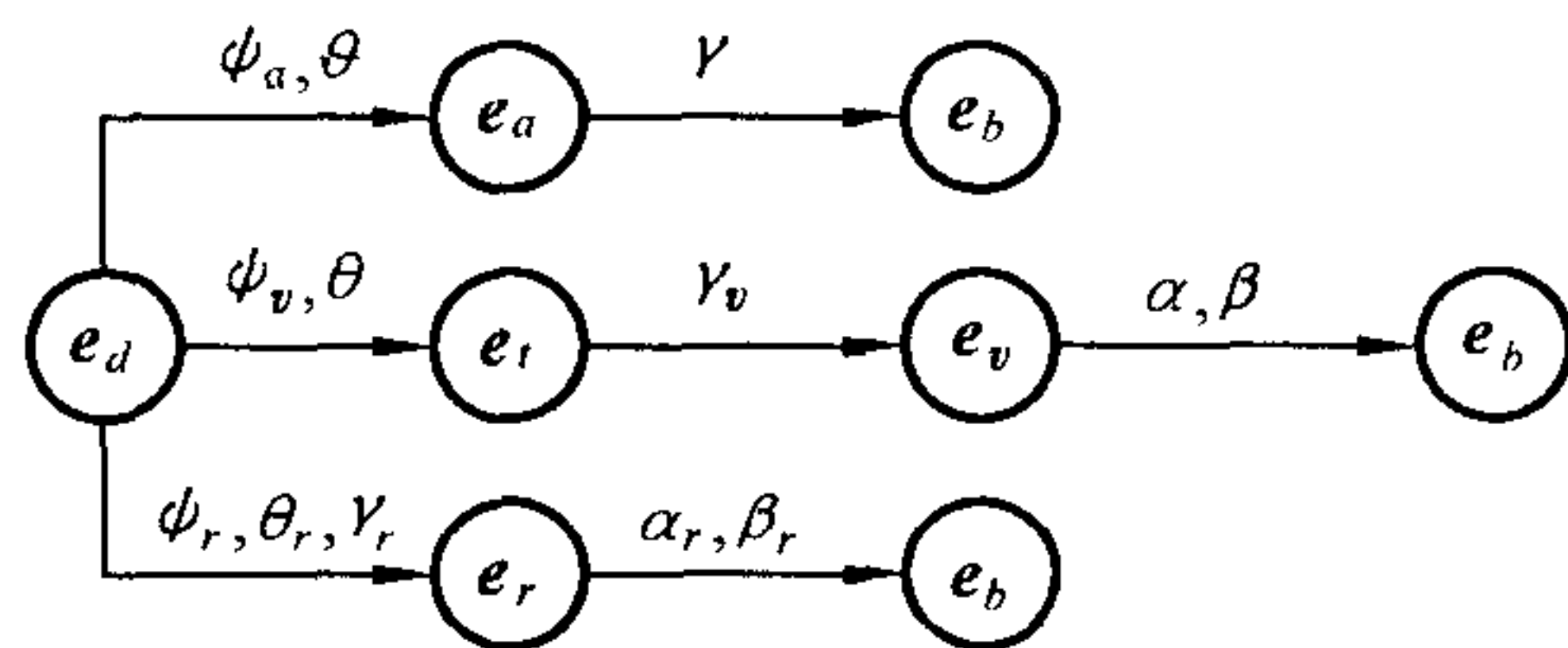


图 14.1 各基之间的关系





时针转动为正向；

$\beta_r$ ——相对侧滑角，相对速度  $v_r$  与导弹纵对称面之夹角，以  $e_r$  绕  $oy_r$  逆时针转动为正向；

$\alpha_r$ ——相对攻角，导弹纵轴  $ox_1$  与  $v_r$  在纵对称面  $x_1oy_1$  上的投影之夹角，以  $e_b$  绕  $oz_1$  轴逆时针转动为正向。

### 14.2.3 坐标变换

利用基本变换矩阵式(8.3) ~ (8.5)，便可得所需要的坐标变换矩阵。从图 14.1 看出下列几种坐标变换矩阵：

$$C_{td} = C_3(\theta)C_2(\psi_v) \quad (14.1)$$

$$C_{vt} = C_1(\gamma_v) \quad (14.2)$$

$$C_{bv} = C_3(\alpha)C_2(\beta) \quad (14.3)$$

$$C_{ba} = C_1(\gamma) \quad (14.4)$$

$$C_{ad} = C_3(\vartheta)C_2(\psi_a) \quad (14.5)$$

$$C_{rd} = C_1(\gamma_r)C_3(\theta_r)C_2(\psi_r) \quad (14.6)$$

$$C_{br} = C_3(\alpha_r)C_2(\beta_r) \quad (14.7)$$

### 14.2.4 主要坐标系间的关系详解

#### 1. 弹道坐标系与平动坐标系的关系

如图 14.2 所示。坐标系  $o - x_2y_2z_2$  可看作是坐标系  $o - xyz$  经两次定轴旋转得到的。第一次绕铅直轴  $oy$  旋转  $\psi_v$  角，转至  $ox'_2z_2$  位置，转动角速度矢量  $\dot{\psi}_v$  与  $oy$  轴一致。第二次继之绕  $oz_2$  轴旋转  $\theta$  角， $ox'_2y$  转至  $ox_2y_2$  位置（ $ox_2$  与  $v$  重合），旋转角速度  $\dot{\theta}$  沿  $oz_2$  轴方向，得到弹道坐标系  $o - x_2y_2z_2$ 。由以上旋转过程知，在飞行力学中的旋转，一律以逆时针转动为正向。因此自射出点向前看（沿  $ox$  轴方向），弹道偏角  $\psi_v$  偏离  $xoy$  平面左边为正，即  $v$  在  $xoy$  平面左边时  $\psi_v$  为正， $v$  在  $xoy$  平面右边时  $\psi_v$  为负，这与第八章侧向偏角的正负号规定比起来恰好相反。

$o - xyz$  与  $o - x_2y_2z_2$  两坐标系间的关系，由  $\theta$  和  $\psi_v$  两个角度确定。速度  $v$ （沿  $ox_2$  轴）在  $o - xyz$  三轴上的投影以  $\dot{x}$ 、 $\dot{y}$ 、 $\dot{z}$  表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \cos \psi_v \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{z} = -v \cos \theta \sin \psi_v \end{cases} \quad (14.8)$$

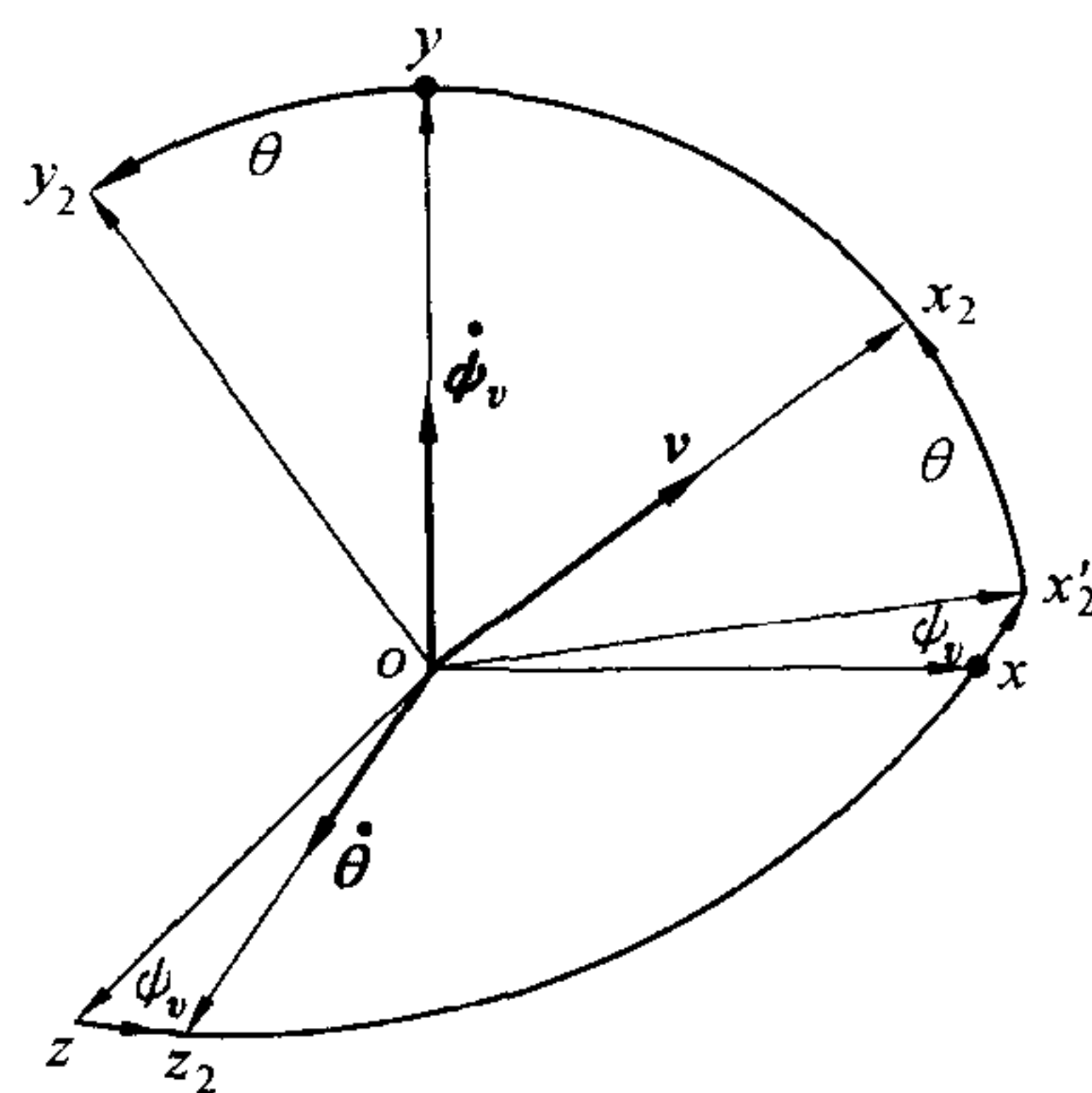


图 14.2 弹道坐标系与平动坐标系





即导弹质心移动的运动学方程式。

方程组(14.8)中的  $\cos\theta\cos\psi_v$ 、 $\sin\theta$  和  $-\cos\theta\sin\psi_v$  正是  $ox_2$  轴对于  $o-xyz$  三轴夹角的方向余弦,它们是  $ox_2$  轴上单位矢量在  $o-xyz$  三轴上的投影值。显然,若事先已知这些方向余弦,就可不费力气地把运动方程写出。同样,可以把  $oy_2$  轴上的单位矢量投影到  $o-xyz$  三轴上,又得到  $oy_2$  轴对  $ox$ 、 $oy$  和  $oz$  三轴间方向余弦为  $-\sin\theta\cos\psi_v$ 、 $\cos\theta$  及  $\sin\theta\sin\psi_v$ 。 $oz_2$  轴上的单位矢量在  $o-xyz$  三轴上的投影为  $\sin\psi_v$ 、 $0$  及  $\cos\psi_v$ 。归结九个方向余弦,列于表 14.1 中,这可由式(14.1)直接得出。可见,两种方法能得同一结果;一是坐标投影法,另一是按公式(14.1)计算。前者是经典方法,比较原始;后者则较直接,不易出错。

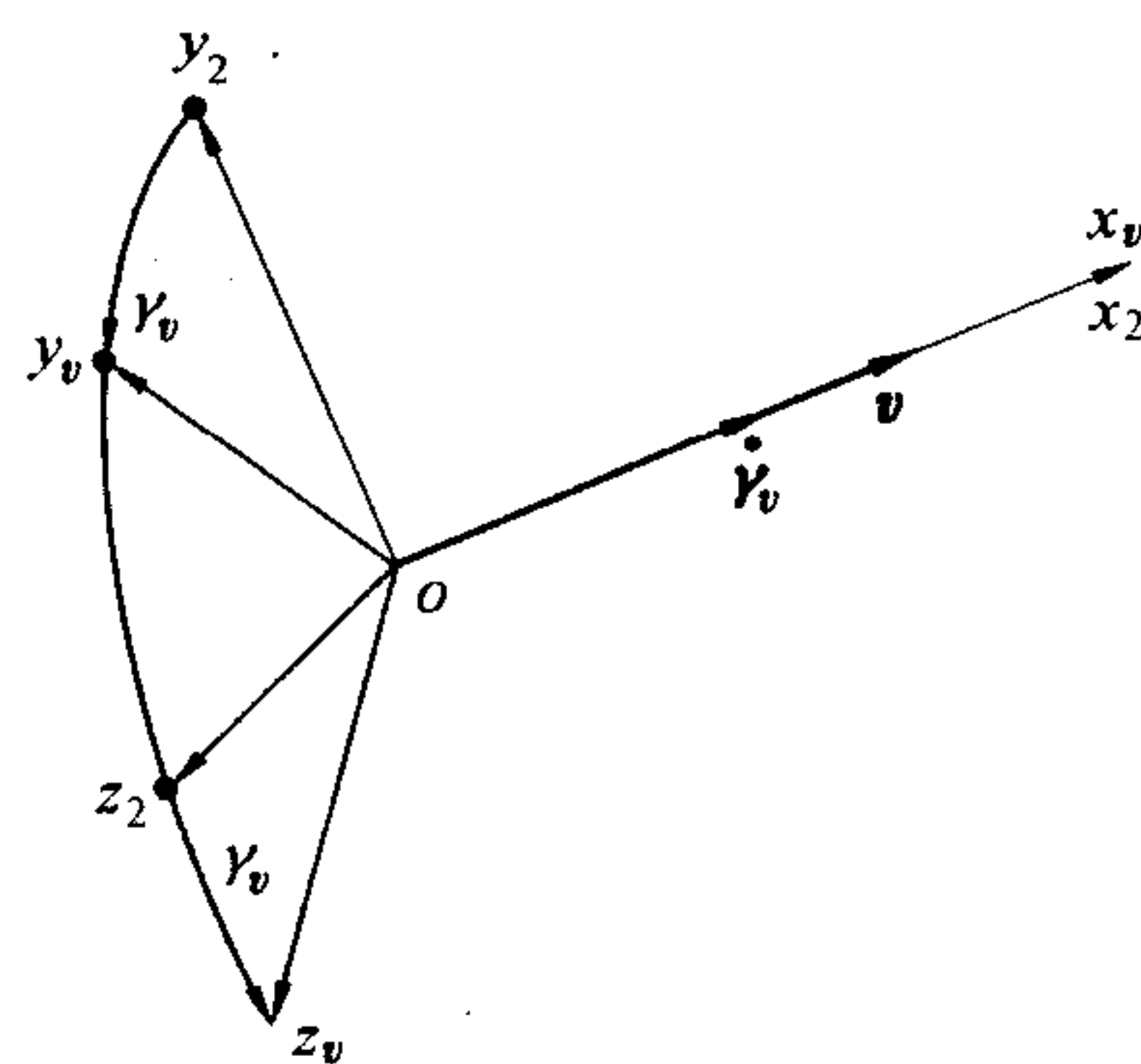


图 14.3 弹道坐标系与速度坐标系

## 2. 速度坐标系和弹道坐标系间的关系

从两坐标系的定义知道,它们之间仅相差一个角度  $\gamma_v$ ,  $\gamma_v$  叫做速度倾斜角(图 14.3),它是导弹纵向对称面与铅垂面间的夹角,规定绕  $ox_2$ (或  $ox_c$ ) 逆时针转动为正向。仿照上述方法,使得两坐标系间方向余弦表 14.2,这由式(14.2)得出。

表 14.1 弹道坐标系与平动坐标系各轴夹角的方向余弦

坐标轴	$ox_2$	$oy_2$	$oz_2$
$ox$	$\cos\theta\cos\psi_v$	$-\sin\theta\cos\psi_v$	$\sin\psi_v$
$oy$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$0$
$oz$	$-\cos\theta\sin\psi_v$	$\sin\theta\sin\psi_v$	$\cos\psi_v$

表 14.2 弹道坐标系与速度坐标系的方向余弦

坐标轴	$ox_v$	$oy_v$	$oz_v$
$ox_2$	$1$	$0$	$0$
$oy_2$	$0$	$\cos\gamma_v$	$-\sin\gamma_v$
$oz_2$	$0$	$\sin\gamma_v$	$\cos\gamma_v$

## 3. 弹体坐标系与速度坐标系之间的关系

比较图 14.4 与图 14.2,其坐标系间方向余弦类同(表 14.3),此由式(14.3)确定。

表 14.3 弹体坐标系与速度坐标系间方向余弦

坐标轴	$ox_1$	$oy_1$	$oz_1$
$ox_v$	$\cos\alpha\cos\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$
$oy_v$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$0$
$oz_v$	$-\cos\alpha\sin\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\beta$



## 4. 弹体系与平动系间的关系

导弹弹体在空中的姿态,是用弹体坐标系与平动坐标系之间的三个角度  $\vartheta$ 、 $\psi_a$ 、 $\gamma$  确定的(图 14.5)。乃由坐标系经三次转动体现它们之间的关系:第一次转  $\psi_a$  角,第二次转  $\vartheta$  角,第三次转  $\gamma$  角,则弹体系至平协系的坐标变换矩阵为

$$C_{db} = C_{bd}^T = (C_{ba}C_{ad})^T = [C_1(\gamma)C_3(\vartheta)C_2(\psi_a)]^T \quad (14.9)$$

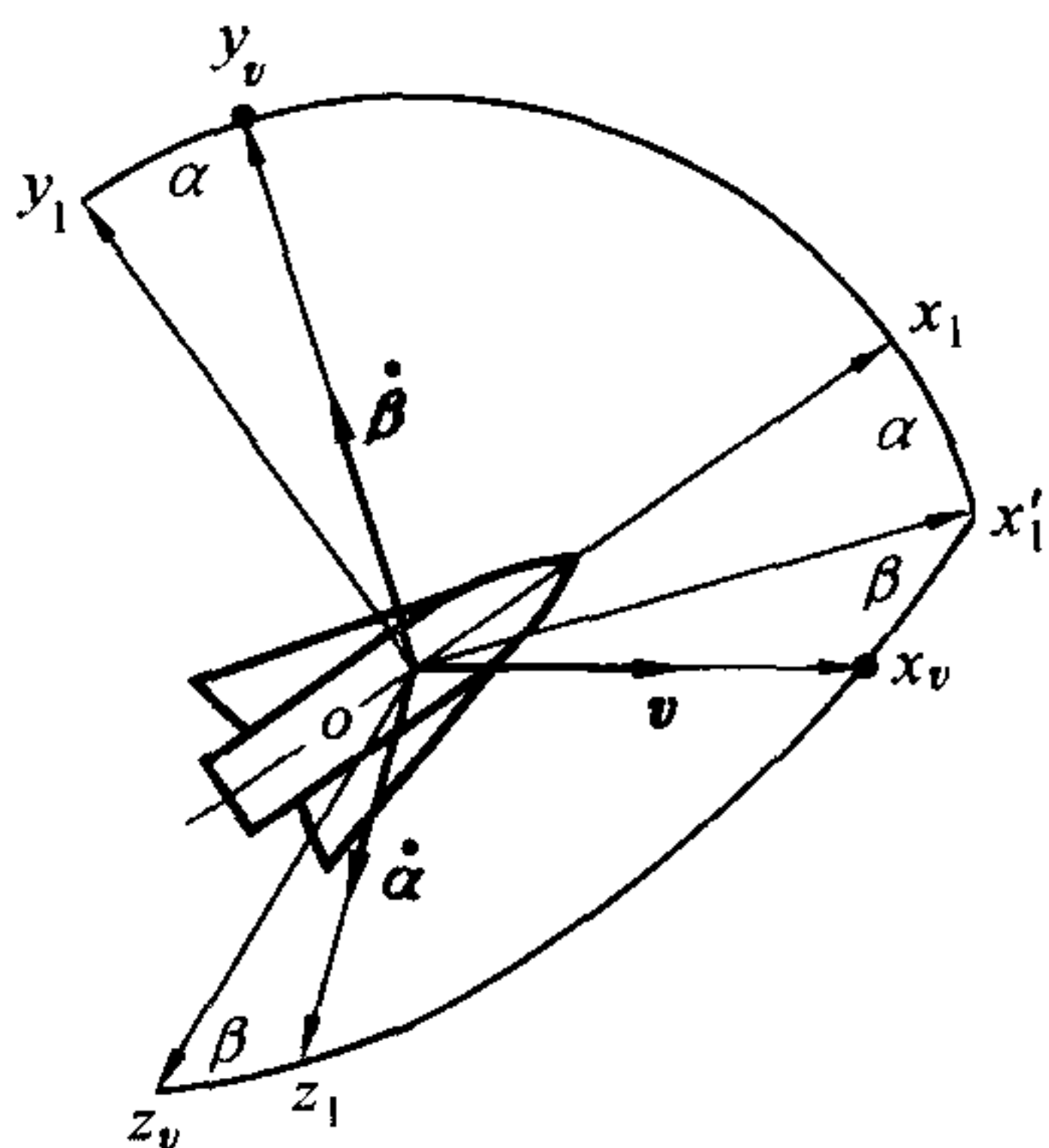


图 14.4 弹体坐标系与速度坐标系

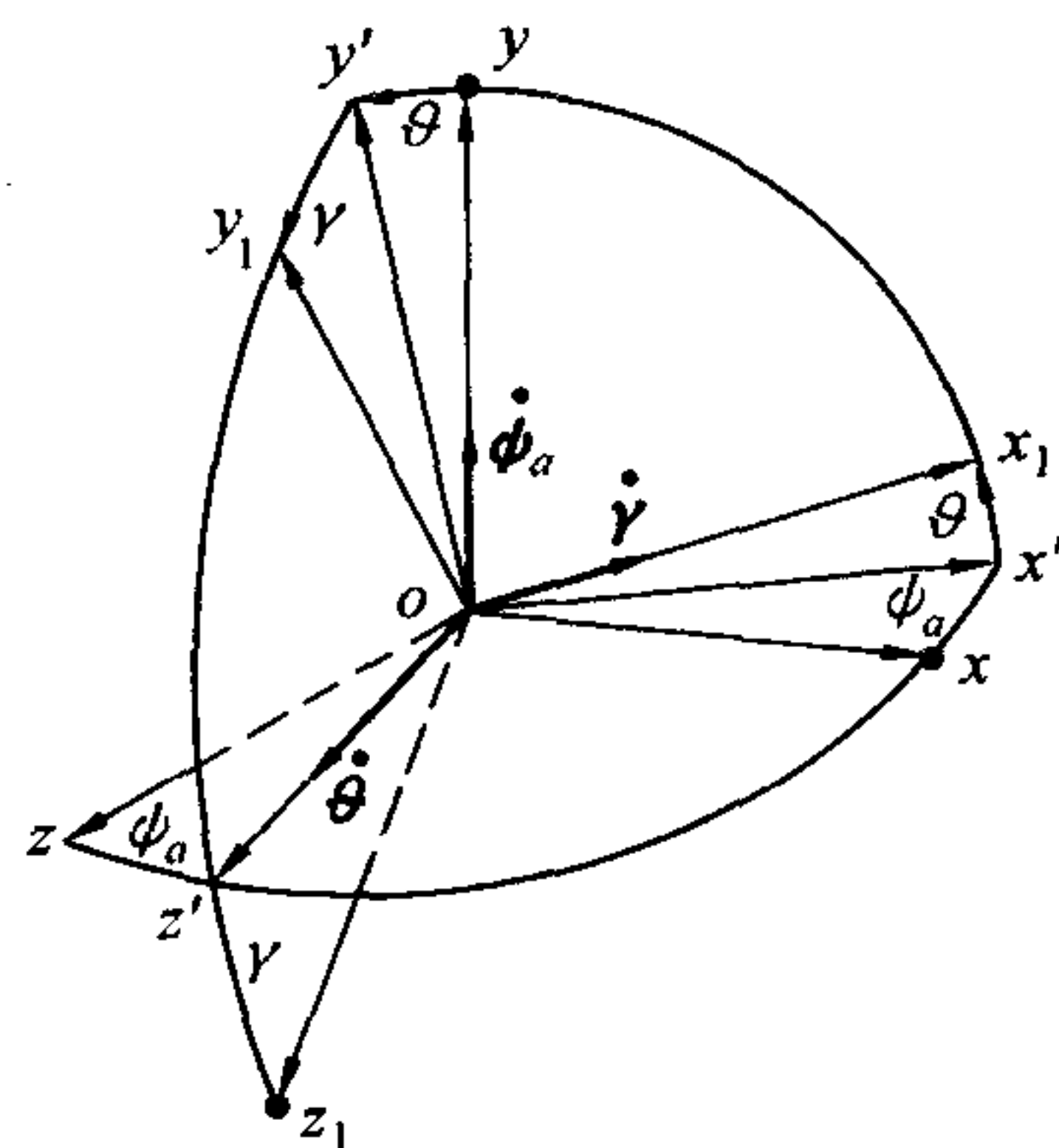


图 14.5 弹体坐标系与平动坐标系

具体结果列于表 14.4 中。

表 14.4 弹体坐标系与平动坐标系间的方向余弦

坐标轴	$ox_1$	$oy_1$	$oz_1$
$ox$	$\cos\vartheta\cos\psi_a$	$-\sin\vartheta\cos\psi_a\cos\gamma + \sin\psi_a\sin\gamma$	$\sin\vartheta\cos\psi_a\sin\gamma + \sin\psi_a\cos\gamma$
$oy$	$\sin\vartheta$	$\cos\vartheta\cos\gamma$	$-\cos\vartheta\sin\gamma$
$oz$	$-\cos\vartheta\sin\psi_a$	$\sin\vartheta\sin\psi_a\cos\gamma + \cos\psi_a\sin\gamma$	$-\sin\vartheta\sin\psi_a\sin\gamma + \cos\psi_a\cos\gamma$

导弹转动角速度以  $\omega$  表示,为

$$\omega = \dot{\vartheta} + \dot{\psi}_a + \dot{\gamma} \quad (14.10)$$

其各角速度  $\dot{\vartheta}$ 、 $\dot{\psi}_a$ 、 $\dot{\gamma}$  在弹体坐标系各轴上的投影列于表 14.5 中。

表 14.5 弹体角速度分量

轴 \ 矢量	$\dot{\vartheta}$	$\dot{\psi}_a$	$\dot{\gamma}$
$ox_1$	0	$\dot{\psi}_a\sin\vartheta$	$\dot{\gamma}$
$oy_1$	$\dot{\vartheta}\sin\gamma$	$\dot{\psi}_a\cos\vartheta\cos\gamma$	0
$oz_1$	$\dot{\vartheta}\cos\gamma$	$-\dot{\psi}_a\cos\vartheta\sin\gamma$	0

有时需要知道弹体坐标系  $o-x_1y_1z_1$  与弹道坐标系  $o-x_2y_2z_2$  之间的关系,用矩阵变换不难得到它们之间夹角的方向余弦,列于表 14.6。



表 14.6 弹体系与弹道系间的方向余弦

坐标轴	$ox_1$	$oy_1$	$oz_1$
$ox_2$	$\cos\alpha \cos\beta$	$-\sin\alpha \cos\beta$	$\sin\beta$
$oy_2$	$\sin\alpha \cos\gamma_v + \sin\gamma_v \cos\alpha \sin\beta$	$\cos\alpha \cos\gamma_v - \sin\gamma_v \sin\alpha \sin\beta$	$-\cos\beta \sin\gamma_v$
$oz_2$	$\sin\alpha \sin\gamma_v - \cos\gamma_v \cos\alpha \sin\beta$	$\cos\alpha \sin\gamma_v + \cos\gamma_v \sin\alpha \sin\beta$	$\cos\beta \cos\gamma_v$

## 14.3 运动方程

### 14.3.1 在速度坐标系中的导弹质心运动方程

取速度坐标系为参考系,在此建立以  $e_v$  为基的质心运动动力学方程。 $e_v$  的转动角速度(见图 14.6)为

$$\begin{aligned}\omega_v = \dot{\theta} + \dot{\psi}_v + \dot{\gamma}_v = \\ (\dot{\gamma} + \dot{\psi}_v \sin\theta) e_{v1} + (\dot{\theta} \sin\gamma_v + \dot{\psi}_v \cos\theta \cos\gamma_v) e_{v2} + \\ (\dot{\theta} \cos\gamma_v - \dot{\psi}_v \cos\theta \sin\gamma_v) e_{v3}\end{aligned}\quad (14.11)$$

而

$$v = v e_{v1} \quad (14.12)$$

由相对动参考系的动量定理

$$m \frac{dv}{dt} = m \left( \frac{d_r v}{dt} + \omega_v \times v \right) = F \quad (14.13)$$

便得

$$m \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v(\dot{\theta} \cos\gamma_v - \dot{\psi}_v \cos\theta \sin\gamma_v) \\ -v(\dot{\theta} \sin\gamma_v + \dot{\psi}_v \cos\theta \cos\gamma_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x_v} \\ F_{y_v} \\ F_{z_v} \end{bmatrix} \quad (14.14)$$

式中,  $F_{x_v}$ 、 $F_{y_v}$ 、 $F_{z_v}$  为总外力(其中包括干扰力)的三分量。在有风的情况下,空气动力是在相对速度坐标系中度量的,需要转换到速度坐标系中来。

若将诸力转换到弹道系,且取  $\gamma_v = 0$ ,则式(14.14)就变成弹道系内的方程,可见方程(14.14)更具有普遍性。

### 14.3.2 导弹转动运动方程

对导弹及有控水下运动体,常采用弹体系建立绕心运动方程。由式(8.39),并取动点为质心,动量矩矢量  $K$  对时间的导数分解为对弹体系的相对导数与因转速  $\omega$  转动产生的牵连速度之和。弹体的转动角速度依照式(14.10)的关系直接写出

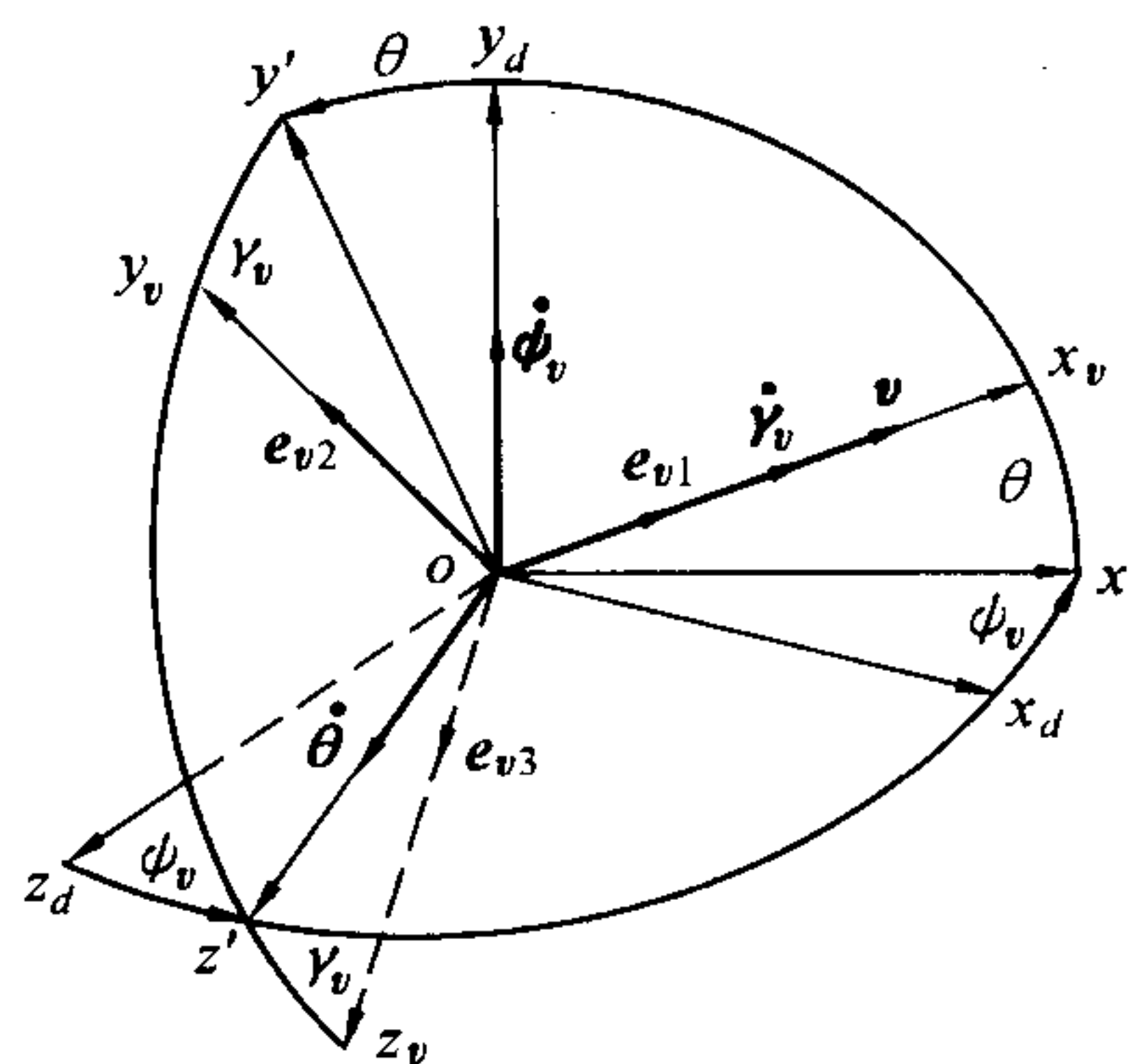


图 14.6 速度系及其角速度





$$\omega = \dot{\vartheta} + \dot{\psi}_a + \dot{\gamma} = \omega_{x_1} + \omega_{y_1} + \omega_{z_1} =$$

$$(\dot{\gamma} + \dot{\psi}_a \sin \vartheta) e_{b1} + (\dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\psi}_a \cos \vartheta \cos \gamma) e_{b2} + (\dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi}_a \cos \vartheta \sin \gamma) e_{b3} \quad (14.15)$$

于是得矩阵形式的转动方程

$$\frac{d}{dt}(J[\omega]) + \tilde{\omega}J[\omega] = [M] \quad (14.16)$$

对导弹的转动惯量矩阵  $J$  一般取简单形式

$$J = \begin{bmatrix} J_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_1} \end{bmatrix} \quad (14.17)$$

就是说,弹体坐标轴就是惯性主轴。而且假定惯性中心是不变的,  $J_{x_1}$ 、 $J_{y_1}$ 、 $J_{z_1}$  是相对  $o - x_1 y_1 z_1$  三轴的转动惯量。对变质点系,注意  $dt$  内不计  $J$  的变化,即刚化原理<sup>[2,4,5]</sup>。将式(14.16)展开,使得转动运动方程的一般形式为

$$\begin{cases} J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1})\omega_{y_1}\omega_{z_1} = M_{x_1} \\ J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1})\omega_{x_1}\omega_{z_1} = M_{y_1} \\ J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1})\omega_{x_1}\omega_{y_1} = M_{z_1} \end{cases} \quad (14.18)$$

运动学方程由式(14.15)知

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} + \dot{\psi}_a \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\psi}_a \cos \vartheta \cos \gamma \\ \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi}_a \cos \vartheta \sin \gamma \end{bmatrix}$$

经变换易得

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega_{y_1} \sin \gamma + \omega_{z_1} \cos \gamma \\ \dot{\psi}_a = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_{y_1} \cos \gamma - \omega_{z_1} \sin \gamma) \\ \dot{\gamma} = \omega_{x_1} - \tan \vartheta (\omega_{y_1} \cos \gamma - \omega_{z_1} \sin \gamma) \end{cases} \quad (14.19)$$

## 14.4 联系方程

描述导弹质心运动方位和弹体姿态的八个角度是  $\psi_a$ 、 $\vartheta$ 、 $\gamma$ 、 $\psi_v$ 、 $\theta$ 、 $\psi_v$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ , 它们之间并不是完全独立的关系,还存在三个联系方程。就是说,只要知道了其中5个角,其余3个角便可随之确定。利用坐标变换矩阵不难建立这种关系式。不妨考虑基  $e_d$  至  $e_v$  的转换关系:



$$C_{vd} = C_{vt}C_{td} \quad (14.20)$$

又可写成

$$C_{vd} = C_{vb}C_{ba}C_{ad} \quad (14.21)$$

将式(14.1)、(14.2)代入(14.20),再将式(8.3)~(8.5)代入得

$$C_{vd} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi_v & \sin\theta & -\cos\theta\sin\psi_v \\ \sin\gamma_v\sin\psi_v - \cos\gamma_v\sin\theta\cos\psi_v & \cos\gamma_v\cos\theta & \sin\gamma_v\cos\psi_v + \cos\gamma_v\sin\theta\sin\psi_v \\ \cos\gamma_v\sin\psi_v + \sin\gamma_v\sin\theta\cos\psi_v & -\sin\gamma_v\cos\theta & \cos\gamma_v\cos\psi_v - \sin\gamma_v\sin\theta\sin\psi_v \end{bmatrix} \quad (14.22)$$

将式(14.3)~(14.5)代入式(14.21),再将式(8.3)~(8.5)代入得

$$C_{vd} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\vartheta\cos\psi_a \\ + (\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma)\sin\vartheta\cos\psi_a \\ - (\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma)\sin\psi_a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\sin\vartheta \\ - (\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ + \sin\beta\sin\gamma)\cos\vartheta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\cos\alpha\cos\beta\cos\vartheta\sin\psi_a \\ - (\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma)\sin\vartheta\sin\psi_a \\ - (\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma)\cos\psi_a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sin\alpha\cos\vartheta\cos\psi_a \\ - (\cos\alpha\cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi_a \\ + \cos\alpha\sin\gamma\sin\psi_a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sin\alpha\sin\vartheta \\ + \cos\alpha\cos\gamma\cos\vartheta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\vartheta\sin\psi_a \\ + \cos\alpha\cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi_a \\ + \cos\alpha\sin\gamma\cos\psi_a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\cos\alpha\sin\beta\cos\vartheta\cos\psi_a \\ - (\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma)\sin\vartheta\cos\psi_a \\ + (\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma)\sin\psi_a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\cos\alpha\sin\beta\sin\vartheta \\ + (\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ - \cos\beta\sin\gamma)\cos\vartheta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\beta\cos\vartheta\sin\psi_a \\ + (\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma)\sin\vartheta\sin\psi_a \\ + (\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma)\cos\psi_a \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (14.23)$$

试比较式(14.22)和(14.23)对应的九个矩阵元素式,便得到九个等式,即九个联系方程。但是,只需要择取其中三个表达式较为简单的关系式就行了。当然,这三个方程中要显含 $\theta$ 、 $\psi_v$ 和 $\gamma_v$ 三个角。据此,可选行列号 $ij$ 为12、13、22的元素,于是得:

$$\sin\theta = \cos\alpha\cos\beta\sin\vartheta - (\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma)\cos\vartheta \quad (14.24)$$

$$\cos\theta\sin\psi_v = \cos\alpha\cos\beta\cos\vartheta\sin\psi_a + (\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma)\sin\vartheta\sin\psi_a + (\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma)\cos\psi_a \quad (14.25)$$

$$\cos\theta\cos\psi_v = \sin\alpha\sin\vartheta + \cos\alpha\cos\gamma\cos\vartheta \quad (14.26)$$

现今一般导弹飞行力学著作中均未计及风速对气动力的影响。实际上,由于风速的存在,气动力和力矩表达式中的速度则应取相对速度 $v_r$ 式(8.9), $v_r$ 在平动坐标系中的方位角 $\psi_r$ 和 $\theta_r$ 由 $v_r$ 在该坐标系中的三分量的表达式确定,参照式(8.8)和式(14.8),写成列阵形式

$$[v_r] = \begin{bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \\ v_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{bmatrix} = v_r \begin{bmatrix} \cos\theta_r\cos\psi_r \\ \sin\theta_r \\ -\cos\theta_r\sin\psi_r \end{bmatrix} \quad (14.27)$$

则得



$$\theta_r = \arcsin \frac{v_y - w_y}{v_r} \quad (14.28)$$

$$\psi_r = -\arcsin \frac{v_z - w_z}{v_r \cos \theta_r} \quad (14.29)$$

气动力和力矩在有风存在条件下,其攻角和侧滑角亦应以相对攻角  $\alpha_r$  和相对侧滑角替代; $\alpha_r$  和  $\beta_r$  所依赖的关系式比较复杂,但仍可采用推导式(14.24)~(14.26)的方法解决。利用图 14.1 各基间的转换关系,可知

$$C_{ar} = C_{ad}C_{dr} = C_{ab}C_{br}$$

将式(14.5)、(14.6)及(14.4)、(14.7)代入上式得

$$C_3(\vartheta)C_2(\psi_a)[C_1(\gamma_r)C_3(\theta_r)C_2(\psi_r)]^T = C_1^T(\gamma)C_3(\alpha_r)C_2(\beta_r) \quad (14.30)$$

再将式(8.3)~(8.5)代入,由矩阵相同行列元素相等便得所需要的角度关系式。此过程可以由计算机替代人工推导。

## 14.5 诸力和力矩

作用在导弹上的力有重力、发动机推力、气动力和控制力;力矩有气动力矩和控制力矩。对重力不再重述。对推力,只考虑其轴向分量  $F_P$ ,不计推力偏心。推力在弹道坐标系上的分量,由表 14.6 的方向余弦适知

$$\begin{cases} F_{Px_2} = F_P \cos \alpha \cos \beta \\ F_{Py_2} = F_P (\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) \\ F_{Pz_2} = F_P (\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) \end{cases} \quad (14.31)$$

空气动力阻力、升力、侧力,它们沿速度坐标系三轴方向分布,其一般表达式为

$$\begin{cases} R_x = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_x \\ R_y = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y \\ R_z = \frac{1}{2} \rho v^2 S C_z \end{cases} \quad (14.32)$$

总空气动力为

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y + \mathbf{R}_z$$

则总空气动力在弹道坐标系各轴上的投影(表 14.2)为

$$\begin{cases} R_{x_2} = -R_x \\ R_{y_2} = R_y \cos \gamma_v - R_z \sin \gamma_v \\ R_{z_2} = R_y \sin \gamma_v + R_x \cos \gamma_v \end{cases} \quad (14.33)$$





总空气动力矩对弹体坐标系有三个分量  $M_{x_1}$ 、 $M_{y_1}$  和  $M_{z_1}$ 。 $M_{x_1}$  表示滚转力矩,使弹绕纵轴旋转; $M_{y_1}$  表示偏航力矩,使弹绕立轴  $oy_1$  旋转; $M_{z_1}$  表示俯仰力矩,使弹绕  $oz_1$  轴转动。气动力和力矩的具体计算,须由空气动力学专门解决。

导弹飞行方向和飞行速度大小的改变,是依靠操纵机构提供控制力和控制力矩来实现的,其主要形式有如下几种。

### 1. 空气动力操纵面

依靠空气和操纵面(方向舵、升降舵、副翼等)的相对运动,在操纵面上产生气动力来对导弹的飞行进行操纵。

空气舵是常用的一种操纵机构,如图 14.7 所示。前面不能活动部分称为安定面,在安定面后面可绕  $D$  轴旋转的部分即为空气舵。当舵绕  $D$  转动产生一个与导弹纵轴的夹角  $\delta_c$  时,作用于舵上的空气动力对导弹质心形成一个力矩  $M_c$ ,使导弹产生绕质心运动。装在导弹水平翼上的空气舵叫升降舵,以控制导弹上下(纵向)运动;装在导弹立翼上的空气舵叫方向舵,以控制导弹侧向运动。空气舵所装部位及其形式是各种各样的。

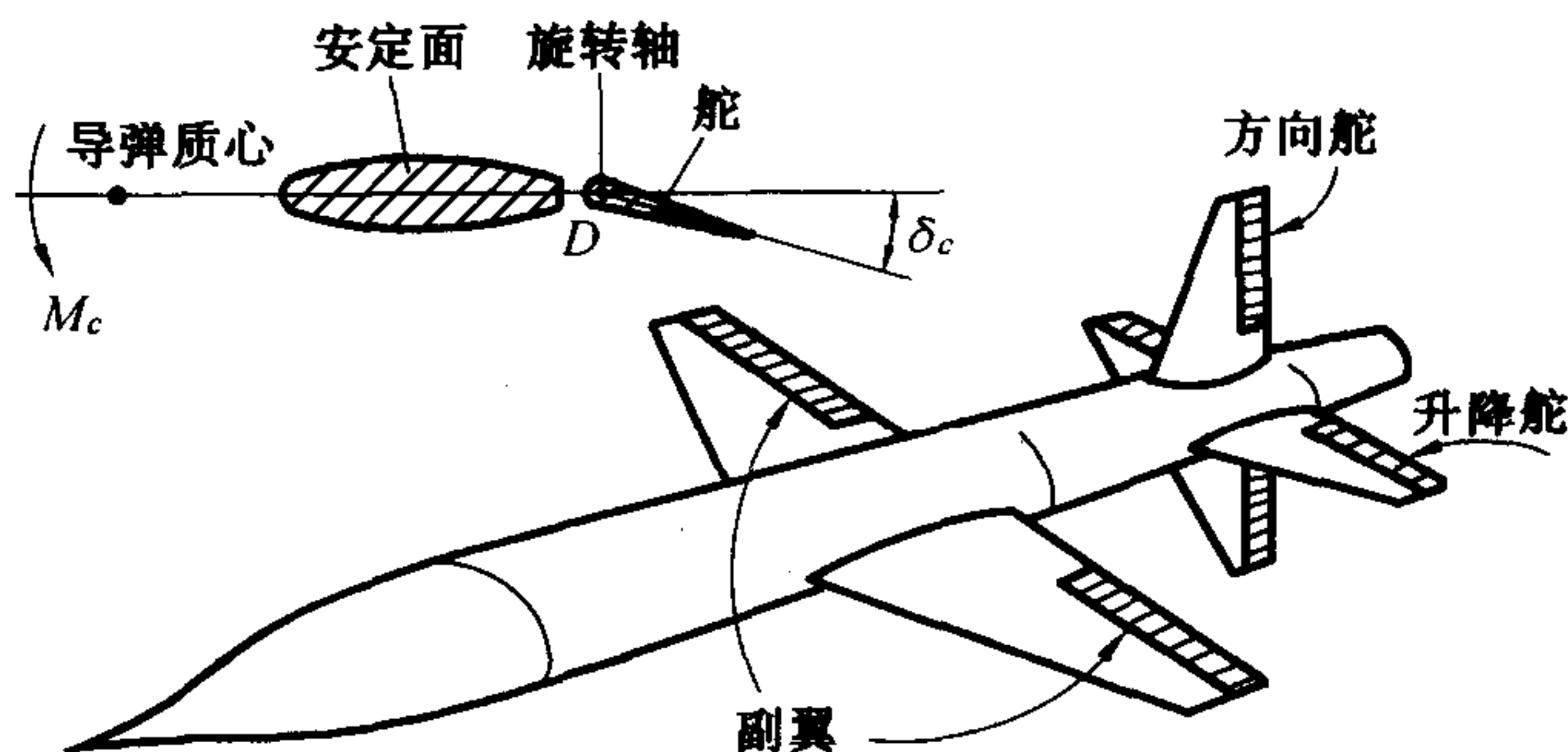


图 14.7 导弹的空气舵

装在机翼末端,并在相反方向上偏转的成对空气舵称为副翼,又叫滚动舵。副翼将提供滚转力矩,使导弹倾斜,故此力矩又叫倾斜力矩,以  $M_x$  表示。

### 2. 燃气舵

燃气舵如图 14.8 所示,安装在发动机后部,利用燃气流相对于舵面的运动产生气动力和力矩。

### 3. 旋转发动机

将导弹的发动机,安装在万向支架上,如图 14.9 所示。当发动机轴相对导弹纵轴转动形成夹角  $\delta_p$  时,发动机产生推力分量  $F_p \sin \delta_p$ ,构成对质心的力矩,改变导弹运动。如只转动喷管方向,其效果将是一样的。若喷喉到质心距离为  $l_L$ ,则控制力矩为

$$M_{Pc} \approx F_p l_L \delta_p \quad (14.34)$$

今以空气舵为操纵机构,写出空气动力和空气动力矩的一般表达式。设升降舵偏转角为  $\delta_z$ ,方



向舵集团角为  $\delta_y$ 。 $\delta_y$  和  $\delta_z$  通常规定为绕  $y_1$ 、 $z_1$  轴正向右旋即为正值。副翼的偏角总是一上一下成对出现,例如图 14.7 中的平置翼,规定右副翼向下偏为正(相应地左翼向上为正),副翼偏转角以  $\delta_x$  表示。正的  $\delta_x$  产生负的操纵力矩。兹将诸气动力系数和气动力矩系数表示如下。

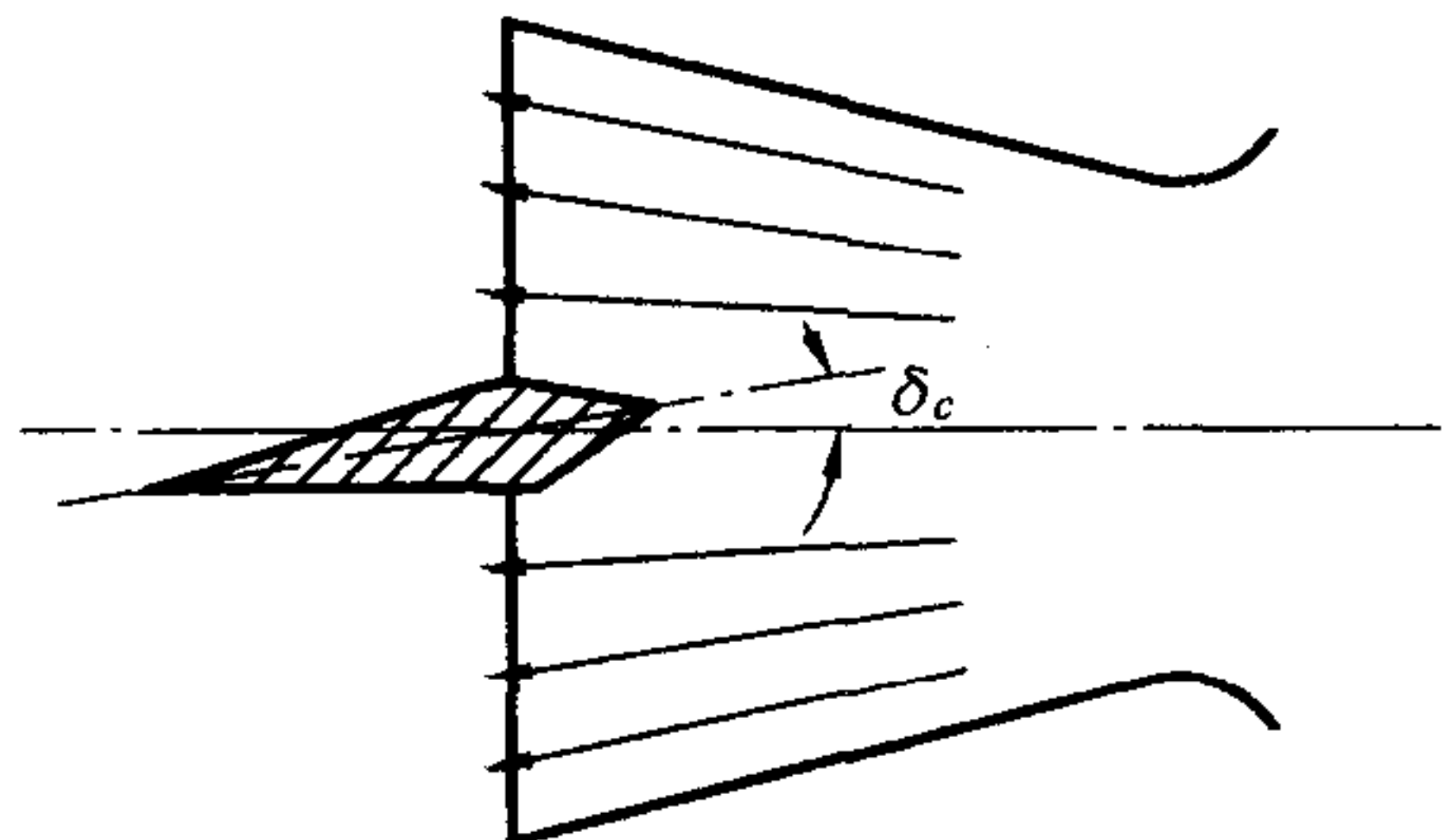


图 14.8 燃气舵

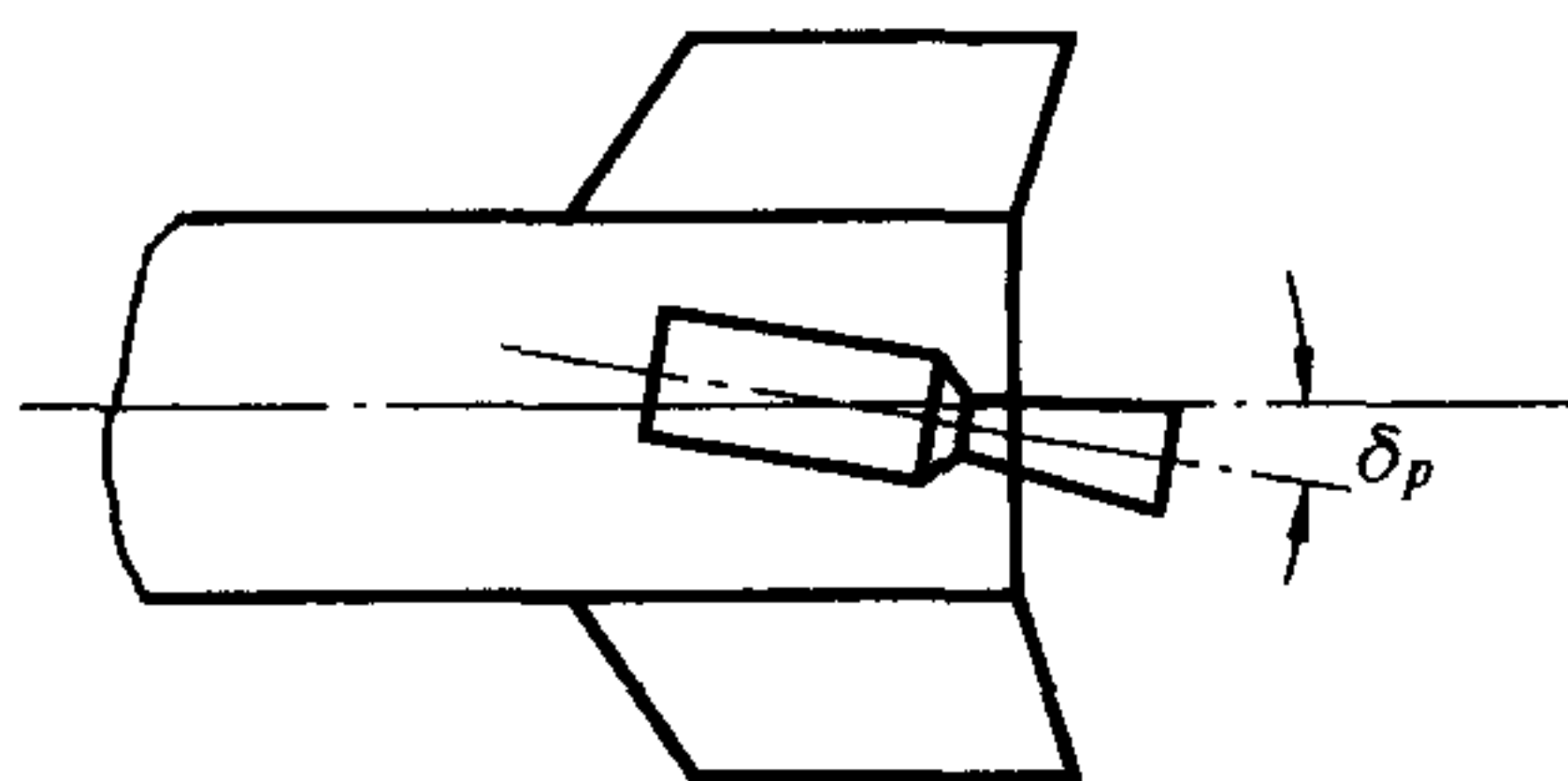


图 14.9 旋转发动机

(1) 阻力系数  $C_x$

$$C_x = C_{x0}(Ma, Re) + C_{xa}(Ma, \alpha) + C_{x\beta}(Ma, \beta) \quad (14.35)$$

式中  $C_{x0}$ ——零升阻力系数,是马赫数  $Ma$  和雷诺数  $Re$  的函数;

$C_{xa}$ 、 $C_{x\beta}$ ——对冲角(迎角) $\alpha$  和侧滑角 $\beta$  的诱导阻力系数,见图 14.10。

(2) 升力系数  $C_y$

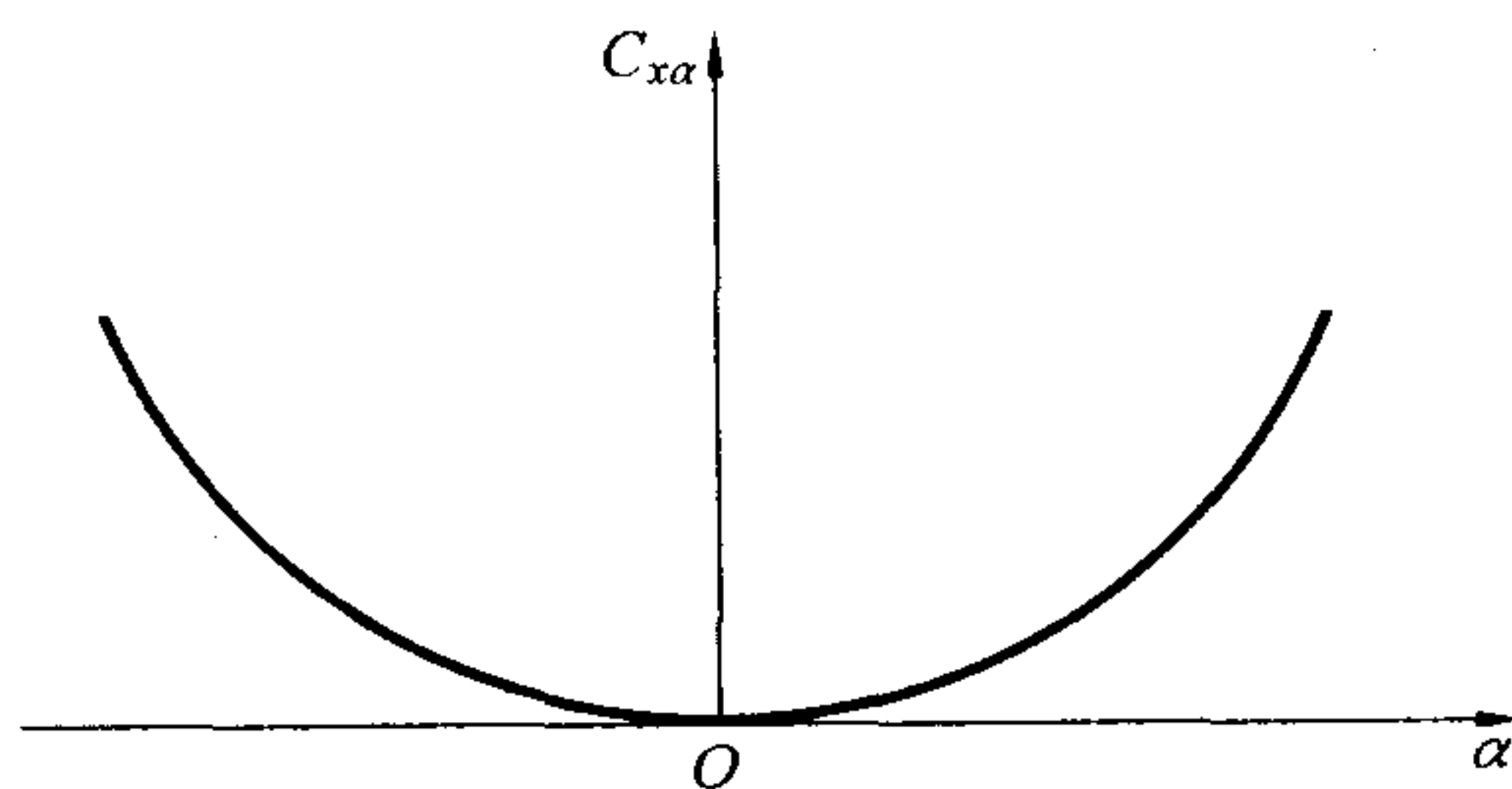
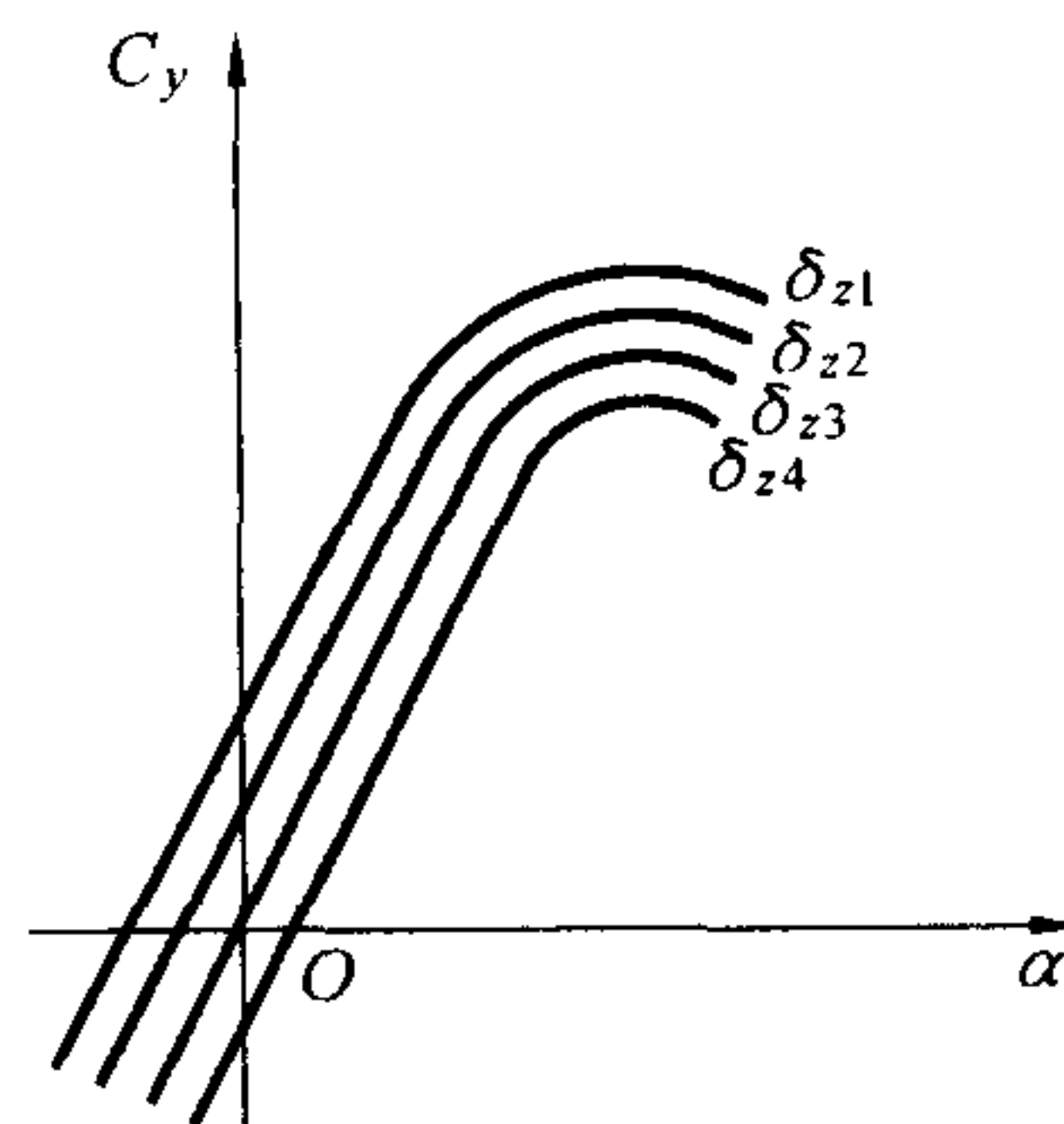
升力系数取决于导弹外形,迎角  $\alpha$ ,升降舵偏转角  $\delta_z$ ,  $Ma$  数,  $Re$  数,绕流特性等。图 14.11 表示  $C_y$  与  $\alpha$  及  $\delta_z$  的函数关系。在弹道计算时,  $C_y$  可取如下表达式

$$C_y(Ma, \alpha, \delta_z) = C_{y0}(Ma) + C_{ya}(Ma, \alpha) + C_{y\delta_z}(Ma, \delta_z) \quad (14.36)$$

式中  $C_{y0}$ ——迎角  $\alpha$  和升降舵偏角  $\delta_z$  为零时的升力系数,对轴对称导弹其值为零;

$C_{ya}$ ——升力系数与迎角  $\alpha$  有关部分;

$C_{y\delta_z}$ ——升力系数与升降舵偏角  $\delta_z$  有关部分。

图 14.10 诱导阻力系数  $C_{xa} - \alpha$  曲线(小  $\alpha$ )图 14.11 不同的  $\delta_z$  下的  $C_y - \alpha$  曲线

当  $|\alpha| \leq 10^\circ$  且  $|\delta_z| \leq 20^\circ$  时,  $C_y$  可用如下近似式



$$C_y = C_{y0}(Ma) + C_y^\alpha(Ma)\alpha + C_y^\delta(Ma)\delta_z \quad (14.37)$$

式中

$$C_y^\alpha = \frac{\partial C_y}{\partial \alpha}, C_y^\delta = \frac{\partial C_y}{\partial \delta_z}$$

在空气动力学中,通常将函数右上角加角注,以表示对该角注参量的导数。

(3) 侧力系数  $C_z$

在小角度下,可取  $C_z$  的近似式如下

$$C_z = C_z^\beta(Ma)\beta + C_z^\delta\delta_y \quad (14.38)$$

式中,  $C_z^\beta$ 、 $C_z^\delta$  总是负的。

(4) 滚转力矩系数  $m_{x_1}$

滚转力矩又叫倾斜力矩,滚转力矩系数  $m_{x_1}$  取决于导弹外形、 $Ma$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ ,操纵面偏转角  $\delta_x$ 、 $\delta_y$ 、 $\delta_z$ ,角速度  $\omega_{x_1}$ 、 $\omega_{y_1}$ 、 $\omega_{z_1}$  等。即

$$m_{x_1} = m_{x_1}(Ma, \alpha, \beta, \delta_x, \delta_y, \delta_z, \omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}, \dots) \quad (14.39)$$

当  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\omega_{y_1}$ 、 $\omega_{z_1}$  较小时,可近似取为

$$m_{x_1} = m_{x_1}^\delta \delta_x + \bar{m}_{x_1}^\omega \omega_{x_1} \quad (14.40)$$

式中,  $\bar{\omega}_{x_1} = \omega_{x_1} L_r / v$ , 为无量纲滚转角速度,  $L_r$  是参考长度。

(5) 俯仰力矩系数  $m_{z_1}$

在弹体坐标系中,  $m_{z_1}$  可表示为

$$m_{z_1} = m_{z_1}(Ma, Re, \alpha, \dot{\alpha}, \delta_z, \dot{\delta}_z, \omega_z, \dots) \quad (14.41)$$

或近似表示为

$$m_{z_1} = m_{z_1 0} + m_{z_1}^\alpha \alpha + m_{z_1}^{\delta_z} \delta_z + \bar{m}_{z_1}^\omega \omega_{z_1} + \bar{m}_{z_1}^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \bar{m}_{z_1}^{\dot{\delta}_z} \dot{\delta}_z \quad (14.42)$$

式中  $m_{z_1 0}$ —— $\alpha$ 、 $\delta_z$ 、 $\omega_{z_1}$ 、 $\dot{\alpha}$  和  $\dot{\delta}_z$  等于零时的俯仰力矩系数;

$\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\delta}_z$ ——无量纲角速度,  $\bar{\alpha} = \dot{\alpha} L_r / v$ ,  $\bar{\delta}_z = \dot{\delta}_z L_r / v$ ;

$\bar{\omega}_{z_1}$ ——即  $\omega_{z_1} L_r / v$ 。

式(14.42)的最后三项描述了摆动和旋转所造成的空气阻尼力矩。

(6) 偏航力矩系数  $m_{y_1}$

对  $m_{y_1}$  可取如下表达式

$$m_{y_1} = m_{y_1}^\beta \beta + m_{y_1}^{\delta_y} \delta_y + \bar{m}_{y_1}^\omega \omega_{x_1} + \bar{m}_{y_1}^\omega \omega_{y_1} + \bar{m}_{y_1}^{\dot{\beta}} \dot{\beta} + \bar{m}_{y_1}^{\dot{\delta}_y} \dot{\delta}_y \quad (14.43)$$

需要明确一点的是,在第八章考虑俯仰力矩时,是把其中各力矩分开进行计算的,对滚转力矩也是把极阻尼力矩单独分出来计算,这与本章计算的方法并不矛盾。以上所列气动力和力矩系数的表达式,仅是一般性的。对于具体型号导弹,则需要进行具体气动分析,并通过计算或吹风试验,以求得适当的函数形式。





## 14.6 控制方程

导弹在飞行中,各运动参量要受到导引关系的约束。不同的导引方法,其运动规律是不同的。控制系统的输入是运动参数,输出是舵偏角,它们之间的关系是由导引规律决定的。控制方程将描述控制系统输入量与输出量之间的关系,即舵偏角与运动参数之间的关系。

若导弹以空气舵为操纵机构并产生控制力,在轴对称导弹上,控制力  $F_c$  的形成,是通过方向舵和升降舵产生偏转角  $\delta_y$  与  $\delta_z$ ,以改变侧滑角  $\beta$  和攻角  $\alpha$ ,使气动力发生变化,同时推力的法向分量也发生变化,从而达到控制导弹飞行的目的。在面对称导弹上,升力远大于侧力,只需使导弹倾斜,则升力便在水平方向上产生分量;而控制纵向运动,则仍由升降舵实施。总之,为改变速度方向,只需操纵导弹绕弹体坐标系的两根轴转动就行了。那么在操纵两根轴的同时,为避免操纵飞行复杂化,便要求导弹对第三根轴保持稳定。此外,为改变飞行速度的大小,一般是通过控制发动机的节气阀偏角  $\delta_p$  来调节推力的大小,也可采用改变阻力的措施来改变速度值。

不同导弹采用不同形式的控制系统,控制方程的具体形式将依具体型号导弹而定。只要确定了控制系统的方块图,并给出各方块的传递函数(有的环节为非线性函数关系),那么就不难写出相应的一系列控制方程。鉴于控制方程因型号而别,没有通用的具体方程,为了使导弹运动方程完整化,现对控制方程仅写出象征性的一般形式:

$$\begin{cases} \delta_x = \delta_x(v, \theta, \psi_v, x, y, \dots, \omega_x, \omega_y, \dots) \\ \delta_y = \delta_y(v, \theta, \psi_v, x, y, \dots, \omega_x, \omega_y, \dots) \\ \delta_z = \delta_z(v, \theta, \psi_v, x, y, \dots, \omega_x, \omega_y, \dots) \\ \delta_p = \delta_p(v, \theta, \psi_v, x, y, \dots, \omega_x, \omega_y, \dots) \end{cases} \quad (14.44)$$

控制导弹飞行的目的,是使导弹实际飞行速度方向和大小符合理想弹道的要求,即

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \theta(t) - \theta_i(t) = 0 \\ \epsilon_2 = \psi_v(t) - \psi_{vi}(t) = 0 \\ \epsilon_3 = \gamma_v(t) - \gamma_{vi}(t) = 0 \\ \epsilon_4 = v(t) - v_i(t) = 0 \end{cases} \quad (14.45)$$

式中,脚注  $i$  表示理想弹道参数值。若式(14.45)不满足,即实际值与理想值不等,那么控制系统就要对舵面进行操纵,力图使二者相等。式(14.45)没有考虑控制系统及弹体绕质心转动的惯性,称为理想操纵关系式。

## 14.7 导弹运动方程组

### 14.7.1 导弹弹道方程组

综合(14.8)、(14.14)、(14.18)、(14.19)、(14.24) ~ (14.26)、(14.44) 诸式,其中质心运动



动力学方程式(14.14)取弹道系,可得导弹运动方程组:

$$m \frac{dv}{dt} = F_P \cos \alpha \cos \beta - R_x - mg \sin \theta \quad (1)$$

$$mv \frac{d\theta}{dt} = F_P (\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + R_y \cos \gamma_v - R_z \sin \gamma_v - mg \cos \theta \quad (2)$$

$$-mv \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} = F_P (\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + R_y \sin \gamma_v + R_z \cos \gamma_v \quad (3)$$

$$J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} = M_{x_1} \quad (4)$$

$$J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{x_1} \omega_{z_1} = M_{y_1} \quad (5)$$

$$J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{x_1} \omega_{y_1} = M_{z_1} \quad (6)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{y_1} \sin \gamma + \omega_{z_1} \cos \gamma \quad (7)$$

$$\frac{d\psi_a}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_{y_1} \cos \gamma - \omega_{z_1} \sin \gamma) \quad (8)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_{x_1} - \tan \vartheta (\omega_{y_1} \cos \gamma - \omega_{z_1} \sin \gamma) \quad (9) \quad (14.46)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \theta \cos \psi_v \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \sin \theta \quad (11)$$

$$\frac{dz}{dt} = -v \cos \theta \sin \psi_v \quad (12)$$

$$m(t) = m_0 - \int_0^t q(t) dt \quad (13)$$

$$\sin \theta = \sin \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \cos \vartheta (\cos \gamma \sin \alpha \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta) \quad (14)$$

$$\cos \theta \sin \psi_v = \cos \alpha \cos \beta \cos \vartheta \sin \psi_a + \sin \alpha \cos \beta (\sin \vartheta \sin \psi_a \cos \gamma + \cos \psi_a \sin \gamma) - \sin \beta (\cos \psi_a \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi_a \sin \gamma) \quad (15)$$

$$\cos \theta \cos \gamma_v = \sin \alpha \sin \vartheta + \cos \alpha \cos \gamma \cos \vartheta \quad (16)$$

$$\delta_x = \delta_x = (v, \theta, \psi_v, x, y, \dots, \omega_x, \dots) \quad (17)$$

$$\delta_y = \delta_y = (v, \theta, \psi_v, x, y, \dots, \omega_x, \dots) \quad (18)$$

$$\delta_z = \delta_z = (v, \theta, \psi_v, x, y, \dots, \omega_x, \dots) \quad (19)$$

$$\delta_P = \delta_P = (v, \theta, \psi_v, x, y, \dots, \omega_x, \dots) \quad (20)$$



方程组中的方程⑬是质量方程,表示质量随时间 $t$ 的变化关系,其中 $q(t)$ 是气体秒流量, $q(t) = |\dot{m}|$ 。

以上20个方程中,未知数亦是20个: $v, \theta, \phi_v, x, y, z, \vartheta, \phi_a, \gamma, \gamma_v, \omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}, \alpha, \beta, m, \delta_x, \delta_y, \delta_z, \delta_p$ 。在给定初始条件下,求解方程组(14.46),就可以把这些参数求出。方程组(14.46)对解各种问题都是适用的。对各种具体问题,可将其相应地简化。不言而喻,在这个方程组中,已经把重力加速度的大小和方向视为不变,并忽略了柯里奥利加速度,也没有考虑地球表面的曲率情况。对远程导弹,则必须计及这些,具体方法见方程组(8.60)的推导;有风条件下气动力的精确表达式亦参见8.4.6节。

### 14.7.2 理想弹道方程组

对无控火箭弹道,第一章中作了六条基本假设,确定了理想弹道方程组(1.61)。这样就能比较方便地研究火箭质心运动规律,进而作为研究绕心运动的基础。对有控弹道也有类似的研究方法。在一定假设下,也可以单独研究导弹的质心运动。在第五、六两章中正是把导弹当作一个可操纵质点的运动学问题。首先假定控制系统能理想地工作;当导弹运动参数的实际值和理想值有偏差时,也能够保证无延滞地消除这一偏差。这样,控制方程应遵循(14.45)式。第二,假定作用在导弹上的力矩为零,即

$$\begin{cases} M_{x_1} = 0 \\ M_{y_1} = 0 \\ M_{z_1} = 0 \end{cases} \quad (14.47)$$

由于力矩是由空气动力矩和控制力矩组成的,这个假设意味着在这两种力矩作用下,导弹处于平衡状态。由式(14.47)所确定的冲角、侧滑角和倾斜角,称为平衡角。导弹将以这样的平衡角沿弹道运动,此运动称为平衡状态下的运动。显然,平衡角是不断变化的量,不过沿弹道变化比较缓慢。另外,如前述控制弹道一样,仍忽略柯里奥利加速度的影响,并在标准气象条件下进行弹道计算,于是得理想弹道方程组如下:





$$\begin{cases}
 \frac{dv}{dt} = F_P \cos \alpha \cos \beta - R_x - mg \sin \theta & \text{①} \\
 mv \frac{d\theta}{dt} = F_P (\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + R_y \cos \gamma_v - R_z \sin \gamma_v - mg \cos \theta & \text{②} \\
 -mv \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} = F_P (\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + R_y \sin \gamma_v + R_z \cos \gamma_v & \text{③} \\
 \frac{dx}{dt} = v \cos \theta \cos \psi_v & \text{④} \\
 \frac{dy}{dt} = v \sin \theta & \text{⑤} \\
 \frac{dz}{dt} = -v \cos \theta \sin \psi_v & \text{⑥} \\
 \frac{dm}{dt} = -q & \text{⑦} \\
 M_{x_1}(v, \gamma, \beta, \delta_x) = 0 & \text{⑧} \\
 M_{y_1}(v, \gamma, \beta, \delta_y) = 0 & \text{⑨} \\
 M_{z_1}(v, \gamma, \alpha, \delta_z) = 0 & \text{⑩} \\
 \epsilon_1 = 0 & \text{⑪} \\
 \epsilon_2 = 0 & \text{⑫} \\
 \epsilon_3 = 0 & \text{⑬} \\
 \epsilon_4 = 0 & \text{⑭}
 \end{cases} \quad (14.48)$$

## 14.8 机动性与过载

通常把导弹的机动性,理解为迅速改变飞行速度的大小和方向的能力。显然,需要改变作用于导弹上的力。并不是所有的力都可以人为地改变,比如重力就不能够改变。能够改变的力叫可操纵力。这样,操纵力就只有推力和气动力,用  $N$  表示,即

$$N = F_P + R$$

对各种飞行器,常引入所谓“过载”的概念。过载定义为可操纵力与飞行器重力  $G$  之比值,即

$$n = \frac{N}{G} \quad (14.49)$$

过载  $n$  是矢量,与可操纵力方向一致,大小为重力的倍数。显然,  $n$  在弹道坐标系  $O - x_2 y_2 z_2$  上的投影为



$$\begin{cases} n_{x_2} = \frac{1}{G}(F_P \cos \alpha \cos \beta - R_x) \\ n_{y_2} = \frac{1}{G}[F_P(\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + R_y \cos \gamma_v - R_z \sin \gamma_v] \\ n_{z_2} = \frac{1}{G}[F_P(\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + R_y \sin \gamma_v + R_z \cos \gamma_v] \end{cases} \quad (14.50)$$

式中,  $n_{x_2}$  为切向过载,  $n_{y_2}$  和  $n_{z_2}$  为法向过载。

将式(14.48)前三个质心运动方程用式(14.50)的过载表示,得

$$\begin{cases} \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = n_{x_2} - \sin \theta \\ \frac{v}{g} \frac{d\theta}{dt} = n_{y_2} - \cos \theta \\ -\frac{v}{g} \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} = n_{z_2} \end{cases} \quad (14.51)$$

或改写成下列形式

$$\begin{cases} n_{x_2} = \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} + \sin \theta \\ n_{y_2} = \frac{v}{g} \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \\ n_{z_2} = -\frac{v}{g} \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} \end{cases} \quad (14.52)$$

很明显,过载表征着改变飞行速度大小和方向的能力。

导弹按一定弹道飞行,沿给定弹道飞行所需的过载,称为需用过载,其值由式(14.52)确定。当操纵机构偏转到最大值时,飞行器所能产生的最大过载叫做可用过载。为了保证导弹正常飞行,其需用过载必须小于可用过载,而且还必须有一定裕量。由式(14.52)看出,法向过载与法向加速度具有等价性。

## 第十五章 有控弹飞行稳定性和操纵性

### 15.1 引言

在第十三章中讨论了无控火箭弹的运动稳定性,自由运动的动态稳定性和强迫运动特性,以及涡轮式火箭弹的追随稳定性。对一般有控弹来讲,也存在动态稳定性,即自由扰动运动特性。此外,还存在着强迫运动。由于有控弹靠自动控制系统操纵飞行,当操纵舵偏转某一角度时,必将引起弹道参量一系列的变化,这个舵偏转角是一种特定的强迫性干扰作用,它引起的运动也是强迫运动。这一运动的特性,即所谓有控弹的操纵性。从操纵性角度来看,弹体对舵偏转的反应越快越好,以利迅速消除其他干扰所引起的弹道偏差。显然,有控弹的稳定性与操纵性是有矛盾的,设计中必须兼顾协调解决。与无控弹相比,尽管所研究的都是强迫运动,但后者是外界干扰因素引起的弹道偏差;而有控弹由控制力和力矩引起的强迫运动则是为了消除随机弹道偏差。这是二者的本质区别。

研究有控弹实际飞行状态,就是要研究它相对于理想弹道的扰动运动。其研究方法有解析法,数值积分法和小扰动法。鉴于有控弹运动方程组比较复杂,解析法难以解决一般性问题,而较少采用;数值积分法将借助电子计算机计算出不同条件下的结果,准确性很高,但其缺点是不容易看出一般性规律;用小扰动法分析有控弹动力特性比较方便,是一种惯用的方法,其缺点是精确度差些,但可与数值计算结合起来。本章先介绍传统的小扰动法,然后论述具有滚转速率的轴对称有控火箭的飞行稳定性,以给出研究弹箭飞行稳定性的一种新的通用方法<sup>[2,4,5]</sup>。

### 15.2 扰动运动方程组

设在扰动因素作用下,有控弹的实际弹道参量为  $v, \theta, \alpha, \beta, \dots$  在同一时间内的理想弹道参量用  $v_i, \theta_i, \alpha_i, \beta_i, \dots$  表示,则





$$\begin{cases} v = v_i + \Delta v \\ \theta = \theta_i + \Delta\theta \\ \alpha = \alpha_i + \Delta\alpha \\ \vdots \end{cases} \quad (15.1)$$

式中,  $\Delta v$ 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\alpha$ 、 $\dots$  表示运动参量的偏差量。根据小扰动理论, 只要扰动因素是微小的, 那么偏差量也是微小的量, 并且是随时间变化的函数。若将式(15.1)代入方程组(14.46)中, 可得到扰动运动方程组。为了使问题不致过于复杂, 暂且先只研究有控非滚转弹本身作为一个环节的稳定性。因此在建立扰动运动方程时, 对控制方程先不予考虑。

上述所得到的扰动运动方程组, 只有用电子计算机才能算出各偏差量的变化规律。为了便于解析分析, 一般需要对方程组进行简化。简化的基本方法是将扰动方程中的非线性函数, 以理想弹道参量为基准, 展开成线性函数。利用泰勒级数展开式, 仅取到其一阶导数项, 就可得到线性化方程。在进行线性化时, 只考虑具有双通道控制系统的轴对称弹。这类弹在俯仰和偏航运动方向上各有一个独立的控制通道, 其俯仰和偏航运动及其控制过程可以认为是相互独立的。与第七章的无控尾翼弹类似, 对有控弹可分解为铅直面内的运动和垂直于铅直面内的运动两部分。前者称为纵向运动, 运动参数为  $v$ 、 $\theta$ 、 $\alpha$ 、 $\vartheta$ 、 $\omega_x$ 、 $x$ 、 $y$ ; 后者称为侧向运动, 运动参数为  $\psi_a$ 、 $\psi_v$ 、 $\gamma$ 、 $\gamma_v$ 、 $\omega_x$ 、 $\omega_y$ 、 $\beta$ 、 $z$ 。一般侧向运动对纵向运动的影响可以忽略。在线性化过程中, 可将某些小量之积看成是二阶小量予以略去。同时只研究某些特性点附近一小段时间内的动态特性, 可不考虑弹体结构参量(如  $m$ 、 $J_x$ 、 $J_y$ 、 $\dots$ ) 和大气状态(如  $\rho$ 、 $\dots$ ) 的变化对未扰动运动的影响。下面以方程(14.46)①为例进行线性化。该方程为

$$m \frac{dv}{dt} = F_p \cos\alpha \cos\beta - R_x - mg \sin\theta = f(v, \alpha, \beta, \theta)$$

上式  $f$  中忽略了高度  $y$  对  $R_x$  和  $F_p$  的影响。以“ $\Delta$ ”表示函数的增量, 则

$$\Delta\left(m \frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_i \Delta v + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_i \Delta\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)_i \Delta\beta + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_i \Delta\theta \quad (15.2)$$

而

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(F_p \cos\alpha \cos\beta - R_x) \approx F_p^v - R_x^v \quad (15.3)$$

式中,  $F_p^v$ 、 $R_x^v$  的上角注  $v$ , 表示对  $v$  的偏导数, 以下符号类同。

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -F_p \sin\alpha \cos\beta - \frac{\partial R_x}{\partial \alpha} \approx -(F_p \alpha + R_x^\alpha) \quad (15.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = -F_p \cos\alpha \sin\beta - \frac{\partial R_x}{\partial \beta} \approx -(F_p \beta + R_x^\beta) \quad (15.5)$$



$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -mg \cos \theta \quad (15.6)$$

将式(15.3) ~ (15.6) 代入式(15.2), 并考虑到理想弹道侧向偏导数  $\partial f / \partial \beta$  很小, 可不考虑, 于是得

$$m \frac{d\Delta v}{dt} = (F_P^v - R_x^v) \Delta v - (F_P \alpha + R_x^a) \Delta \alpha - (mg \cos \theta) \Delta \theta$$

在这个方程中, 为了简化书写, 省略了诸偏差量前的系数下标“i”。

用类似方法, 将式(14.46) 其他方程亦可线性化, 每一个方程线性化的具体步骤在此不作赘述, 仅写出最后结果

$$\left\{ \begin{array}{ll} m \frac{d\Delta v}{dt} = (F_P^v - R_x^v) \Delta v - (F_P \alpha + R_x^a) \Delta \alpha - (mg \cos \theta) \Delta \theta & \text{①} \\ m v \frac{d\Delta \theta}{dt} = (F_P^v \alpha + R_y^v) \Delta v + (F_P + R_y^a) \Delta \alpha + (mg \sin \theta) \Delta \theta + R_y^\delta \Delta \delta_z & \text{②} \\ - m v \cos \theta \frac{d\Delta \phi_v}{dt} = (-F_P + R_z^\beta) \Delta \beta + (F_P \alpha + R_y) \Delta \gamma_v + R_z^\delta \Delta \delta_y & \text{③} \\ J_{x_1} \frac{d\Delta \omega_{x_1}}{dt} = M_{x_1}^\beta \Delta \beta + M_{x_1}^{\omega_{x_1}} \Delta \omega_{x_1} + M_{x_1}^{\omega_{y_1}} \Delta \omega_{y_1} + M_{x_1}^\delta \Delta \delta_x + M_{x_1}^{\delta_y} \Delta \delta_y & \text{④} \\ J_{y_1} \frac{d\Delta \omega_{y_1}}{dt} = M_{y_1}^\beta \Delta \beta + M_{y_1}^{\omega_{x_1}} \Delta \omega_{x_1} + M_{y_1}^{\omega_{y_1}} \Delta \omega_{y_1} + M_{y_1}^\beta \Delta \dot{\beta} + M_{y_1}^{\delta_y} \Delta \delta_y & \text{⑤} \\ J_{z_1} \frac{d\Delta \omega_{z_1}}{dt} = M_{z_1}^v \Delta v + M_{z_1}^a \Delta \alpha + M_{z_1}^{\omega_{z_1}} \Delta \omega_{z_1} + M_{z_1}^a \Delta \dot{\alpha} + M_{z_1}^\delta \Delta \delta_z & \text{⑥} \\ \frac{d\Delta \vartheta}{dt} = \Delta \omega_{z_1} & \text{⑦} \\ \frac{d\Delta \phi_a}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} \Delta \omega_{y_1} & \text{⑧} \\ \frac{d\Delta \gamma}{dt} = \Delta \omega_{x_1} - (\tan \vartheta) \Delta \omega_{y_1} & \text{⑨} \\ \Delta \theta = \Delta \vartheta - \Delta \alpha & \text{⑩} \\ \Delta \phi_v = \Delta \phi_a + \frac{\alpha}{\cos \theta} \Delta \gamma - \frac{1}{\cos \theta} \Delta \beta & \text{⑪} \\ \Delta \gamma_v = \Delta \gamma & \text{⑫} \end{array} \right. \quad (15.7)$$

因为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的偏差量不影响上列各方程, 故没有必要写出它们的偏差量方程。式(15.7) 是以理想弹道参数为系数的诸偏差量  $\Delta v$ 、 $\Delta \theta$ 、 $\Delta \alpha$ 、 $\dots$  的线性方程组。在稳定性研究中, 通常取弹道上不同部位进行分析, 在该部位一段弹道上, 当弹道参数的变化量在 5% 以内时, 则可取



弹道参数为常数,于是可在这一段弹道上,将式(15.7)作为常系数线性方程组求解。

仔细看一下方程组(15.7),发现方程组中的诸方程式,可以根据其联解性分成两部分。其中一部分是关于纵向运动的偏差量方程,另一部分是关于侧向运动的方程。纵向运动方程组为

$$\begin{cases} m \frac{d\Delta v}{dt} = (F_P^v - R_x^v)\Delta v - (F_P\alpha + R_x^a)\Delta\alpha - (mg\cos\theta)\Delta\theta \\ mv \frac{d\Delta\theta}{dt} = (F_P^v\alpha + R_y^v)\Delta v + (F_P + R_y^a)\Delta\alpha + (mg\sin\theta)\Delta\theta + R_y^\delta\Delta\delta_z \\ J_{z_1} \frac{d\Delta\omega_{z_1}}{dt} = M_{z_1}^v\Delta v + M_{z_1}^a\Delta\alpha + M_{z_1}^{\omega_{z_1}}\Delta\omega_{z_1} + M_{z_1}^{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + M_{z_1}^\delta\Delta\delta_z \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \Delta\omega_{z_1} \\ \Delta\theta = \Delta\vartheta - \Delta\alpha \end{cases} \quad (15.8)$$

侧向运动方程组为

$$\begin{cases} -mv\cos\theta \frac{d\Delta\phi_v}{dt} = (-F_P + R_z^\beta)\Delta\beta + (F_P\alpha + R_y)\Delta\gamma_v + R_z^\delta\Delta\delta_y \\ J_{x_1} \frac{d\Delta\omega_{x_1}}{dt} = M_{x_1}^\beta\Delta\beta + M_{x_1}^{\omega_{x_1}}\Delta\omega_{x_1} + M_{x_1}^{\omega_{y_1}}\Delta\omega_{y_1} + M_{x_1}^\delta\Delta\delta_x + M_{x_1}^{\delta_y}\Delta\delta_y \\ J_{y_1} \frac{d\Delta\omega_{y_1}}{dt} = M_{y_1}^\beta\Delta\beta + M_{y_1}^{\omega_{x_1}}\Delta\omega_{x_1} + M_{y_1}^{\omega_{y_1}}\Delta\omega_{y_1} + M_{y_1}^\beta\Delta\dot{\beta} + M_{y_1}^{\delta_y}\Delta\delta_y \\ \frac{d\Delta\phi_a}{dt} = \frac{1}{\cos\vartheta}\Delta\omega_{y_1} \\ \frac{d\Delta\gamma}{dt} = \Delta\omega_{x_1} - (\tan\vartheta)\Delta\omega_{y_1} \\ \Delta\phi_v = \Delta\phi_a + \frac{\alpha}{\cos\theta}\Delta\gamma - \frac{1}{\cos\theta}\Delta\beta \\ \Delta\gamma_v = \Delta\gamma \end{cases} \quad (15.9)$$

因此,对扰动运动,可将纵向扰动运动与侧向扰动运动分别进行研究。

### 15.3 纵向运动的动态稳定性

同第十三章研究无控火箭动态稳定性一样,首先研究有控弹自由运动的动态特性。为了书写方便,不妨将方程组(15.8)的诸偏差量系数以下列符号记之





$$\left\{ \begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{m}(-F_P^v + R_x^v) \\ l_2 &= g \cos \theta \\ l_3 &= \frac{1}{m}(F_P \alpha + R_x^a) = \frac{1}{m} \left( F_P \alpha + \frac{1}{2} \rho v^2 S C_x^a \right) \\ a_0 &= -\frac{M_{z_1}^v}{J_{z_1}} \\ a_1 &= -\frac{M_{z_1}^{\omega}}{J_{z_1}} \\ a'_1 &= -\frac{M_{z_1}^a}{J_{z_1}} \\ a_2 &= -\frac{M_{z_1}^a}{J_{z_1}} \\ a_3 &= -\frac{M_{z_1}^{\delta}}{J_{z_1}} \\ a_4 &= \frac{1}{mv}(F_P + R_y^a) = \frac{1}{mv} \left( F_P + \frac{1}{2} \rho v^2 S C_y^a \right) \\ a'_4 &= -\frac{1}{mv}(F_P^v \alpha + R_y^v) \\ a''_4 &= -\frac{g}{v} \sin \theta \\ a_5 &= \frac{R_y^{\delta}}{mv} \end{aligned} \right. \quad (15.10)$$

上述各系数叫动力系数,都由理想弹道参数决定。

将式(15.8)的第三个方程中的  $\Delta \omega_{z_1}$  用  $d\Delta \vartheta/dt$  代替(第四个方程),则得如下形式方程组

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Delta v}{dt} + l_1 \Delta v + l_2 \Delta \theta + l_3 \Delta \alpha &= 0 \\ \alpha_0 \Delta v + \frac{d^2 \Delta \vartheta}{dt^2} + a_1 \frac{d\Delta \vartheta}{dt} + a'_1 \frac{d\Delta \alpha}{dt} + a_2 \Delta \alpha + a_3 \Delta \delta_z &= 0 \\ \alpha'_4 \Delta v + \frac{d\Delta \theta}{dt} + a''_4 \Delta \theta - a_4 \Delta \alpha - a_5 \Delta \delta_z &= 0 \\ \Delta \vartheta - \Delta \theta - \Delta \alpha &= 0 \end{aligned} \right. \quad (15.11)$$

为求得该方程组之齐次方程的特征根,需要建立其特征多项式。由稳定理论知道,只要保证所有特征根具有负的实数部分,那么未扰动运动就是稳定的。对比较复杂的方程组,利用拉普拉斯(Laplace)交换,可比较方便地求出特征多项式。



回顾一下数学中关于拉普拉斯变换的定义。如果  $f(t)$  是一个时间变量  $t$  的函数, 它的定义域是  $t > 0$ , 那么  $f(t)$  的拉普拉斯变换  $F(p)$  定义为

$$F(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt \quad (15.12)$$

式中,  $p$  是一个具有正实数部分的复变数, 一般称  $F(p)$  是  $f(t)$  的象函数。

如果  $F(p)$  是已知的, 那么拉普拉斯变换  $F(p)$  的原函数(即原来的函数)  $f(t)$  可以由下面反转公式计算出来

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) F(p) dp \quad (15.13)$$

其中,  $c$  是比所有  $F(p)$  的奇点之实数部分都大的任意一个实数。 $f(t)$  称为  $F(p)$  的象原函数。同积分表一样, 对  $f(t)$  和  $F(p)$  也可编成表, 便于查用。兹引自高等数学用表中的部分拉普拉斯变换表如表 15.1。

表 15.1 拉普拉斯变换法则公式(节录)

$f(t)$	$F(p)$
$f(t)$	$\int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)]$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$
$\int_0^t \int_0^{\tau} f(\lambda) d\lambda d\tau$	$\frac{1}{p^2} F(p)$
$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = f_1^* f_2$	$F_1(p) F_2(p)$
$tf(t)$	$-F'(p)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
$\exp(at) f(t)$	$F(p-a)$
1	$\frac{1}{p}$
$\exp(at)$	$\frac{1}{p-a}$
$t^n (n=1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin kt$	$\frac{k}{p^2 + k^2}$
$\cos kt$	$\frac{p}{p^2 + k^2}$
$\text{sh } kt$	$\frac{k}{p^2 - k^2}$
$\text{ch } kt$	$\frac{p}{p^2 - k^2}$
$\exp(-at) \sin kt$	$\frac{k}{(p+a)^2 + k^2}$
$\exp(-at) \cos kt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + k^2}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p^3}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$



将  $\Delta v$ 、 $\Delta \vartheta$ 、 $\Delta \alpha$ 、 $\dots$  的拉普拉斯变换象函数以  $v(p)$ 、 $\vartheta(p)$ 、 $\alpha(p)$ 、 $\dots$  表示, 则式(15.11) 可变为下式

$$\begin{cases} (p + l_1)v(p) + l_2\theta(p) + l_3\alpha(p) = \Delta v(0) \\ a_0v(p) + p(p + a_1)\vartheta(p) + (a'_1p + a_2)\alpha(p) = \\ \quad - a_3\delta_z(p) + \Delta\dot{\vartheta}(0) + (p + a_1)\Delta\vartheta(0) + a'_1\Delta\alpha(0) \\ a'_4v(p) + (p + a''_4)\theta(p) - a_4\alpha(p) = a_5\delta_z(p) + \Delta\theta(0) \\ \vartheta(p) - \theta(p) - \alpha(p) = 0 \end{cases} \quad (15.14)$$

式中,  $\Delta\dot{\vartheta}(0)$ 、 $\Delta\vartheta(0)$ 、 $\Delta\alpha(0)$ 、 $\Delta\theta(0)$  是  $\Delta\dot{\vartheta}$ 、 $\Delta\vartheta$ 、 $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\theta$  的初始值。方程组(15.11) 是以  $t$  为自变量的微分方程组, 方程组(15.14) 则是以  $p$  为自变量的代数方程组。方程组的行列式为

$$M(p) = \begin{vmatrix} p + l_1 & 0 & l_2 & l_3 \\ a_0 & p(p + a_1) & 0 & a_2 + a'_1p \\ a'_4 & 0 & p + a''_4 & -a_4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad (15.15)$$

展开后, 得特征多项式

$$M(p) = -p^4 - P_3p^3 - P_2p^2 - P_1p - P_0 \quad (15.16)$$

式中

$$\begin{cases} P_3 = a_1 + a_4 + a'_1 + l_1 + a''_4 \\ P_2 = (l_1 + a_1)(a_4 + a''_4) + a_2 + a_1l_1 + a'_1(l_1 + a''_4) + a'_4(l_3 - l_2) \\ P_1 = a_1l_1(a_4 + a''_4) + a'_4[a_1(l_3 - l_2) - a'_4l_2] + a_2(l_1 + a''_4) + aa''_4l_1 - a_0l_3 \\ P_0 = a''_4(a_2l_1 - a_0l_3) - l_2(a_0a_4 + a_2a'_4) \end{cases} \quad (15.17)$$

令特征多项式为零, 则得特征方程式为

$$p^4 + P_3p^3 + P_2p^2 + P_1p + P_0 = 0 \quad (15.18)$$

根据古尔维茨判据, 为使上述四阶代数方程的根具有负实根的充要条件是

$$\begin{cases} P_0 > 0 \\ P_1 > 0 \\ P_2 > 0 \\ P_3 > 0 \\ \begin{vmatrix} P_1 & P_3 & 0 \\ P_0 & P_2 & 1 \\ 0 & P_1 & P_3 \end{vmatrix} > 0 \end{cases} \quad (15.19)$$

这就是判断弹体自由运动动态稳定性的必要而充分的条件。有时为了进一步考察自由运动的





具体过程,需要将方程(15.18)的特征根具体求出。当然,对此一般性的四阶代数方程进行精确求解是比较困难的。然而,针对型号的具体情况,各动力系数的大小差别很大, $P_0$ 、 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 之值的差别也很大,例如某飞行器在高空以250 m/s的速度水平飞行,动力系数为下列值(单位省略)。

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 & a_1 &= 0.49 & a_2 &= 2.98 & a_4 &= 0.577 \\ a'_1 &= 0.22 & a'_4 &= -0.0007 & a''_4 &= 0, & l_1 &= 0.0134 \\ l_2 &= 9.80 & l_3 &= 9.35 \end{aligned}$$

将这些值代入式(15.17)算得

$$P_3 = 1.300 \quad P_2 = 3.280 \quad P_1 = 0.0454 \quad P_0 = 0.0204$$

考虑到

$$\begin{aligned} & (p^2 + P_3p + P_2) \left[ p^2 + \left( \frac{P_1}{P_2} - \frac{P_0P_3}{P_2^2} \right) p + \frac{P_0}{P_2} \right] = \\ & p^4 + \left( \frac{P_1}{P_2} - \frac{P_0P_3}{P_2^2} + P_3 \right) p^3 + \left( \frac{P_0}{P_2} + \frac{P_1P_3}{P_2} - \frac{P_0P_3^2}{P_2^2} + P_2 \right) p^2 + P_1p + P_0 \end{aligned}$$

根据上面  $P_0$ 、 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  的典型值,  $(P_1/P_2 - P_0P_3/P_2^2)$  只是  $P_3$  的0.9%,  $(P_0/P_2 + P_1P_3/P_2 - P_0P_3^2/P_2^2)$  只是  $P_2$  的0.6%,故可略去,因此式(15.18)可用近似式

$$(p^2 + P_3p + P_2) \left[ p^2 + \left( \frac{P_1}{P_2} - \frac{P_0P_3}{P_2^2} \right) p + \frac{P_0}{P_2} \right] = 0$$

替代。于是将解四次方程问题,变成了下列两个二次方程求解的问题

$$p^2 + P_3p + P_2 = 0 \quad (15.20)$$

$$P_2p^2 + \left( P_1 - \frac{P_0P_3}{P_2} \right) p + P_0 = 0 \quad (15.21)$$

依据系数间的数量关系,对  $P_2$  和  $P_3$  可近似取为下式

$$\begin{cases} P_2 \approx a_2 + a_1 a_4 \\ P_3 \approx a_1 + a_4 + a'_1 \end{cases} \quad (15.22)$$

对上述典型数值而言,由方程式(15.20)

$$p^2 + 1.300p + 3.280 = 0$$

解得

$$p_{1,2} = -0.650 \pm 1.690i$$

由方程式(15.21)

$$3.280p^2 + 0.0373p + 0.0204 = 0$$

解得

$$p_{3,4} = -0.0057 \pm 0.0786i$$

特征根的虚部体现着周期解的角频率。角频率越大,则周期越短,反之亦然。可见,方程



(15.20) 的特征根对应着自由运动的短周期运动; 方程(15.21) 的特征根对应着自由运动的长周期运动。当扰动一旦作用于有控弹, 短周期运动将起主要作用。因此一般主要考虑短周期运动。将(15.22)、(15.20) 及(15.10) 诸式联系起来看, 便发现有控弹的自由运动与第七章的无控火箭摆动运动本质上一致。因此, 关于无控火箭动态稳定性的分析, 可以适用于有控弹自由运动。尤其对某类单通道有控弹, 其自转角速度是不低的, 务必考虑其陀螺效应和马格努斯力矩的影响, 对其自由运动动态稳定性的分析, 亦可采取第十三章 13.3、13.4 的方法。但目前飞行力学中对动稳定性的分析, 总以时间  $t$  为自变量建立扰动方程处理问题。这是因为有控弹自身的运动, 与控制系统的工作过程紧密地联系在一起; 而控制系统工作过程的数学描述, 都是以  $t$  为自变量, 它们需要一致起来。

在这里, 应该更进一步明确有控弹的自由运动, 是指有控弹体的自由运动, 没有顾及控制系统的作用。这样的自由运动, 与无控火箭的自由运动是一样的。

## 15.4 有控弹的操纵性

在 15.3 中已考察了方程组(15.11) 之通解的性质, 建立了保证动态稳定的条件(15.19)。下面将研究其受迫运动, 也就是方程组(15.11) 之特解的性质。可以仍然不考虑控制系统的工作过程, 仅考虑弹体本身特定的受迫运动。这个受迫运动具体体现为: 当舵面偏转一个角度  $\delta_z$  时, 有控弹各运动参数( $\alpha$ 、 $\vartheta$ 、 $\dots$ ) 将引起怎样的变化。舵面转动后, 弹体改变飞行状态的能力, 以及快慢速度, 就是通常所说的操纵性。

有控弹体的运动过程, 仅是把弹体(包括弹上控制系统部件) 作为一个总的自动控制系统中的一个环节。为了对总的复杂运动过程便于分析, 无论哪一个环节, 都采用传递函数这一数学工具。

传递函数是利用拉普拉斯变换求解常微分方程的主要手段之一。如果常系数线性微分方程

$$a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_n x^{(n)}(t) + b_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + b_0 x(t) \quad (15.23)$$

描述某一运动过程, 这一运动机构被称为一个系统; 函数  $x(t)$  称为输入变量, 函数  $y(t)$  称为输出变量。为了得到输出与输入之间的关系, 需要在零初始条件下, 对方程(15.23) 进行拉普拉斯变换, 得

$$M(p)Y(p) = N(p)X(p) \quad (15.24)$$

式中

$$\begin{cases} M(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0 \\ N(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0 \end{cases} \quad (15.25)$$

且  $n \leq m$ 。

于是





$$Y(p) = \frac{N(p)}{M(p)} X(p) \quad (15.26)$$

定义

$$W(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \quad (15.27)$$

$W(p)$  叫做系统的传递函数。那么

$$Y(p) = W(p) X(p) \quad (15.28)$$

可以把这个方程看作是一个算子方程： $X(p)$  受到运算符  $W(p)$  的作用之后，就变成了  $Y(p)$ ；就是说， $W(p)$  把  $X(p)$  变成了  $Y(p)$ 。 $W(p)$  体现了一种转换关系。 $x(t)$  及其拉普拉斯变换  $X(p)$  都称为系统的输入； $y(t)$  及其拉普拉斯变换  $Y(p)$  都称为系统的输出。此处的输出是指零初始条件下的输出。在工程中，经常将这种输入与输出的关系用一方块图表示，如图 15.1。

当系统在常数输入情况下，输出的稳态值与输入的比值，称为系统的放大系数或增益。放大系数  $K$  为

$$K = W(0) \quad (15.29)$$

当给予输入以周期函数时，例如

$$x(t) = A_f \cos \omega t$$

则输出变量是具有同样的角频率  $\omega$  的周期函数，但位相超前  $\varphi(\omega)$ ，幅值是  $A_f$  的  $A(\omega)$  倍。 $A(\omega)$  和  $\varphi(\omega)$  满足下式

$$W(i\omega) = A(\omega) \exp[i\varphi(\omega)] \quad (15.30)$$

式中， $W(i\omega)$  为  $p = i\omega$  时的传递函数，称为系统的频率特性。称  $A(\omega)$  为幅频特性， $\varphi(\omega)$  为相频特性。频率特性也是传递函数  $W(p)$  的一种表示方法。下面利用以上的数学工具研究导弹的强迫运动。

现在，建立短周期运动的传递函数。此间，近似取  $\Delta v = 0$ ，因而式(15.14)的第一个方程可去掉，其余方程中的  $v(p)$  项也去掉；另外将影响很小的系数  $a_1'$  和  $a_4'$  所在的项略去，仅考虑零初始条件，于是方程组(15.14)变为下型

$$\begin{cases} p(p + a_1)\vartheta(p) + a_2\alpha(p) = -a_3\delta_z(p) \\ p\theta(p) - a_4\alpha(p) = a_5\delta_z(p) \\ \vartheta(p) - \theta(p) - \alpha(p) = 0 \end{cases} \quad (15.31)$$

对此代数方程组，可利用克莱姆定理求解

$$\begin{cases} \vartheta(p) = \frac{\Delta_\vartheta}{\Delta} \\ \theta(p) = \frac{\Delta_\theta}{\Delta} \\ \alpha(p) = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} \end{cases} \quad (15.32)$$

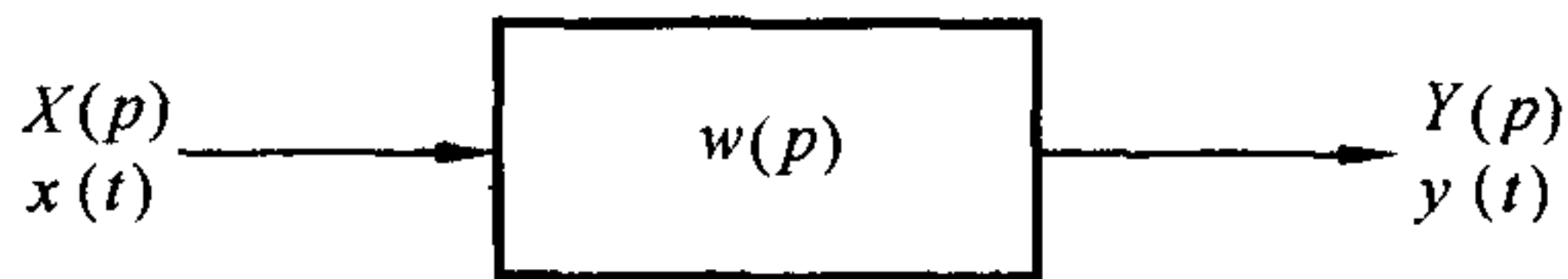


图 15.1 传递函数方块图





式中,  $\Delta$  为主行列式,  $\Delta_\vartheta$ 、 $\Delta_\theta$ 、 $\Delta_\alpha$  为子行列式, 各表示为

$$\Delta = \begin{vmatrix} p(p+a_1) & 0 & a_2 \\ 0 & p & -a_4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -p[p^2 + (a_1 + a_4)p + (a_2 + a_1a_4)] \quad (15.33)$$

$$\Delta_\vartheta = \begin{vmatrix} -a_3\delta_z(p) & 0 & a_2 \\ a_5\delta_z(p) & p & -a_4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = [a_3p + (a_3a_4 - a_2a_5)]\delta_z(p) \quad (15.34)$$

$$\Delta_\theta = \begin{vmatrix} p(p+a_1) & -a_3\delta_z(p) & a_2 \\ 0 & a_5\delta_z(p) & -a_4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -[a_5p^2 + a_1a_5p + (a_2a_5 - a_3a_4)]\delta_z(p) \quad (15.35)$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} p(p+a_1) & 0 & -a_3\delta_z(p) \\ 0 & p & a_5\delta_z(p) \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = p[a_5p + (a_3 + a_1a_5)]\delta_z(p) \quad (15.36)$$

于是便得各传递函数为

$$W_{\delta_z}^\vartheta = \frac{\vartheta(p)}{\delta_z(p)} = \frac{-a_3p + (a_2a_5 - a_3a_4)}{p[p^2 + (a_1 + a_4)p + (a_2 + a_1a_4)]} \quad (15.37)$$

$$W_{\delta_z}^\theta = \frac{\theta(p)}{\delta_z(p)} = \frac{a_5p^2 + a_1a_5p + (a_2a_5 - a_3a_4)}{p[p^2 + (a_1 + a_4)p + (a_2 + a_1a_4)]} \quad (15.38)$$

$$W_{\delta_z}^\alpha = \frac{\alpha(p)}{\delta_z(p)} = \frac{-a_5p - (a_3 + a_1a_5)}{p^2 + (a_1 + a_4)p + (a_2 + a_1a_4)} \quad (15.39)$$

从以上传递函数的表达式来看, 它们都有相应于振荡环节传递函数的因子, 即

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + (a_1 + a_4)p + (a_2 + a_1a_4)} = \frac{T_c^2}{T_c^2p^2 + 2T_c\xi p + 1} \quad (15.40)$$

$$\begin{cases} T_c = (a_2 + a_1a_4)^{-1/2} \\ \xi = \frac{1}{2}(a_1 + a_4)T_c \end{cases} \quad (15.41)$$

式中

$T_c$  是时间常数,  $\xi$  是弹体的相对阻尼系数。

由式(15.40)的频率特性

$$W(i\omega) = \frac{T_c^2}{1 - T_c^2\omega^2 + i2T_c\xi\omega}$$

知其幅频特性为

$$A(\omega) = \frac{T_c^2}{\sqrt{(1 - T_c^2\omega^2)^2 + (2T_c\xi\omega)^2}} \quad (15.42)$$



将上式与式(13.48)对比便知,对有控弹而言,同样存在共振效应。若令

$$\omega_a = \frac{1}{T_c} \quad (15.43)$$

$\omega_a$  是导弹的固有频率,则当

$$\frac{\omega}{\omega_a} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (15.44)$$

时,将发生共振现象。特别是阻尼系数很小的有控弹,当外界干扰或舵面偏转频率  $\omega$  接近固有频率时,共振将表现得非常强烈。

为了描述强迫运动的性质,如同对其他任何自动调整系统一样,通常给予系统以单位阶跃函数

$$\begin{cases} f(t) = 0, & t < 0 \\ f(t) = 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

作为输入,其输出被称为过渡函数,以此过渡函数的性质作为系统的品质指标。将此过渡函数一般用  $h(t)$  表示。

因单位阶跃函数的拉普拉斯变换为  $1/p$ ,则过渡函数的拉普拉斯变换为  $(1/p)W(p)$ ,经拉普拉斯反变换,便可得到  $h(t)$ 。一般用频率特性来表示  $h(t)$ ,其表达式为

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (15.45)$$

式中,  $P(\omega)$  是频率特性  $W(i\omega)$  的实部。该式的推导过程,可在某些有关自动调整原理的书中找到。根据式(15.45)具体求出  $h(t)$ ,往往计算比较麻烦。对有控弹过渡函数往往不用式(15.45),而直接求解微分方程的特解,现简介如下。以求  $\Delta\alpha(t)$  为例,由式(15.39)近似取  $a_5 \approx 0$  的情形,则

$$[p^2 + (a_1 + a_4)p + (a_2 + a_1 a_4)]\alpha(p) = -a_3 \delta_z(p)$$

利用式(15.41)的符号,并将上式逆变换得(取  $\delta_z = 1$ )

$$T_c^2 \frac{d^2 \Delta\alpha(t)}{dt^2} + 2T_c \xi \frac{d\Delta\alpha(t)}{dt} + \Delta\alpha(t) = -a_3 T_c^2 \quad (15.46)$$

在零初始条件下,对此方程易于求解,具体过程这里不作书写,仅写出最后结果。

当  $\xi < 1$  时

$$\Delta\alpha(t) = h(t) = -a_3 T_c^2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \exp\left(-\frac{\xi}{T_c} t\right) \sin\left(\frac{1}{T_c} \sqrt{1 - \xi^2} t + \epsilon_1\right) \right] \quad (15.47)$$

式中,

$$\epsilon_1 = \arcsin \sqrt{1 - \xi^2}$$

当  $\xi \geq 1$  时

$$h(t) = -a_3 T_c^2 \left\{ 1 - \left[ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{t}{T_c}\right) + \operatorname{ch}\left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{t}{T_c}\right) \right] \exp\left(-\frac{\xi}{T_c} t\right) \right\} \quad (15.48)$$



图 15.2 中给出了  $-h(t)/(a_3 T_c^2) - t/T_c$  曲线。

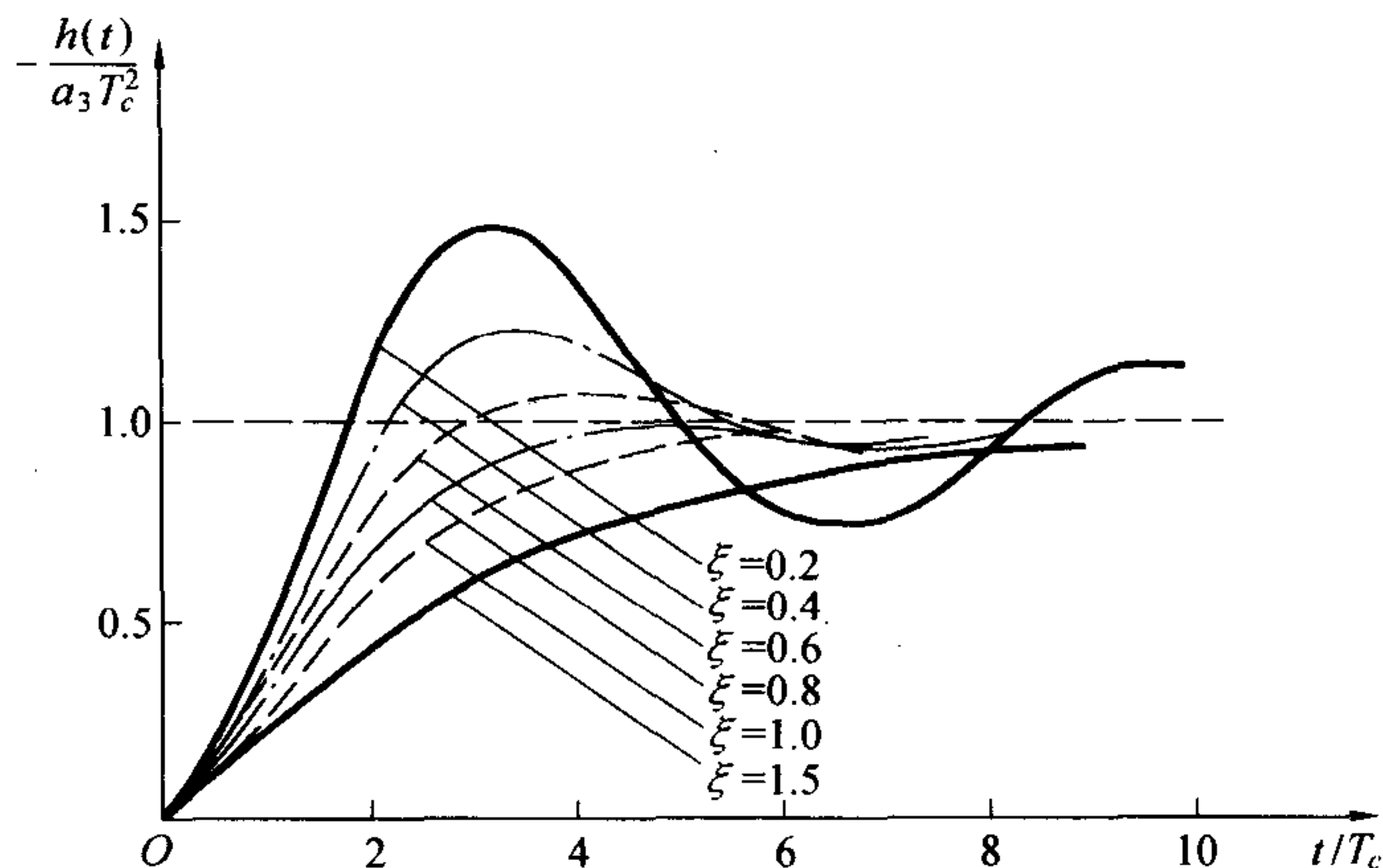


图 15.2  $-h(t)/(a_3 T_c^2) - t/T_c$  曲线

从图中可见,过渡过程随相对阻尼系数  $\xi$  不同而异。当  $\xi \geq 1$  时,过渡过程呈非振荡形式;当  $\xi < 1$  时,则呈振荡形式。对多数战术导弹而言,一般其  $\xi$  都比 1 小得多,故过渡过程是振荡形式的。常以某些品质指标作为对过渡过程的评价:

$h(\infty)$ —— $h(t)$  的稳态值,即当  $t/T_c \rightarrow \infty$  时的  $h(t)$  值;

$t_p$ ——调整时间(过渡过程时间),为输出变量与其稳态值之差不超过某一约定的小量(一般为稳态值的 5%) 所经过的时间;

$\Delta h_{\max}$ ——过渡过程中  $h(t)$  偏离稳态值的最大偏差,叫最大偏离;

$\sigma$ ——超调度,为  $[\Delta h_{\max}/h(\infty)] \times 100\%$ 。

还有其他一些指标,依具体需要而定。

考察式(15.47)可以知道,当  $\xi \approx 0.7$  时,过渡过程时间最短。而且超调度  $\sigma$  也不大( $\approx 4\%$ ),在过渡过程时间内的振荡次数也很少。但一般导弹的  $\xi$  只有 0.1 的量级,且随飞行高度的增加而减小。为了加大  $\xi$  值,以改善过渡过程品质,多数导弹借助自动驾驶仪的作用来弥补弹体阻尼的不足。

以上是关于有控弹在铅直面内的动态特性的简单介绍。对侧向运动的动态特性的分析方法是类似的,这里不再介绍了。

## 15.5 有控滚转火箭的飞行稳定性

无论有控滚转火箭或是滚转导弹一般为轴对称体,研究其飞行稳定性亦需建立角运动方程;考虑到其纵向与侧向运动的对称性,采用第八章的坐标系所得出的方程式形式比较简洁,下面按无控轴对称火箭处理问题的方法对滚转有控弹的稳定性做分析论述。实际上,目前远程





无控火箭大多数都采用了部分弹道段的制导措施,有控与无控在弹道性能研究工作中,寻求统一的方法不仅是必要的,而且是可能的。

### 15.5.1 运动方程

为了对包括控制系统在内的有控弹全系统的动态性能进行分析,需建立弹体及控制系统的传递函数。由于后者一般以时间  $t$  为自变量建立动态模型,因而对弹体亦采用  $t$  为自变量的运动方程。为使质心动力学方程由攻角加以描述,对质心运动方程在弹轴系内建立。而且还因为根据经验,在弹轴系内建立弹箭角运动方程是比较方便的,所得到的方程形式简洁,便于计算分析有关的弹道性能。弹轴系的转动角速度  $\omega_a$  列阵  $[\omega_a]$  由式(8.43)表示,由该式看出,当近似略去较小的滚转分量时,则弹轴系可视为非滚转坐标系,且

$$[\omega_a] = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_a \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (15.49)$$

弹箭质心的动力学方程为

$$m \left( \frac{d_r v}{dt} + \omega_a \times v \right) = F$$

或写成标量形式

$$\begin{cases} \frac{dv_\xi}{dt} + \omega_\eta v_\zeta - \omega_\zeta v_\eta = \frac{F_\xi}{m} \\ \frac{dv_\eta}{dt} + \omega_\zeta v_\xi = \frac{F_\eta}{m} \\ \frac{dv_\zeta}{dt} - \omega_\eta v_\xi = \frac{F_\zeta}{m} \end{cases} \quad (15.50)$$

围绕质心的转动方程由式(8.57)可得

$$\begin{cases} \frac{d\omega_\xi}{dt} = \frac{M_\xi}{C} \\ \frac{d\omega_\eta}{dt} + \frac{C}{A} \omega_\xi \omega_\zeta = \frac{M_\eta}{A} + \left(1 - \frac{C}{A}\right) \frac{d}{dt} (\beta_{D\eta} \omega_\xi) \\ \frac{d\omega_\zeta}{dt} - \frac{C}{A} \omega_\xi \omega_\eta = \frac{M_\zeta}{A} + \left(1 - \frac{C}{A}\right) \frac{d}{dt} (\beta_{D\zeta} \omega_\xi) \end{cases} \quad (15.51)$$

研究扰动运动,特别是弹箭飞行稳定性问题,最关心的是攻角变化规律。图 15.3 描述了攻角的几何关系。速度矢量在弹轴系中的三分量与攻角二分量有关,即

$$\begin{cases} v_\xi = v \cos \delta_1 \cos \delta_2 \\ v_\eta = -v \sin \delta_1 \\ v_\zeta = -v \cos \delta_1 \sin \delta_2 \end{cases} \quad (15.52)$$



定义复数

$$\Theta = \left( -\frac{v_\eta}{v} \right) + i \left( -\frac{v_\xi}{v} \right) = \sin\delta_1 + i\cos\delta_1\sin\delta_2 \quad (15.53)$$

称  $\Theta$  为广义复攻角。当  $\delta_1$  和  $\delta_2$  较小时, 则

$$\Theta \approx \delta_1 + i\delta_2 = \Delta$$

可见复攻角是  $\Theta$  的特殊情况。由图 15.3 知,  $|\Theta| = \sin\delta$ ,  $\delta$  是总攻角。

若从图 15.3 的速度矢量  $\mathbf{v}$  上取距原点  $O$  为单位长度上的一点  $T$ , 过  $T$  作平行于  $o\eta$  轴的直线为实轴, 其正向与  $o\eta$  一致; 再作平行于  $o\xi$  轴的直线为虚轴, 其正向与  $o\xi$  一致, 则构成一平面。弹轴与该平面的交点为  $B$ , 矢量  $\vec{TB}$  的大小和方向, 即是  $\Theta$  的大小和方向。于是由式(15.50) 二、三两式及式(15.53) 可得导弹质心横向运动复数式

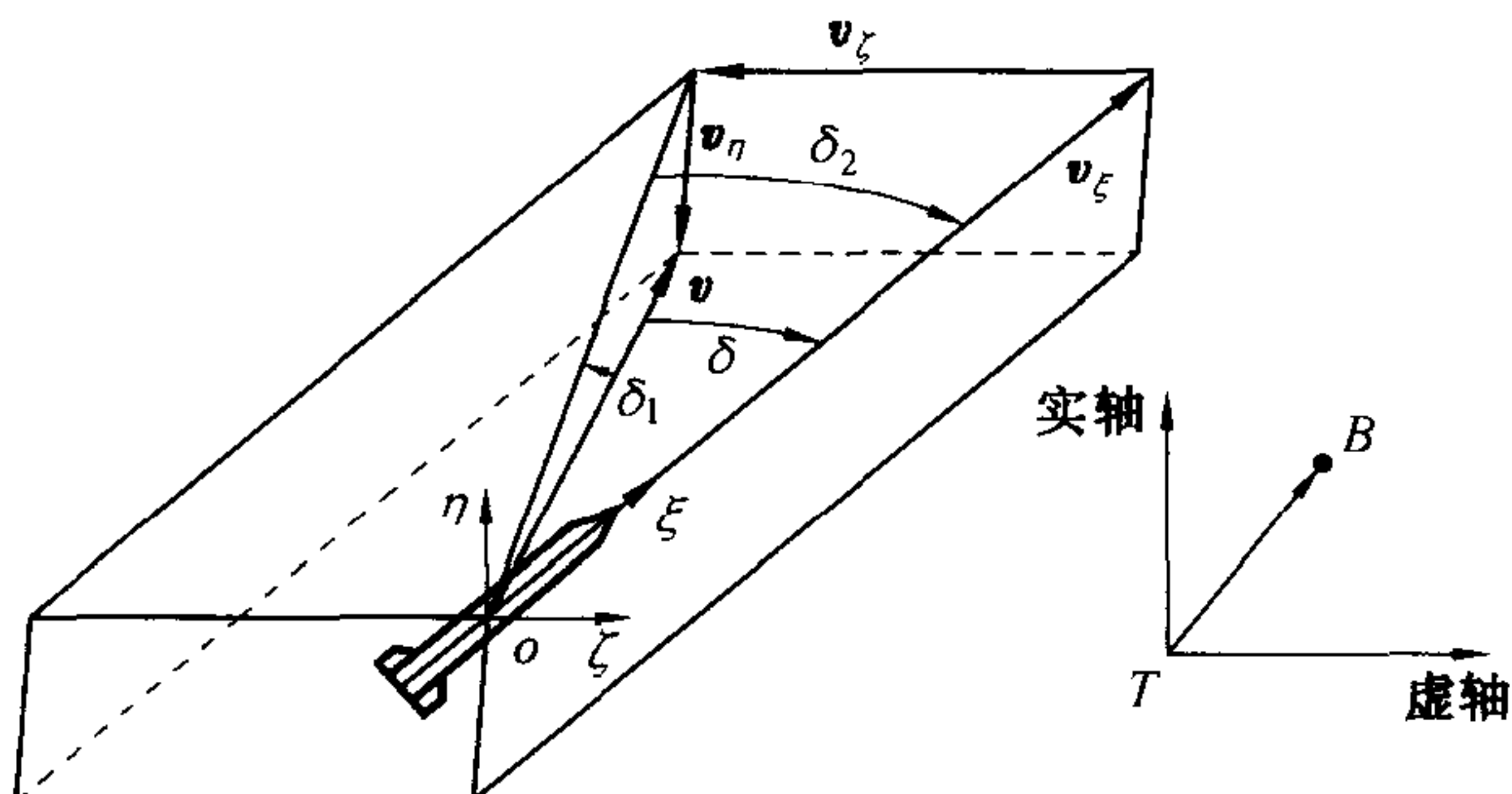


图 15.3 攻角的几何描述

$$\dot{\Theta} + \frac{\dot{v}}{v}\Theta + i\eta\omega_a = -\frac{F_\perp + F_{ca}}{mv} \quad (15.54)$$

式中  $F_{ca}$ ——法向控制力, 若它在弹体系内的复数式为  $F_{cb}$ , 则  $F_{ca} = F_{cb}\exp(i\gamma)$ ;

$F_\perp$ ——其他外力的法向分量(复数式)。

同样由式(15.51) 二、三两式得

$$\dot{\omega}_a - i\frac{\omega_\xi}{n}\omega_a = \frac{M + M_D + M_{ca}}{A} \quad (15.55)$$

式中  $\omega_a$ ——弹轴复摆动角速度,  $\omega_a = \omega_\eta + i\omega_\xi$ ;

$M_{ca}$ ——控制力矩(复数式),  $M_{ca} = il_C F_{ca}$ ,  $l_C$  是控制力作用点(在质心前为正, 之后为负)至质心距离;

$M_D$ ——动不平衡引起的复力矩,  $M_D = (A - C) \left[ \frac{d}{dt}(\beta_{D\eta}\omega_\xi) + i\frac{d}{dt}(\beta_{D\xi}\omega_\eta) \right]$ ;

$M$ ——其他外力矩(复数式)。

### 15.5.2 气动力的复数表达式

在弹轴系内气动力复数式, 可由第八章的气动力矢量式的二、三分量构成复数, 并以  $\Theta$  和  $\omega_a$  表示, 可得(详细推导可见文献[5] 第四章附录)

$$R_{y\perp} = mb_y v^2 \Theta \cos\delta, \quad b_y = \frac{\rho S}{2m} C'_{y\delta} \delta / \sin\delta \quad (15.56)$$

$$M_{zm} = -mb_{zm} v \omega_\xi (i\Theta), \quad b_{zm} = \frac{\rho S d}{2m} C'_{zm\delta} \delta / \sin\delta \quad (15.57)$$



静力矩

$$M_z = Ak_z v^2 (i\Theta), \quad k_z = \frac{\rho S l}{2A} m'_{zd} / \sin \delta \quad (15.58)$$

赤道阻尼力矩

$$M_{zd} = -Ak_{zd} v \omega_a, \quad k_{zd} = \frac{\rho S l^2}{2A} m'_{zd} \quad (15.59)$$

马格努斯力矩

$$M_y = Ak_y v^2 \Theta, \quad k_y = \frac{\rho S l d \Gamma}{2A} m''_y \delta / \sin \delta, \quad \Gamma = \frac{\omega_\xi}{v} \quad (15.60)$$

有些文献还计及非定常阻尼力矩,本书拟隐含其作用于赤道阻尼力矩之中。此外,垂直于弹轴的法向力还需计及空气阻力的法向分量,易知法向力为

$$R_N = R_{y\perp} + R_x \Theta$$

则

$$R_N = mb_N v^2 \Theta, \quad b_N = \eta b_y + b_x \quad (15.61)$$

$$b_x = \frac{\rho S}{2m} C_x, \quad \eta = \cos \delta \quad (15.62)$$

### 15.5.3 弹体传递函数

将诸力及力矩式(15.56) ~ (15.62) 代入式(15.54)、(15.55), 则得

$$\ddot{\Theta} + (b_N v + \frac{\dot{v}}{v} - i b_{zm} \omega_\xi) \dot{\Theta} + i \eta \omega_a = -\frac{F_{ca}}{mv} - \frac{g_\perp}{v} \quad (15.63)$$

$$\dot{\omega}_a + \left( b_{zd} v - i \frac{\omega_\xi}{n} \right) \omega_a - (k_y + i k_z) v^2 \Theta = \frac{M_{ca} + M_D}{A} \quad (15.64)$$

式(15.63)、(15.64) 是变系数常微分方程, 求其瞬态传递函数时, 只好利用系数冻结法进行拉普拉斯变换, 以求出控制力  $F_{ca}$  (输入) 对广义复攻角  $\Theta$  与弹轴摆动角速度  $\omega_a$  的传递函数。经运算整理得

$$W_{F_c}^\Theta = \frac{-\frac{p}{mv} + \eta \frac{l_C}{A} - \frac{k_{zd}}{m} + i \frac{\Gamma}{nm}}{p^2 + (H_t - i P_t) p - (M_t + i P_t T_t)} \quad (15.65)$$

式中

$$H_t = \left( b_N + k_{zd} + \frac{\dot{v}}{v^2} \right) v \quad (15.66)$$

$$P_t = \left( \frac{1}{n} + b_{zm} \right) \omega_\xi \quad (15.67)$$

$$M_t = \left[ k_z - \left( b_N + \frac{\dot{v}}{v^2} \right) k_{zd} + \frac{\Gamma^2}{n} b_{zm} \right] v^2 \quad (15.68)$$

$$T_t = \left( -\frac{nk_y}{\Gamma} + b_N + \frac{\dot{v}}{v^2} + nb_{zm} k_{zd} \right) v \quad (15.69)$$

$$W_{F_c}^{\omega_a} = i \frac{\frac{l_C}{A} p + \left[ -\frac{k_z}{m} + \frac{l_C}{A} \left( b_N + \frac{\dot{v}}{v^2} \right) + i \left( \frac{k_y}{m} - \frac{l_C}{A} b_{zm} \Gamma \right) \right] v}{p^2 + (H_t - i P_t) p - (M_t + i P_t T_t)} \quad (15.70)$$





又因为弹轴对理想弹道的摆动角速度  $\dot{\Phi}$  与  $\omega_a$  存在下列关系:

$$\omega_a = i(\dot{\varphi}_a + i\dot{\varphi}_2) = i(\dot{\Phi} + \dot{\theta}_i) \quad (15.71)$$

故而得到传递函数关系

$$W_{F_c}^{\Phi} = -iW_{F_c}^{\omega_a} \quad (15.72)$$

从而知  $F_{ca}$  对摆动角  $\Phi$  的传递函数为

$$W_{F_c}^{\Phi} = \frac{1}{p} W_{F_c}^{\omega_a} = \frac{\frac{l_c}{A}p + \left[ -\frac{k_z}{m} + \frac{l_c}{A} \left( b_N + \frac{\dot{v}}{v^2} \right) + i \left( \frac{k_y}{m} - \frac{l_c}{A} b_{zm} \Gamma \right) \right] v}{p[p^2 + (H_t - iP_t)p - (M_t + iP_t T_t)]} \quad (15.73)$$

在小攻角飞行条件下,控制力  $F_{ca}$  对复偏角  $\Psi$  的传递函数为

$$W_{F_c}^{\Psi} = W_{F_c}^{\Phi} - W_{F_c}^{\Delta} \quad (15.74)$$

式中

$$W_{F_c}^{\Delta} = W_{F_c}^{\Theta}$$

应该指出,弹体运动的传递函数还不仅以上几种,比如自动导引或遥控飞行的运动学亦可建立传递函数。其方法仍是根据运动学方程,对运动学参数偏量建立扰动运动方程,从而由拉普拉斯变换求得。

## 15.6 有控弹道系统稳定性分析

### 15.6.1 弹体飞行动稳定条件

由上述传递函数的分母便知自由扰动运动的特征方程为

$$r^2 + (H_t - iP_t)r - (M_t + iP_t T_t) = 0 \quad (15.75)$$

这与规范化的扰动方程式(13.8)的特征方程形式是一样的,只是系数的具体表达式有所不同;不同的原因是扰动方程自变量有别。由式(15.75)仍可近似地导出形式上如式(13.31)的动稳定条件,但其动稳定因子的具体表达式将与式(13.36)稍有差别。这是由于式(15.75)系数的时变性,采用系数冻结法求解方程的根必然带来一定的误差。

### 15.6.2 全系统稳定性分析

全系统包括控制系统和作为受控对象的弹体。在有控飞行中,可以区分为两种飞行状态,即稳定系统作用下的自动稳定飞行和制导系统作用下的导引飞行。稳定系统典型的简略方块图如图 15.4 所示。图中  $W_M$  是弹体传递函数,  $W_c$  是控制系统传递函数。而制导系统则由导引装置和姿态稳定系统组成,前者又有主动式和被动式等多种形式,它同时接收运动目标和弹体自身的运动参数信息。

图 15.4 所示系统的开路传递函数为



$$W(p) = W_c(p) \cdot W_M(p) \quad (15.76)$$

而闭路传递函数为

$$W_s(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \quad (15.77)$$

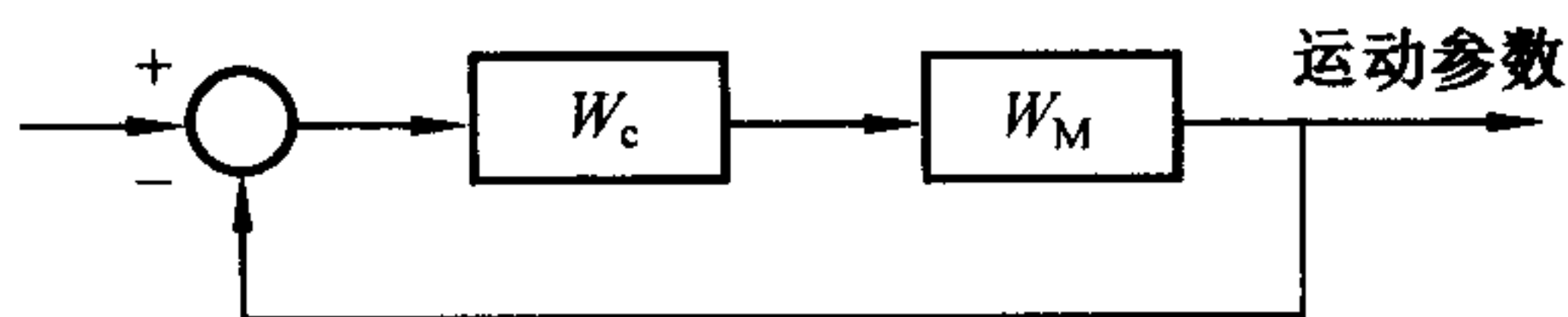


图 15.4 全弹稳定系统

一般传递函数为  $p$  的多项式分式, 判断系统

稳定性就是判定分母多项式的零点是否均位于实部为负的半个复平面内, 即在本书采用的复平面的下半部。这个问题已由路斯 - 胡尔维茨 (Routh-Hurwitz) 解决, 但对高阶系统, 此法应用起来不够方便。下面介绍两种稳定性准则。

### 1. 米哈依诺夫准则

若

$$W(p) = \frac{M(p)}{D(p)} \quad (15.78)$$

置  $p = i\omega$ ,  $\omega$  是频率, 且

$$D(i\omega) = D_R(\omega) + iD_I(\omega) \quad (15.79)$$

当  $D_R(\omega)$  为偶函数,  $D_I(\omega)$  为奇函数时, 曲线  $D(i\omega)$  对称实轴。米哈依诺夫稳定性准则表述如下: 一个控制系统稳定的充要条件, 是其特性曲线  $D(i\omega)$  当  $\omega$  由零变化到  $+\infty$  时, 它从正实轴上一点开始, 连续绕过  $n$  个象限 (不管曲线形状和位置如何), 此  $n$  为多项式  $D(p)$  的最高阶次。

### 2. 乃奎斯特 (Nyquist) 准则

乃氏准则是借助开路系统的频率特性来判断闭路系统稳定性的方法。鉴于开路系统频率特性较易于由实验得到, 因此该法实用意义甚大。

设式 (15.77) 分子分母为多项式, 且

$$W_s(p) = \frac{M(p)}{D_s(p)} = \frac{M(p)}{D(p) + M(p)} \quad (15.80)$$

于是有

$$1 + W(i\omega) = \frac{D_s(i\omega)}{D(i\omega)} \quad (15.81)$$

该式等号右边  $D_s(i\omega)/D(i\omega)$  之幅角为  $D_s(i\omega)$  与  $D(i\omega)$  幅角的差值, 当  $M(p)$  的阶次不大于  $D(p)$  阶次时, 若开路及闭路系统均稳定, 那么当  $\omega$  由零增加到  $+\infty$  时, 曲线  $[1 + W(i\omega)]$  之幅角便由零增加到一定值而又再回到零。或者说, 一个开路系统稳定的控制系统, 本身稳定的充要条件是开路系统的频率特性曲线  $W(i\omega)$  不把点  $(-1, i0)$  包含在内, 如图 15.5 所示。  $(-1, i0)$  被称为临界点。

当开路系统含有不稳定环节时, 比如  $D(i\omega)$  中含有  $m$  个特征根处于复平面上半平面内 (注意本书复平面的实轴与虚轴的方向), 且

$$D(i\omega) = d^m(i\omega) \cdot d^{n-m}(i\omega)$$



若系统稳定,  $D_s(i\omega)$  当  $\omega$  由  $0 \rightarrow +\infty$  时, 幅角由  $0 \rightarrow \frac{n\pi}{2}$ 。而  $D(i\omega)$  特征根位于下半平面的  $d^{n-m}(i\omega)$  的幅角由  $0 \rightarrow (n-m)\pi/2$ ,  $d^m(i\omega)$  幅角由  $0 \rightarrow -m\pi/2$ , 于是  $[1 + W(i\omega)]$  幅角当  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  时, 其值由 0 变为  $n\pi/2 - [-m\pi/2 + (n-m)\pi/2] = m\pi$ 。由此可见, 具有  $m$  个正实根的不稳定开路系统, 若在闭路状态下稳定, 其充要条件是开路频率特性曲线  $W(i\omega)$  沿幅角增加的方向绕点  $(-1, i0)$  转动  $m\pi$ 。例如图 15.6 所示的  $W(i\omega)$  曲线, 当  $m = 2$  时, 闭路系统是稳定的。

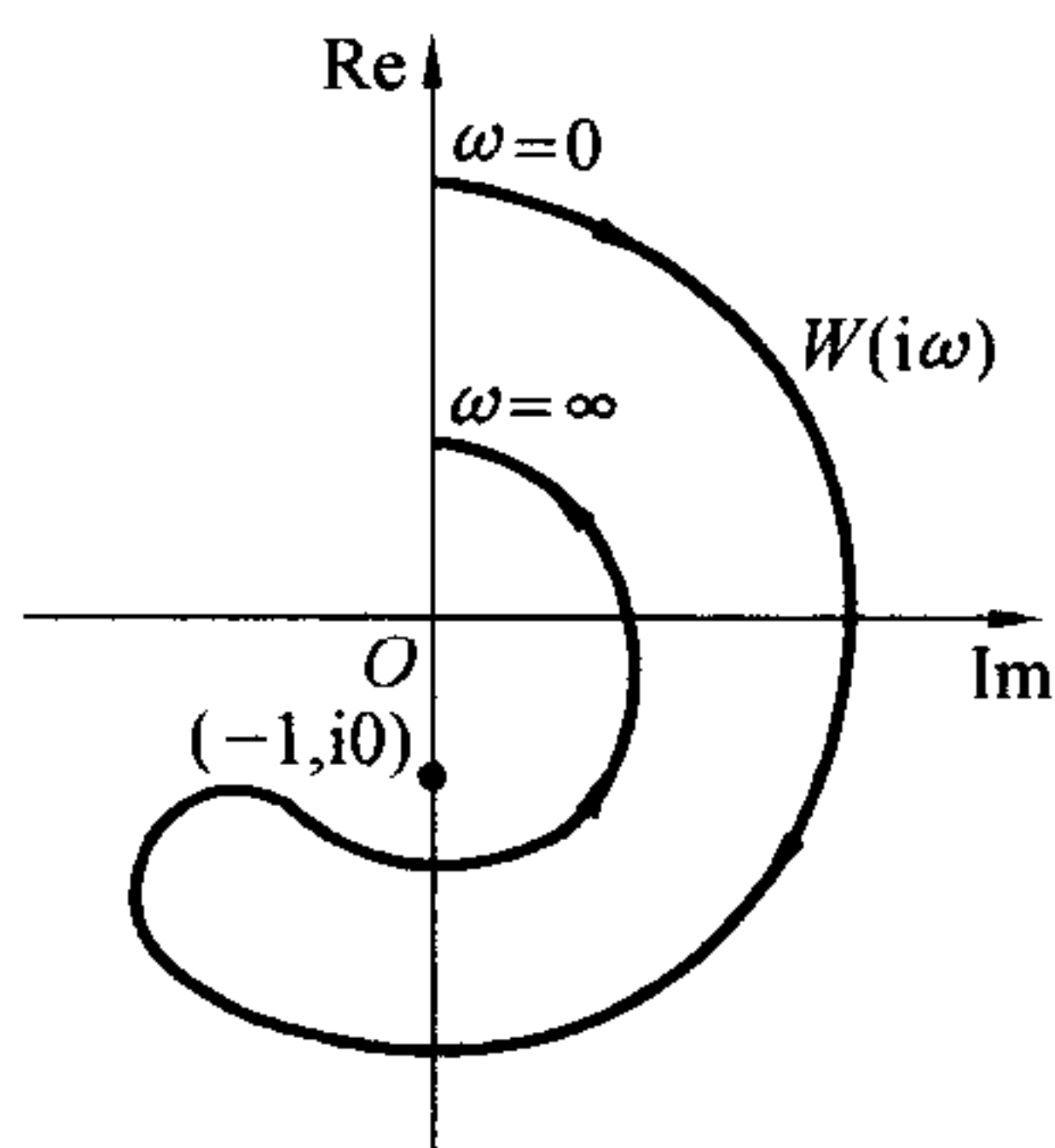


图 15.5 乃氏曲线示意图

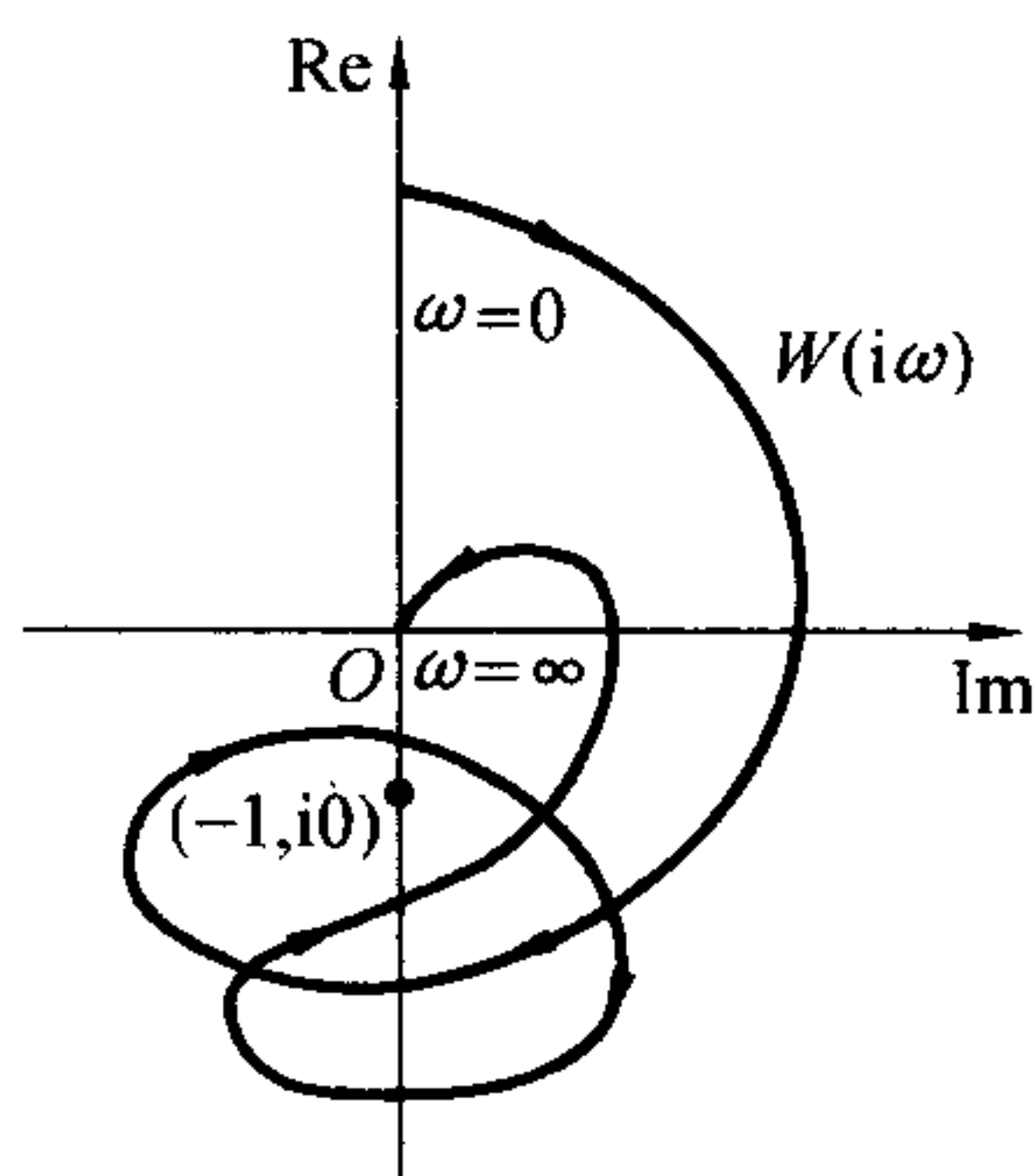


图 15.6 开路系统含有不稳定环节的乃氏曲线示意图

以上结论是对式(15.79)的实部为偶函数、虚部为奇函数的条件下得出的, 就一般情况而言, 需要令  $\omega$  从  $\omega = -\infty$  开始, 经过  $\omega = 0$  而终止于  $\omega = +\infty$ , 这样在判别稳定性时, 则以  $W(i\omega)$  曲线沿幅角增加的方向对点  $(-1, i0)$  包围的次数为据。归结起来, 应用乃氏稳定性判据检查线性控制系统稳定性时, 可能发生三种情况:

(1) 不包围点  $(-1, i0)$ 。若  $W(p)$  在上半复平面上没有极点, 则说明系统是稳定的, 否则是不稳定的。

(2) 按幅角增加方向(本书为顺时针)包围点  $(-1, i0)$ 。包围次数等于  $W(p)$  在上半复平面上的极点数, 则系统是稳定的, 否则是不稳定的。

(3) 反时针包围点  $(-1, i0)$ , 系统是不稳定的。



## 第十六章 外弹道优化理论

### 16.1 概 述

寻求最有利的运动条件,是外弹道学最重要的任务之一。在研究火箭质心运动的几章里,已经讲过当椭圆弹道起点速度  $v_A$  给定时,只要按式(4.25)确定射角,射程就可达到极大值。就火箭被动段而言,被动段水平距离由  $c_K$ 、 $v_K$ 、 $\theta_K$ 、 $y_K$  决定。而影响  $c_K$  的有弹形、弹径及与弹径有关的弹重;影响  $v_K$  的因素主要是火箭装药量的相对值  $\mu_K$  及比冲量  $I_1$  等。因而存在一个问题,即在给定最大射程条件下,如何确定一组最有利的参数值,也就是寻求最优的弹道设计。在导弹运动学分析中,拿比例导引来说,比例系数如何选取,也是最优化问题。研究火箭和导弹的扰动运动,寻求飞行稳定的条件,尤其对无控火箭弹的散布问题进行分析,寻求满足散布最小的有关参量,也是最优化问题。

在火箭设计中,为了满足战术技术指标的要求,常给予各有关参数以一定的范围,然后综合确定较合理的设计方案。为了得到某一指标(如射程、密集度等)的极大值或极小值,可以借助高效率的数字计算机,采用数学中的最优化方法(如数学规划)求出最优解。

在飞行力学中,随着快速电子计算机的发展,最优过程理论目前也已被广泛应用,诸如最优弹道设计、最优轨道转换、更优拦截方案、最优控制系统设计等各个方面。最优过程理论为求解非常广泛的一类最优设计和控制问题,提供了一种统一的方法。这些方法主要有变分法、庞特里亚金(Понтрягин Л. С.)的最小值原理(或称最小原则)和贝尔曼(Bellman R.)的动态规划。变分法是微积分学的分支之一,它所研究的对象,远比初等的极值问题广泛得多;它所研究的未知数不是一些间断的点,而是无穷点集的序列或集合,根据问题的不同性质,它们将是曲线、曲面或超越曲面。

利用最小值原理对柯西型的外弹道学方程组求解极值函数比较方便,尤其对含有不等式约束的问题是一种极好的方法。

动态规划是解多级决策问题的一般方法,若某一控制仅完全由所研究瞬时系统的状态确定,而与该瞬时之前的运动状态无关,采用动态规划方法是比较适合的。

本章将以变分法和最小值原理为基础,举例说明它们在外弹道学中的应用。

### 16.2 变分法简介

变分计算就是求某种特殊形式的定积分极值(最大值和最小值)的问题,它推广了微分计



算中求极值的方法。先考虑一个简单情况,如有积分

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x, \dot{x}) dt \quad (16.1)$$

其中,被积函数含有自变量  $t$ 、函数  $x$  及其导数  $\dot{x}$ 。若  $x = x(t)$  的函数关系事先并未确定,显然,若给予不同的函数  $x(t)$  代入积分,则得到的  $J$  值是不同的。每一新的函数  $x = x(t)$ ,都对应着  $J$  一个确定值。可以说,  $J$  是函数的函数,称  $J$  为泛函。

如果在通过两点  $(t_0, x_0)$  和  $(t_f, x_f)$  的所有  $x = x(t)$  曲线中,能找到一条曲线,其方程为  $\bar{x} = \bar{x}(t)$ ,将它代入到式(16.1)中得到  $J$  的极值,则该曲线被称为极值曲线。为了求得极值曲线,可以做如下考虑,取一条与  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  充分接近的曲线

$$x(t, a) = \bar{x} + a\delta x \quad (16.2)$$

式中,  $\delta x = x(t) - \bar{x}(t)$ ,当  $t = t_0$  及  $t = t_f$  时,  $\delta x = 0$ ;  $a$  是与  $t$  无关的参数。

因此,这一函数式仅取决于  $a$ ,那么积分  $J$  的值也由  $a$  决定。就是说,泛函  $J$  变成了  $a$  的函数。那么借助微分求极值的办法,可以写出  $x = \bar{x}(t)$  的极值条件,即积分  $J$  的极值条件为

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{a=0} = 0 \quad (16.3)$$

与普通微分相对应,特将  $x(t)$  的增量  $\delta x = x(t) - \bar{x}(t)$ ,叫做  $x(t)$  的变分,由  $\delta x$  引起的泛函  $J$  的改变量叫做泛函的变分,以  $\delta J$  记之。显然,式(16.3)等价于如下定理:如果具有变分的泛函  $J[x(t)]$  在曲线  $x = \bar{x}(t)$  上达到极值,则在  $x = \bar{x}(t)$  上有

$$\delta J = 0$$

将式(16.2)代入式(16.1),得

$$J(a) = \int_{t_0}^{t_f} f[t, x(t, a), \dot{x}(t, a)] dt$$

于是

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} \right) dt$$

而

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} [\bar{x}(t) + a\delta x] = \delta x \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} [\dot{\bar{x}}(t) + a\delta \dot{x}] = \delta \dot{x} \end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt$$

分部积分得

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt$$

等式右边第一部分为零;为使  $\partial J / \partial a = 0$ ,则必须



$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (16.4)$$

这就是极值函数的欧拉 - 拉格郎日 (Euler-Lagrange) 方程。其积分中的两个待定常数由边界条件确定, 即

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$$

如果仅给出  $t_0$  时的边界条件  $x(t_0) = x_0$ , 对  $t_f$  时边界条件未给定, 也就是说, 点  $(t_f, x_f)$  是可动点, 那么可经变分运算, 得极值函数满足的条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 & \text{①} \\ \text{当 } t = t_f \text{ 时,} & \\ \left( f - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \delta t + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x = 0 & \text{②} \\ x(t_0) = x_0 & \text{③} \end{cases} \quad (16.5)$$

如果边界点  $(t_f, x_f)$  可以沿着某一曲线  $x_f = \varphi(t_f)$  移动, 则  $\delta x_f = \dot{\varphi}_f \delta t_f$ , 于是式 (16.5) 的第二个条件为

$$\left[ f + (\dot{\varphi} - \dot{x}) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{t=t_f} = 0 \quad (16.6)$$

它建立了边界点处  $\dot{\varphi}$  和  $\dot{x}$  二斜率之间的依从关系, 把这个关系叫做贯截条件。显然, 若  $(t_0, x_0)$  是动点, 亦有类似式 (16.6) 的贯截条件。

如果极值函数曲线是有转折点的 (图 16.1 中的  $C_1$  点), 则该转折点称为角点。根据变分运算, 在角点处应满足下列条件

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1-0} = \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_1+0} \\ \left[ f - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{t=t_1-0} = \left[ f - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{t=t_1+0} \end{cases} \quad (16.7)$$

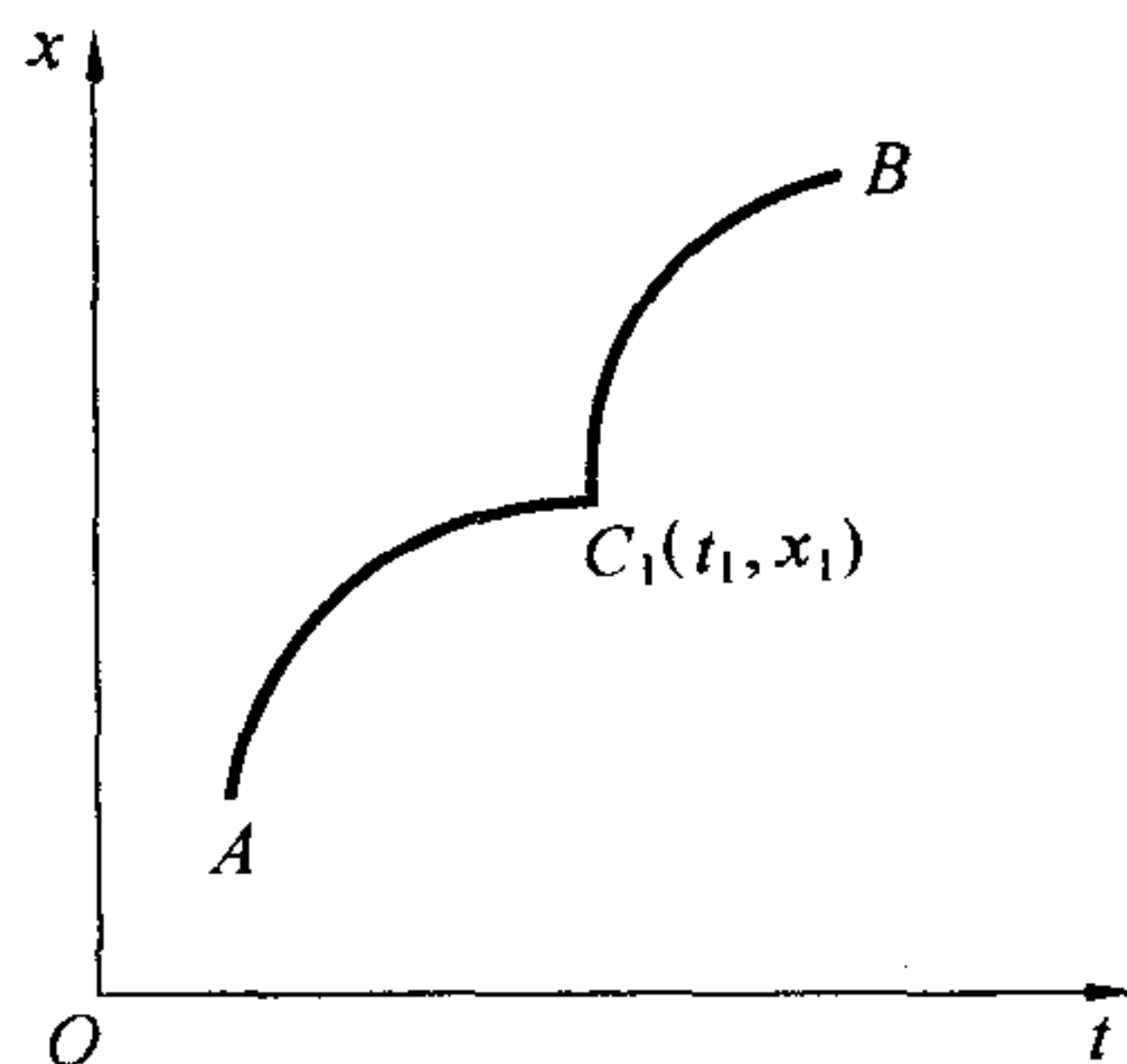


图 16.1 角点

现在将上面的简单情况推广到具有一般性的问题。考虑一类函数

$$x_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

写成状态变量形式, 即为

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in X^n \quad (16.8)$$

$\mathbf{x}$  被称为  $n$  度空间  $X^n$  的状态变量, 它满足如下运动方程 (约束方程)

$$F_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m < n) \quad (16.9)$$

式中,  $\dot{\mathbf{x}}$  是  $\mathbf{x}$  对自变量  $t$  的导数, 即





$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \cdots \quad \dot{x}_n]^T \quad (16.10)$$

假定函数  $\mathbf{x}$  满足边界条件

$$\omega_r(t_0, \mathbf{x}(t_0), t_f, \mathbf{x}(t_f)) = 0 \quad (r = 1, 2, \cdots, \rho) \quad (16.11)$$

寻求使泛函

$$J = G(t_0, \mathbf{x}_0, t_f, \mathbf{x}_f) + \int_{t_0}^{t_f} f(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt \quad (16.12)$$

取极小值的极值函数。

引入拉格朗日乘子  $\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m]^T$ , 且构成所谓“增广函数”如下式

$$F = f + \sum_{j=1}^m \lambda_j F_j \quad (16.13)$$

则极值函数不仅必须满足方程组(16.9), 而且必须满足欧拉 - 拉格朗日方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \quad (16.14)$$

方程组(16.9) 和方程组(16.14) 合起来共有  $(n + m)$  个方程和未知函数, 其解将同时给出  $x_1, x_2, \cdots, x_n$ , 及  $m$  个拉格朗日乘子。一般说来, 只有在特殊情况下才可能得到解析解, 多数问题须用近似积分法求解, 或用电子计算机计算。

对欧拉 - 拉格朗日方程可写成

$$\frac{d}{dt} \left( -F + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

对于不显含自变量  $t$  的增广函数而言, 可得到初积分

$$-F + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k = C \quad (16.15)$$

式中,  $C$  是积分常数。

对边界条件, 除了方程(16.11) 的  $\rho$  个条件外, 其余则由“贯截条件”给出。贯截条件将是式(16.5)② 的推广, 即

$$\left[ dG + \left( F - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \right) dt + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} dx_k \right]_0^f = 0 \quad (16.16)$$

当增广函数不显含自变量  $t$  时, 将式(16.15) 代入, 得

$$\left[ dG - C dt + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} dx_k \right]_0^f = 0 \quad (16.17)$$

有许多变分问题将出现不连续解, 即有一个或更多个导数  $\dot{x}_k$  在有限个点上出现跳跃, 这些点被叫做角点。变分问题的全部解称为极值弧, 每一分段称为子弧。角点的数学判据为式(16.7) 之推广, 即



$$\begin{cases} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right)_- = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right)_+ & (k = 1, 2, \dots, n) \\ \left( F - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \right)_- = \left( F - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \dot{x}_k \right)_+ \end{cases} \quad (16.18)$$

式中, 正负号表示紧邻角点前、后的条件。对增广函数不显含自变量  $t$  的特殊情况, 由式 (16.15) 代入式 (16.18) 之第二式, 有

$$(C)_- = (C)_+ \quad (16.19)$$

此式表明, 对构成极值弧的所有子弧而言, 积分常数具有相同的数值。

还存在一个问题, 就是当确定了极值弧以后, 到底  $J$  是极大值还是极小值? 解决这个问题是复杂的。在多数情况下, 可借助勒让德 - 克莱布奇 (Legendre-Clebsch) 条件作为判据, 即当

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_k \delta \dot{x}_j \geq 0 \quad (16.20)$$

时, 对所研究的问题得出相对极小值。而且对不含导数的任何变分问题, 可用函数本身的变分代替导数的变分。

### 16.3 变分法的应用举例

弹道中的最优化问题是各种各样的, 而且对每一具体问题都将涉及到较复杂的运算过程。这里不能详细地论及各个问题的细节, 而是通过例子引导读者如何在外弹道领域中应用变分理论。

首先考察一个简单的情况, 假定火箭垂直向上飞行, 而且不计空气阻力。试求使飞行高度达极大值的最优推力程序<sup>①</sup> (即发动机的推力的变化规律)。运动方程 (16.9) 将具有下列形式

$$\begin{cases} F_1 = \dot{y} - v = 0 \\ F_2 = \dot{v} + g - u_{\text{eff}} \frac{q}{m} = 0 \\ F_3 = \dot{m} + q = 0 \end{cases} \quad (16.21)$$

假定有效排气速度  $u_{\text{eff}}$  及重力加速度  $g$  是常量, 质量流量  $q$  满足下面不等式约束

$$0 \leq q \leq q_{\max} \quad (16.22)$$

此式等价于下式

$$F_4 = q(q_{\max} - q) - a^2 = 0 \quad (16.23)$$

式中  $a$  为实变数。此式把双边不等式约束化为等式约束, 以适用于变分运算所需要的方程形

<sup>①</sup> 参见 Miele A. 的著作《飞行力学中的变分法》。载于《飞行力学论文集》, 中国科学技术情报研究所重庆分所, 1964



式。所要求的函数有五个： $y$ 、 $v$ 、 $m$ 、 $q$ 、 $a$ ，方程只有四个，因而具有一个自由度，所以可以引进推力程序  $q(t)$  的某一最优要求。其边界条件是

$$\begin{cases} t = t_0 = 0 \text{ 时, } y = y_0, v = v_0, m = m_0 \\ t = t_f \text{ 时, } v = v_f, m = m_f \end{cases} \quad (16.24)$$

问题是在满足方程(16.21)、(16.23)及边界条件(16.24)的条件下，寻求一组函数  $y(t)$ 、 $v(t)$ 、 $m(t)$ 、 $q(t)$ 、 $a(t)$ ，使差值  $\Delta G = G_f - G_0$  (此处  $G = -y$ ) 取极小值。

依式(16.13)作增广函数

$$F = \lambda_1(\dot{y} - v) + \lambda_2\left(\dot{v} + g - u_{\text{eff}} \frac{q}{m}\right) + \lambda_3(\dot{m} + q) + \lambda_4[q(q_{\text{max}} - q) - a^2] \quad (16.25)$$

代入欧拉 - 拉格朗日方程组(16.14) 得

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 & \text{①} \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 & \text{②} \\ \dot{\lambda}_3 = \lambda_2 u_{\text{eff}} \frac{q}{m^2} & \text{③} \\ K = \lambda_4(q_{\text{max}} - 2q) & \text{④} \\ \dot{\lambda}_4 a = 0 & \text{⑤} \end{cases} \quad (16.26)$$

式中定义

$$K = \lambda_2 \frac{u_{\text{eff}}}{m} - \lambda_3 \quad (16.27)$$

可见  $\lambda_1$  是常数。由于增广函数不显含时间  $t$ ，故可由式(16.15)得初积分

$$\lambda_1 v - \lambda_2 g + Kq = C \quad (16.28)$$

式中， $C$  为常数。

再由式(16.17)写出贯截条件

$$\left[ -Cdt + (\lambda_1 - 1)dy + \lambda_2 dv + \lambda_3 dm \right] \Big|_0^f = 0 \quad (16.29)$$

由于在  $f$  处  $dt$  和  $dy$  的任意性，便知

$$C = 0 \quad \text{及} \quad \lambda_1 = 1 \quad (16.30)$$

有了以上一些方程，再加之角点条件，完全可以把极值函数求出来。

对式(16.27)求导，得

$$\dot{K} = \dot{\lambda}_2 \frac{u_{\text{eff}}}{m} + \frac{\lambda_2 u_{\text{eff}} q}{m^2} - \dot{\lambda}_3$$

将式(16.26)中的  $\dot{\lambda}_2$  和  $\dot{\lambda}_3$  代入，再将式(16.30)代入，得





$$\dot{K} = -\frac{u_{\text{eff}}}{m} \quad (16.31)$$

此关系式沿极值弧处处成立。

另由式(16.26)之⑤式知

$$a = 0 \quad \text{或} \quad \lambda_4 = 0 \quad (16.32)$$

$$(1) a = 0$$

根据式(16.23),此必使质量流量取常数

$$q = 0 \quad \text{或} \quad q = q_{\text{max}} \quad (16.33)$$

$$(2) \lambda_4 = 0$$

由式(16.26)的④式知,必有

$$K = 0 \text{ 及 } \dot{K} = 0 \quad (16.34)$$

因为此结果是与式(16.31)相矛盾的,故不存在  $\lambda_4 = 0$  的子弧,即没有以变推力飞行的子弧。于是,全部极值弧中仅含有两类子弧:以惯性飞行的子弧和以发动机最大输出功率飞行的子弧。因此,子弧之间的点即角点处的质量流量是不连续的。而据式(16.19)这个角点条件来看,各子弧的积分常数具有同一数值  $C$ ,那么在角点处乘子  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  均是连续的。从式(16.28)看出,  $q$  之不连续点只有产生在  $(K)_- = (K)_+ = 0$  处。

那么子弧的顺序是怎样的?即惯性飞行子弧和以最大推力飞行子弧的前后次序如何确定?此问题可由勒让德-克莱布奇条件解决,当取极小值时

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} (\delta x_k)^2 \geq 0$$

由式(16.25)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = -2\lambda_4 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = -2\lambda_4$$

则

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} (\delta x_k)^2 = -2\lambda_4 [(\delta a)^2 + (\delta q)^2]$$

将式(16.26)④代入,得

$$\frac{2K}{2q - q_{\text{max}}} [(\delta a)^2 + (\delta q)^2] \geq 0 \quad (16.35)$$

故

$$\begin{cases} K \geq 0 \text{ 时} & q = q_{\text{max}} \\ K \leq 0 \text{ 时} & q = 0 \end{cases} \quad (16.36)$$

因此,  $K$  相当于一个开关,它被称为转换函数(switching function)。积分式(16.31),可得  $K$  函数,积分的边界条件为  $(K)_- = (K)_+ = 0$ 。



(1) 当  $q = q_{\max}$  时

$$q_{\max} = - \frac{d m}{d t}$$

则由式(16.31)

$$d K = - \frac{u_{\text{eff}}}{m} d t = \frac{u_{\text{eff}}}{q_{\max}} \frac{d m}{m}$$

积分得

$$K = \frac{u_{\text{eff}}}{q_{\max}} \ln \frac{m}{m_{c_1}} \quad (16.37)$$

式中,  $m_{c_1}$  是角点处的火箭质量。

(2) 当  $q = 0$  时

$$\dot{K} = - \frac{u_{\text{eff}}}{m_{c_1}}$$

$$K = \frac{u_{\text{eff}}}{m_{c_1}} (t_{c_1} - t) \quad (16.38)$$

显然, 当  $m \geq m_{c_1}$  时,  $K \geq 0$ , 故  $q_{\max}$  相应的子弧位于角点之前; 而式(16.38) 中的时间  $t \geq t_{c_1}$  (角点相应的时间) 时,  $K \leq 0$ , 即  $q = 0$  相应的子弧位于角点之后。总之, 与最大上升高度相应的极值弧包括两段子弧, 它们的顺序(图 16.2) 为

$$q = q_{\max} \rightarrow q = 0 \quad (16.39)$$

将式(16.36) 代入式(16.21) 积分可得

$$\begin{cases} m \exp\left(\frac{v}{u_{\text{eff}}} - \frac{mg}{u_{\text{eff}} q_{\max}}\right) = \text{const} & (\text{当 } q = q_{\max} \text{ 时}) \\ m = \text{const} & (\text{当 } q = 0 \text{ 时}) \end{cases} \quad (16.40)$$

这样, 可在  $v$  和  $m$  构成的直角坐标系内, 确定从一定起点出发的极值弧族(图 16.3) 和到达一定终点的极值弧族(图 16.4)。

至于火箭在空气中飞行的一般情况, 将比上述要复杂, 但所用的数学工具及分析方法是类似的; 当考虑到推力方向与速度方向之间有夹角时, 则不仅有一个最优推力程序(还将出现变推力子弧), 而且还有一个最优推力方向程序。这在导弹设计中, 将是一个很实际的问题。

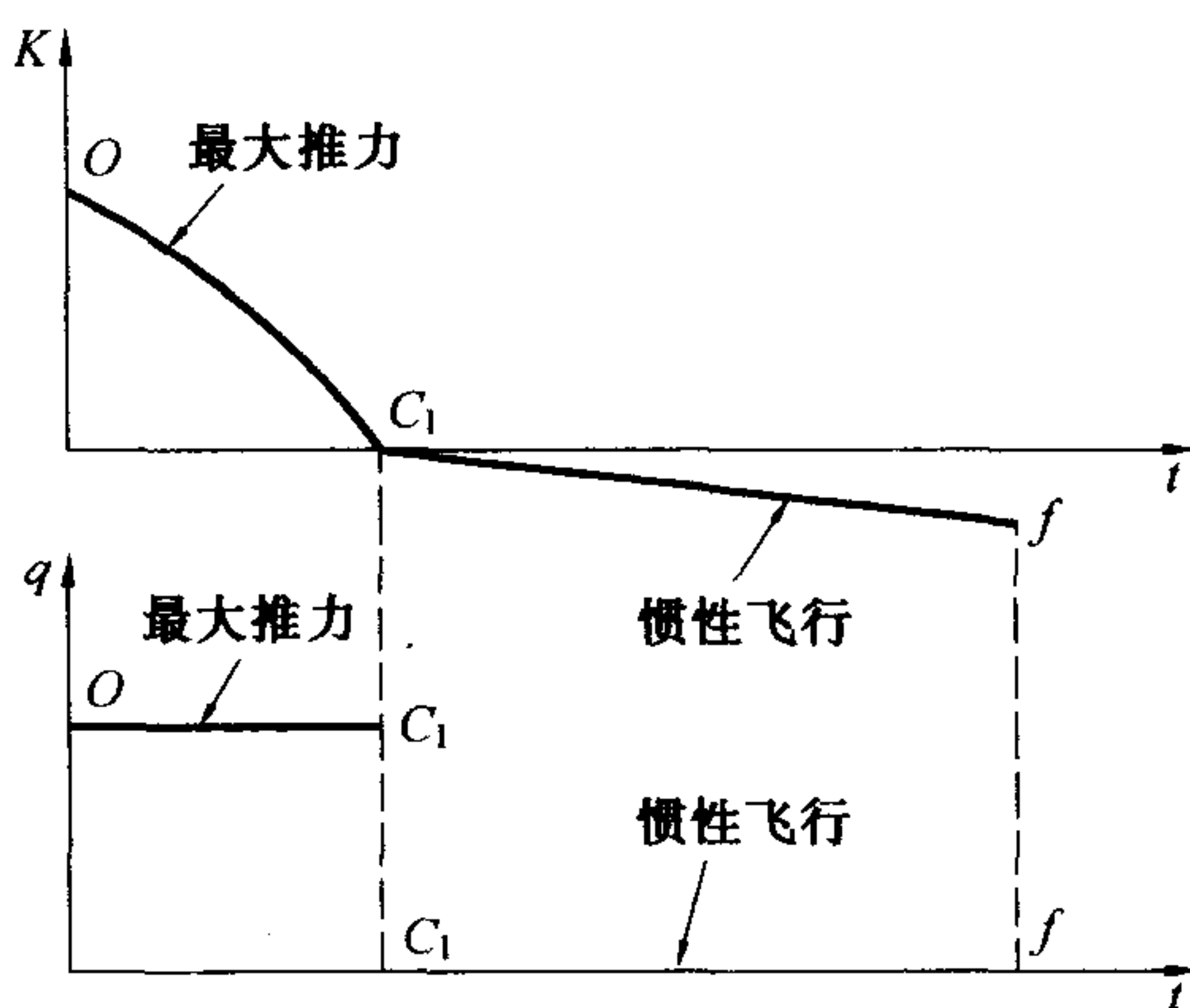
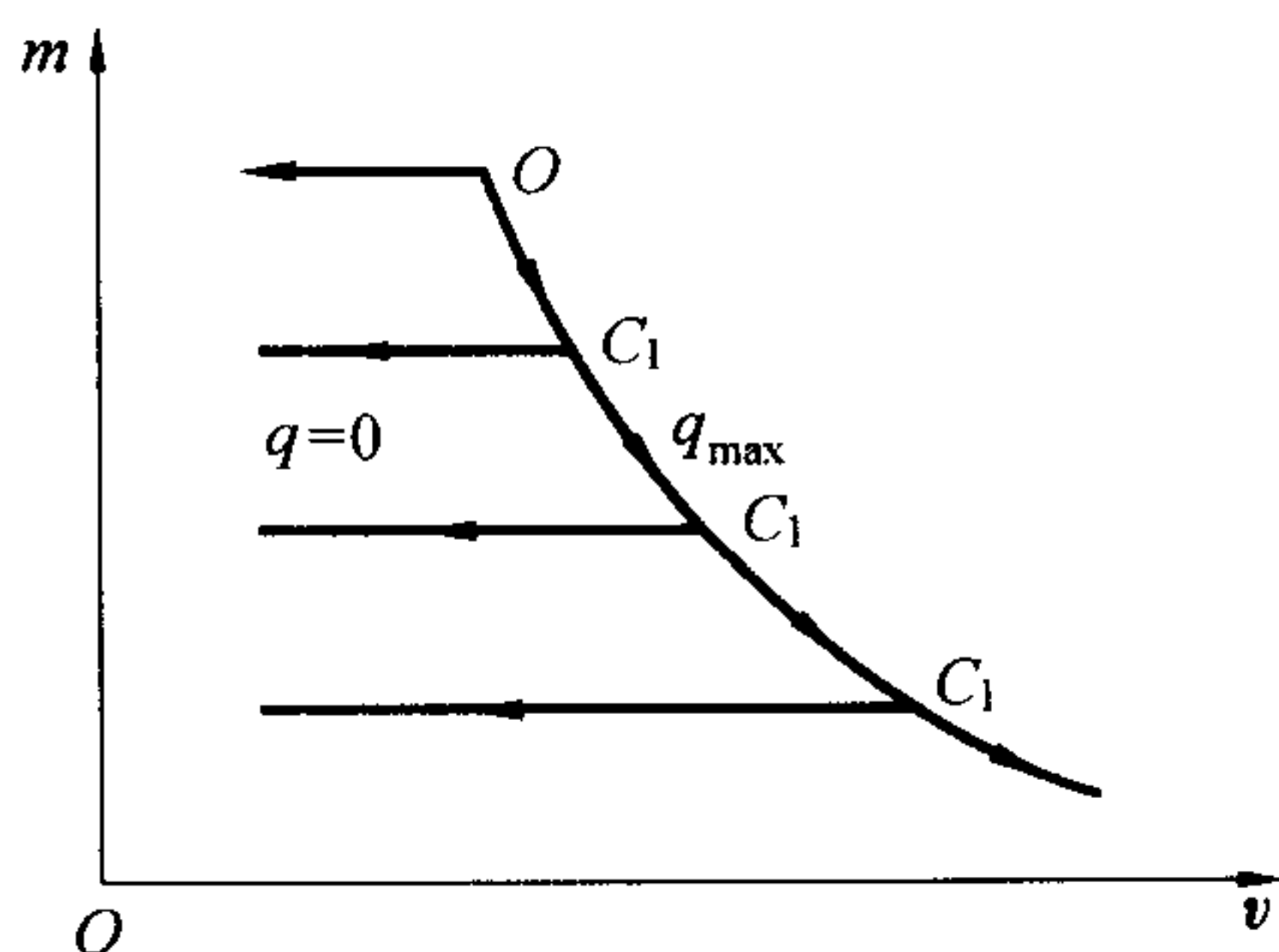
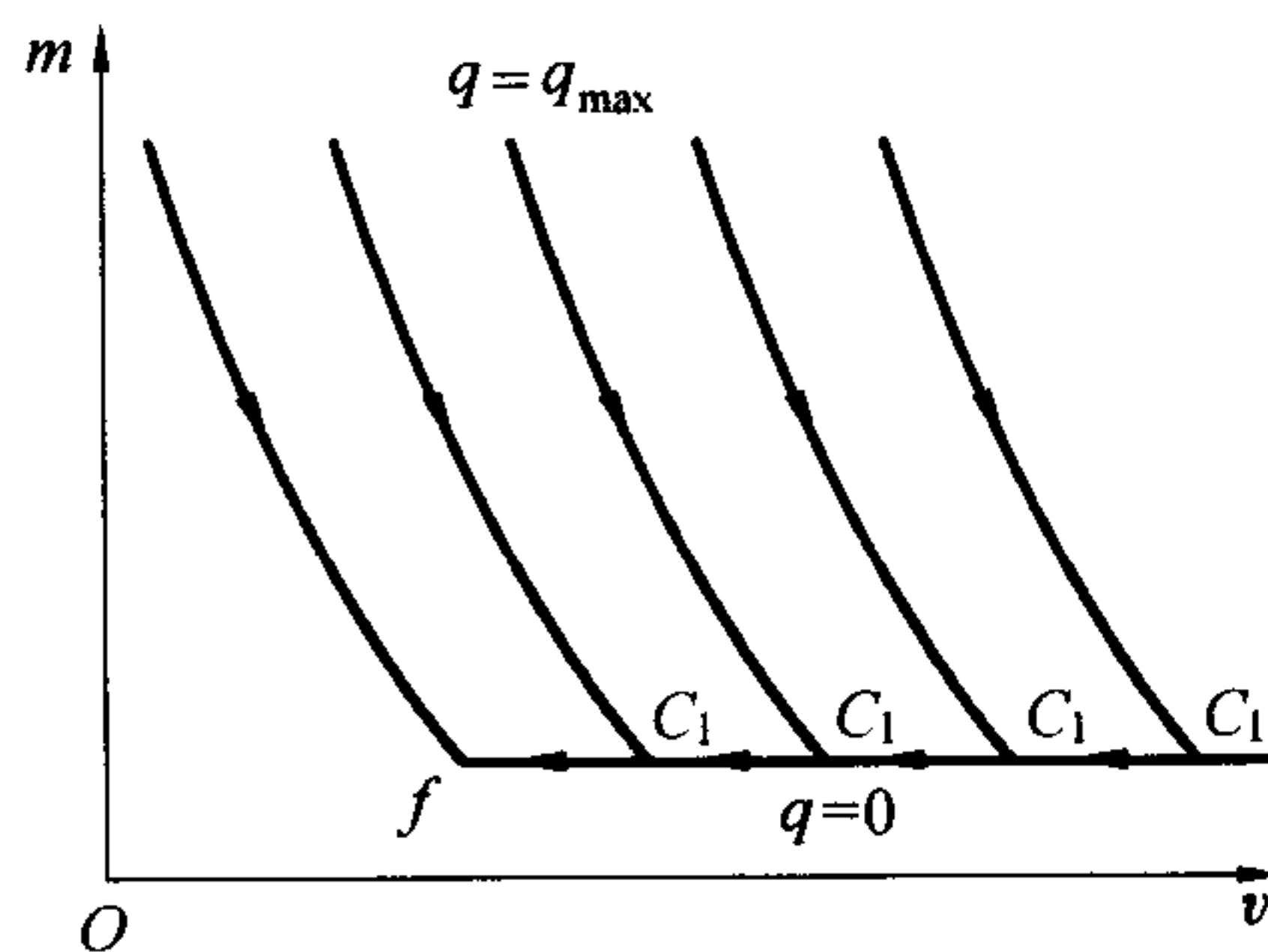


图 16.2  $K$  及  $q$  与  $t$  的关系

图 16.3 从给定起点  $O$  出发的极值弧族图 16.4 到达给定终点  $f$  的极值弧族

## 16.4 最小值原理简介

考虑一个工作于固定时间间隔  $t \in [t_0, t_f]$  的非线性微分系统, 由柯西型的一阶常微分方程组所描述, 即

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x, u) \quad (16.41)$$

式中  $x$ —— $n$  维状态变量,  $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in X^n$ ;  
 $u$ —— $m$  维控制变量,  $u = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]^T \in U^m$ ;  
 $f$ ——广义力的  $n$  维状态变量,  $f = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n]^T$ 。

假定已知  $t = t_0$  时

$$x(t_0) = x_0$$

终点时间  $t_f$  是给定的。

取指标函数

$$J = \Phi(t, x) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) dt \quad (16.42)$$

试求使  $J$  取极小值的控制变量  $u(t)$ 。

用拉格朗日 (Lagrange) 乘子将系统的微分等式约束式 (16.41) 与指标函数联系起来, 即作哈密尔顿 (Hamilton) 函数如下

$$H(t, x, u, \lambda) = f_0(t, x, u) + \lambda^T(t) f(t, x, u) \quad (16.43)$$

式中拉格朗日乘子 (共轭矢量或协态变量)

$$\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n]^T$$

则式 (16.42) 变为

$$J = \Phi(t, x) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [H(t, x, u, \lambda) - \lambda^T \dot{x}] dt \quad (16.44)$$





对上式被积函数最后一项分部积分,得

$$J = [\Phi(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (H + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt \quad (16.45)$$

对  $J$  相对于最佳控制变量  $\mathbf{u}$  和最佳状态变量  $\mathbf{x}$  取一次变分,得

$$\delta J = \left[ \delta \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda} \right) \right] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \delta \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right) + \delta \mathbf{u}^T \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right) \right] dt \quad (16.46)$$

使  $J$  取极小值的必要条件是  $\delta J = 0$ ; 对任意变分  $\delta \mathbf{x}$  及  $\delta \mathbf{u}$  而言, 由式(16.46) 便得

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} & \textcircled{1} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 & \textcircled{2} \\ \delta \mathbf{x}^T \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda} \right) = 0 \quad (\text{当 } t = t_0, t_f) & \textcircled{3} \end{cases} \quad (16.47)$$

由于系统的初始状态是给定的, 终点状态是未给定的, 故第 ③ 个条件变为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \Phi[t_f, \mathbf{x}(t_f)]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \end{cases} \quad (16.48)$$

由于  $\partial H / \partial \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}$ , 故可将式(16.41) 与式(16.47)① 两方程联立起来为

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (16.49)$$

此式被称为正则微分方程组, 其中后者是前者的共轭方程。

值得注意的是, 式(16.47)② 的  $\partial H / \partial \mathbf{u} = 0$ , 是在  $\mathbf{u}(t)$  不受约束的条件下成立的关系式; 若  $\mathbf{u}(t)$  是受约束的(例如不等式约束), 就不能一般地取  $\partial H / \partial \mathbf{u} = 0$  这个条件。最小值原理指出: 为使指标函数取极小值, 对于在容许控制组合中, 最佳控制变量相应的哈密尔顿函数, 必须小于容许组合中其他任何控制变量相应的哈密尔顿函数。

下面加以推广, 考虑柯西型一阶微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) \quad (16.50)$$

式中,  $\mathbf{c}$  为  $r$  维设计参数,  $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_r]^T \in C^r$ ; 其他符号已经说明。

方程组(16.50) 运动的初相  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  和终相  $(t_f, \mathbf{x}_f)$  所满足的边界条件为

$$g_j(t_0, t_f, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f, \mathbf{c}) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, l < 2n + 2 + r) \quad (16.51)$$

指标函数

$$J(\mathbf{u}(t), \mathbf{c}) = \Phi(t_0, t_f, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f, \mathbf{c}) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) dt \quad (16.52)$$



作哈密尔顿函数和拉格朗日函数

$$H = \lambda^T f + f_0 \quad (16.53)$$

$$L = \mu^T g + \Phi \quad (16.54)$$

式中,  $g = [g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_l]^T$ ,  $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_l]^T$  为常值参量。则相应于  $J_{\min}$  的最优控制弹道的解, 需满足下列微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^*} \\ u^* = \arg \min_{u \in U^n} H(t, x^*, u, \lambda, c^*) \end{cases} \quad (16.55)$$

式中, 带“\*”号的符号表示最优值。为了积分前两个方程, 需要初始条件  $x(t_0)$  和  $\lambda(t_0)$  以及参数  $c$ , 但对最优解而言, 这些值事先均未必可知。还有  $t_0, t_f, x(t_f), \lambda(t_f)$  及  $\mu$  均属未必可知。它们一共有  $(4n + r + l + 2)$  个未知数。可由下列相同数目的关系式确定。

(1)  $l$  个边界条件式(16.51)。

(2) 贯截条件, 共  $(2n + r + 2)$  个

$$\left( -H + \frac{\partial L}{\partial t_0} \right) \Big|_{t_0} \delta t_0 = 0 \quad (16.56)$$

$$\left( H + \frac{\partial L}{\partial t_f} \right) \Big|_{t_f} \delta t_f = 0 \quad (16.57)$$

$$\left( \lambda_i + \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \Big|_{t_0} \delta x_i(t_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16.58)$$

$$\left( -\lambda_i + \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \Big|_{t_f} \delta x_i(t_f) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16.59)$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial c_j} + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial c_j} dt \right) \delta c_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (16.60)$$

不言而喻, 若某一边界值  $x_i(t_0), x_i(t_f)$  或参数  $c_i$  固定, 则相应的变分  $\delta z = 0$  [ $z = t_0, t_f, x_i(t_0), x_i(t_f), c_j$ ]. 若它们是自由的, 则  $\delta z$  的系数等于零。应该指出, 条件(16.56) ~ (16.60) 是广义贯截条件的展开式

$$\left( H \delta t - \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta x_i \right) \Big|_{t_0}^{t_f} + \delta L + \sum_{j=1}^r \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial c_j} \delta c_j dt = 0 \quad (16.61)$$

(3) 由正则方程解出  $2n$  个关系式为

$$\begin{cases} x(t_f) = \varphi_1(t_0, t_f, \lambda_0, x_0) \\ \lambda(t_f) = \varphi_2(t_0, t_f, \lambda_0, x_0) \end{cases} \quad (16.62)$$

以上就是用最小值原理解最优控制问题所用到的基本方程式。



## 16.5 最小值原理的应用举例

现以最优比例导引为例,对最小值原理在飞行理论中的应用进行了解。现求使攻击目标时脱靶量最小的比例导引系数  $K$ 。由式(5.24) 知

$$\frac{d\sigma}{dt} = K \frac{dq}{dt} \quad (16.63)$$

如图 16.5 所示,  $\overline{CB}$  为目标路线的基准线;  $\overline{OB}$  为导弹攻击路线的基准线。目标的飞行速度为  $v_T$ , 导弹的飞行速度为  $v$ ,  $T$  为目标在任意时刻  $t$  的位置,  $M$  为导弹在  $t$  时的位置。 $\overline{MT}$  是导弹与目标的连线, 谓视线或瞄准线;  $\overline{OC}$  作为起点时的视线, 定为  $O_y$  轴, 与  $O_y$  轴垂直的另一轴为  $O_x$  轴, 组成平面直角坐标系。 $\overline{MT}$  与  $\overline{OC}$  之间的夹角  $\nu$  被称为视线角。假定导弹速度矢量在  $t$  时的方向与基准方向  $\overline{OB}$  的夹角为  $\zeta$ , 则比例导引关系(16.63), 可转换为  $\zeta$  与  $\nu$  的关系。由图 16.5 的几何关系易见

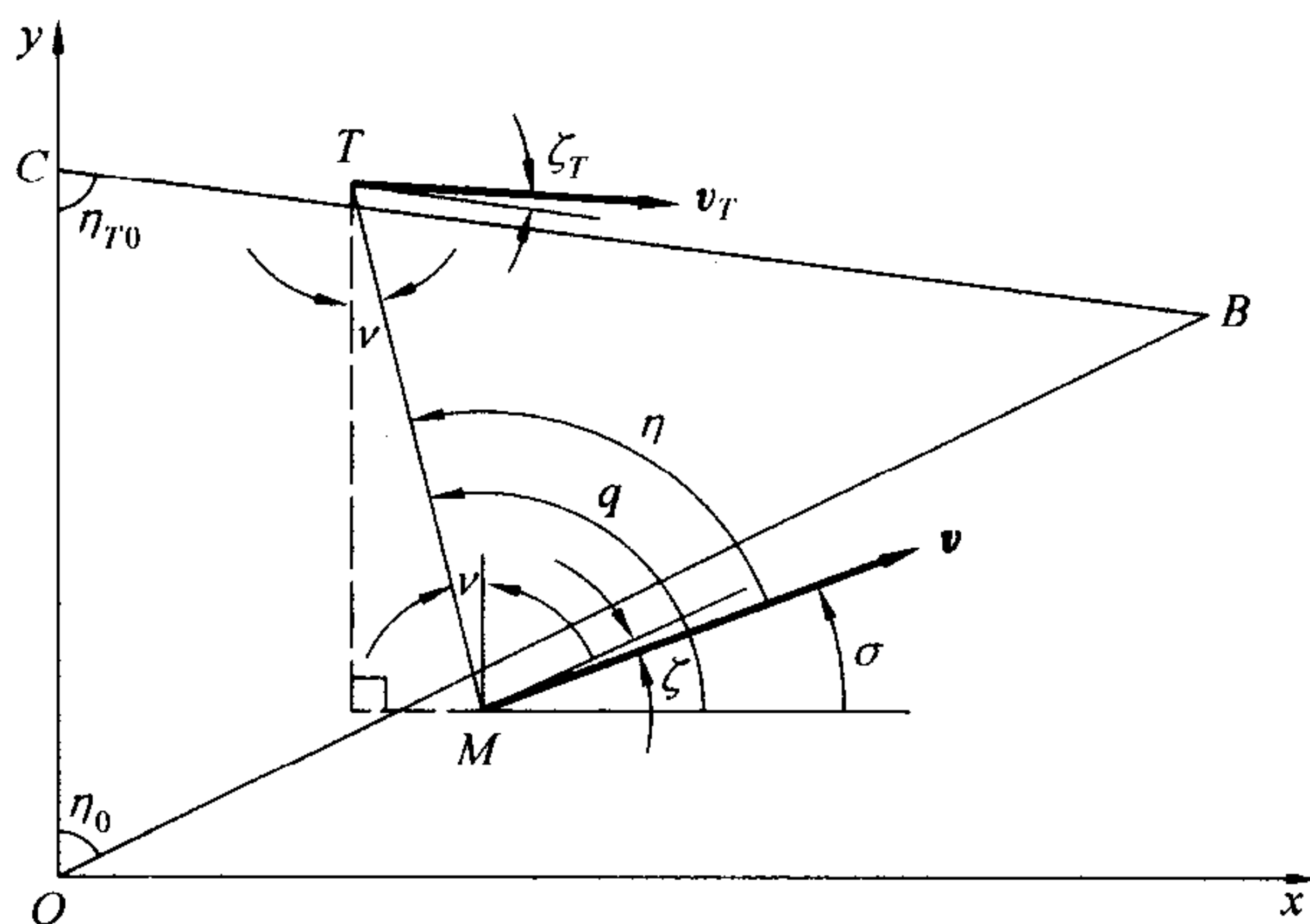


图 16.5 比例导引坐标图

$$\begin{cases} q = \frac{\pi}{2} + \nu \\ \sigma = \frac{\pi}{2} - \eta_0 - \zeta \end{cases} \quad (16.64)$$

故代入式(16.63) 得

$$\dot{\zeta} = -K \dot{\nu} \quad (16.65)$$

目的是在攻击终结时间  $t_f$  时, 使脱靶量

$$|e(t)|_{t=t_f} = |x(t) - x_T(t)|_{y=y_T}$$

最小, 试求合适的比例系数  $K$  应为多少?

由图 16.5 知, 视线角  $\nu$  为





$$\tan \nu = \frac{x - x_T}{y_T - y}$$

对比例导引而言,一般  $\nu$  值甚小,可取近似式

$$\nu \approx \frac{x - x_T}{y_T - y} \quad (16.66)$$

现建立导弹运动方程。导弹与目标的相对速度在  $y$  轴和  $x$  轴上的投影为

$$\begin{cases} \dot{y} - \dot{y}_T = v \cos(\eta_0 + \zeta) + v_T \cos(\eta_{T0} + \zeta_T) = v_R \\ \dot{x} - \dot{x}_T = v \sin(\eta_0 + \zeta) - v_T \sin(\eta_{T0} + \zeta_T) \end{cases} \quad (16.67)$$

式中  $v_R$  为接近速度,一般假设它为常量,于是

$$v_R t_f = y_T(0) - y(0) = \overline{OC} \quad (16.68)$$

由式(16.67)第一式积分得

$$y - y_T = y(0) - y_T(0) + v_R t = v_R(t_f - t) \quad (16.69)$$

又

$$x - x_T = e$$

则将上两式代入式(16.66)得

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{e}{v_R(t_f - t)} \\ \dot{\nu} &= \frac{e + \dot{e}(t_f - t)}{v_R(t_f - t)^2} \end{aligned} \quad (16.70)$$

取控制变量

$$u = \dot{\zeta} \quad (16.71)$$

则式(16.65)成为

$$u = \dot{\zeta} = -K \frac{e + \dot{e}(t_f - t)}{v_R(t_f - t)^2} \quad (16.72)$$

现取指标函数  $J$ 。一方面考虑到  $\dot{\zeta}$  的绝对值应尽量小;另一方面攻击终结时间  $t_f$  的偏差量  $e$  的绝对值亦尽量小,故取

$$J = n_e e^2(t_f) + \int_0^{t_f} u^2 dt \quad (16.73)$$

式中  $n_e$  为一系数。

取状态变量

$$x_1 = e, \quad x_2 = \dot{e} \quad (16.74)$$

设  $v$  和  $v_T$  为常量,目标直线飞行( $\zeta_T = 0$ ),则由式(16.67)第二式(注意  $x - x_T = e$ )求导得

$$\ddot{e} = v \cos(\eta_0 + \zeta) \dot{\zeta} \approx v \cos \eta_0 u$$

于是便得状态方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v \cos \eta_0 u \end{cases} \quad (16.75)$$



引入拉格朗日乘子  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 作  $H$  函数

$$H = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 v \cos \eta_0 u \quad (16.76)$$

对无约束的  $u$  来说, 最优控制须满足条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

便得  $u$  的最优值

$$u^* = -\frac{1}{2} \lambda_2 v \cos \eta_0 \quad (16.77)$$

式中的  $\lambda_2$  只好由正则方程求解。根据方程组(16.55) 第二式, 有

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = 0 \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1 \end{cases} \quad (16.78)$$

边界条件由贯截条件(16.58) 和(16.59) 两式确定。对条件(16.58) 而言, 当  $t_0 = 0$  时的  $x_i$  是固定的,  $\delta x_i(t_0) = 0$  已满足。对  $t = t_f$  时的  $\delta x_i(t_f) \neq 0$ , 故须

$$\lambda_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \quad (16.79)$$

而今  $L$  由式(16.54) 为

$$L = n_e x_1^2(t_f)$$

代入式(16.79) 得

$$\begin{cases} \lambda_1(t_f) = 2n_e x_1(t_f) \\ \lambda_2(t_f) = 0 \end{cases} \quad (16.80)$$

以此为边界条件解方程组(16.78), 实际上是由终值条件解方程(16.78)。对任一时刻  $t$ , 令新自变量

$$\tau = t_f - t \quad (16.81)$$

则对新自变量  $\tau$  而言, 方程(16.78) 变为

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0 \\ \frac{d\lambda_2}{d\tau} = \lambda_1 \end{cases} \quad (16.82)$$

积分之得

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2n_e x_1(t_f) \\ \lambda_2 = 2n_e x_1(t_f) \tau \end{cases} \quad (16.83)$$

现在式(16.77) 的  $u^*$  还不能得到最后表达式, 因为还不知道  $x_1(t_f)$ 。为求  $x_1(t_f)$ , 将状态方程(16.75) 亦化为以  $\tau$  为自变量的形式



$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -v \cos \eta_0 u = \frac{1}{2} v^2 \cos^2 \eta_0 \lambda_2 \end{cases} \quad (16.84)$$

其中,第二个方程第二个等号,是将式(16.77)的最优化条件代入而得。

将式(16.83)的  $\lambda_2$  表达式代入式(16.84)第二式得

$$\frac{dx_2}{d\tau} = n_e v^2 \cos^2 \eta_0 x_1(t_f) \tau$$

积分得(注意  $\tau = 0$  时相当  $t = t_f$ )

$$x_2(t) = x_2(t_f) + \frac{1}{2} n_e v^2 \cos^2 \eta_0 x_1(t_f) \tau^2 \quad (16.85)$$

再代入式(16.84)第一个方程并积分得

$$x_1(t) = x_1(t_f) - x_2(t_f) \tau - \frac{1}{6} n_e v^2 \cos^2 \eta_0 x_1(t_f) \tau^3 \quad (16.86)$$

将式(16.85)和式(16.86)写成联立方程组形式

$$\begin{cases} \frac{1}{2} n_e v^2 \cos^2 \eta_0 \tau^2 x_1(t_f) + x_2(t_f) = x_2(t) \\ \left(1 - \frac{1}{6} n_e v^2 \cos^2 \eta_0 \tau^3\right) x_1(t_f) - \tau x_2(t_f) = x_1(t) \end{cases}$$

解得

$$x_1(t_f) = \frac{x_1(t) + \tau x_2(t)}{1 + \frac{1}{3} n_e v^2 \cos^2 \eta_0 \tau^3} \quad (16.87)$$

由式(16.70)

$$\dot{\nu} = \frac{x_1(t) + \tau x_2(t)}{v_R \tau^2} \quad (16.88)$$

代入上式得

$$x_1(t_f) = \frac{v_R \tau^2 \dot{\nu}}{1 + \frac{1}{3} n_e v^2 \cos^2 \eta_0 \tau^3} \quad (16.89)$$

代入式(16.83)得

$$\lambda_2 = \frac{2 n_e v_R \tau^3 \dot{\nu}}{1 + \frac{1}{3} n_e v^2 \cos^2 \eta_0 \tau^3} \quad (16.90)$$

再代入式(16.77) 便得最优控制

$$u^* = \zeta = - \frac{n_e v v_R \cos \eta_0 \tau^3 \dot{\nu}}{1 + \frac{1}{3} n_e v^2 \cos^2 \eta_0 \tau^3} \quad (16.91)$$





最优的比例导引系数  $K^*$  由式(16.65) 知

$$K^* = -\frac{\dot{\zeta}}{\dot{\nu}} = \frac{3n_e v v_R \cos \eta_0 (t_f - t)^3}{3 + n_e v^2 \cos^2 \eta_0 (t_f - t)^3} \quad (16.92)$$

当  $n_e \rightarrow \infty$  时,合适的比例导引系数为

$$K^* \approx \frac{3}{\cos \eta_0} \left( \frac{v_R}{v} \right) \quad (16.93)$$

如果保留  $\zeta$  的非线性项,则

$$\ddot{e} = v \cos(\eta_0 + \zeta) \dot{\zeta} = v(\cos \eta_0 \cos \zeta - \sin \eta_0 \sin \zeta) \dot{\zeta} \approx v(\cos \eta_0 - \zeta \sin \eta_0) \dot{\zeta}$$

再引入状态变量  $x_3 = \zeta$ , 则状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v(\cos \eta_0 - \sin \eta_0 \cdot x_3) u \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \quad (16.94)$$

哈密尔顿函数为

$$H = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 v(\cos \eta_0 - \sin \eta_0 \cdot x_3) u + \lambda_3 u$$

由  $\partial H / \partial u = 0$ , 得最优控制

$$u^* = -\frac{1}{2} [\lambda_2 v(\cos \eta_0 - \sin \eta_0 \cdot x_3) + \lambda_3]$$

经类似运算,最后可得<sup>①</sup>

$$u^* = w_1(t) \dot{\nu} - \zeta [w_2(t) \dot{\nu}]^{1/2} \tanh \{ [w_2(t) \dot{\nu}]^{1/2} (t_f - t) \} \quad (16.95)$$

式中

$$w_1(t) = \frac{-3n_e v v_R \cos \eta_0 (t_f - t)^3}{3 + n_e v^2 \cos^2 \eta_0 (t_f - t)^3} \quad (16.96)$$

$$w_2(t) = \frac{-3n_e v v_R \sin \eta_0 (t_f - t)^3}{3 + n_e v^2 \cos^2 \eta_0 (t_f - t)^3} \quad (16.97)$$

## 16.6 线性系统最优制导律

在有控弹道领域,经常碰到线性系统模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u} + \mathbf{W}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (16.98)$$

式中  $\mathbf{A}(t)$ —— $n \times n$  矩阵,分段连续函数;

$\mathbf{B}(t)$ —— $n \times m$  矩阵,分段连续函数;

$\mathbf{W}(t)$ —— $n \times 1$  干扰列阵。

① 引自西北工业大学《科技资料》,1977年9月



性能泛函为二次型

$$J(u) = \frac{1}{2} x_f^T S x_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (16.99)$$

式中  $S, Q$ —— $n \times n$  非负定对称矩阵;

$R$ —— $m \times m$  正定对称矩阵。

当  $u(t)$  受约束时,最优制导律  $u^*(t)$  使哈密尔顿函数取最小值,即

$$H(t, x^*, u^*, \lambda, c^*) = \min_{u \in R^n} H(t, x^*, u, \lambda, c^*) \quad (16.100)$$

当  $u(t)$  不受约束时,  $u(t)$  由哈密尔顿函数  $H$  取极小值确定。由式(16.43) 知

$$H = \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T [A(t)x + B(t)u + W(t)] \quad (16.101)$$

则  $u(t)$  取极小值的必要条件为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = R u + B^T \lambda = 0$$

于是得

$$u^* = -R^{-1} B^T \lambda \quad (16.102)$$

又由式(16.49) 第二方程知

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -A^T \lambda - Qx \\ \lambda(t_f) = Sx(t_f) \end{cases} \quad (16.103)$$

$$\lambda(t_f) = Sx(t_f) \quad (16.104)$$

其中,边值条件由式(16.54)、(16.59) 给出。

式(16.103) 表明,  $\lambda$  是  $x$  的线性函数,设为

$$\lambda = p(t)x + U(t) \quad (16.105)$$

将它求导,并将状态方程及最优制导律代入便得

$$(\dot{p} + pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q)x + \dot{U} + (A^T - pBR^{-1}B^T)U + pW = 0$$

该式对任意  $x$  均成立,从而有 Riccati 矩阵微分方程

$$\begin{cases} \dot{p} = -(pA + A^T p - pBR^{-1}B^T p + Q) \\ p(t_f) = S \end{cases} \quad (16.106)$$

以及

$$\begin{cases} \dot{U} = -(A^T - pBR^{-1}B^T)U - pW \\ U(t_f) = 0 \end{cases} \quad (16.107)$$

对方程(16.106)、(16.107) 逆向求解,即可得出  $p(t)$  和  $U(t)$  直至  $t = t_0$  的初值,则有

$$\lambda(t_0) = p(t_0)x(t_0) + U(t_0) \quad (16.108)$$

然后从  $t_0$  开始正向联立求解方程(16.98) 和(16.103), 其中方程(16.98) 中的  $u(t)$  由式(16.102) 代入,方程(16.103) 的初值取式(16.108)。



特别当  $Q = 0$  时, 方程(16.103) 变为齐次线性方程

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{d\tau} = A^T \lambda \\ \lambda(0) = Sx(t_f) \end{cases} \quad (16.109)$$

式中,  $\tau$  为新自变量

$$\tau = t_f - t \quad (16.110)$$

$$\lambda = \exp(A^T \tau) \lambda(0) = \Phi^T(\tau, 0) Sx(t_f) \quad (16.111)$$

式中,  $\Phi(t, 0)$  是方程  $\dot{x} = Ax$  的状态转移矩阵。

又将式(16.98) 写成以  $\tau$  为自变量的形式

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -(Ax + Bu + W) \\ x(0) = x(t_f) \end{cases} \quad (16.112)$$

积分得

$$x(\tau) = \Phi^{-1}(\tau, 0)x(t_f) - \int_0^\tau \Phi^{-1}(\tau, \eta)(Bu^* + W)d\eta$$

将式(16.111) 代入式(16.102), 再将式(16.102) 代入上式得

$$x(\tau) = \Phi^{-1}(\tau, 0)x(t_f) + \int_0^\tau \Phi^{-1}(\tau, \eta)[BR^{-1}B^T\Phi^T(\eta, 0)Sx(t_f) - W(\eta)]d\eta \quad (16.113)$$

由式(16.113) 得出  $x(t_f)$ , 代入式(16.111), 再将式(16.111) 代入式(16.102), 便得到最优控制的具体表达式。它是否最优? 可适当改变其值, 由  $H$  的变化趋势便可判断。

**例题 16.1** 当状态方程(16.75) 加上干扰  $w(t)$  时, 指标函数仍如式(16.73), 求最优控制。

**解** 状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = bu + w(t) \end{cases}$$

式中,  $b = v \cos \eta_0$ 。对照式(16.98) 及式(16.99), 此处

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, S = 2n_e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = 0,$$

$$R = 2, W = \begin{bmatrix} 0 \\ w(t) \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵

$$\Phi(t, 0) = \exp(At) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t\right) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将各矩阵代入式(16.113) 得

$$x(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} x(t_f) + \int_0^\tau \begin{bmatrix} 1 & \eta - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \frac{1}{2} [0 \quad b] \begin{bmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T 2n_e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t_f) d\eta -$$





$$\int_0^\tau \begin{bmatrix} 1 & \eta - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w(\eta) \end{bmatrix} d\eta =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{6} n_e b^2 \tau^3 & -\tau \\ \frac{1}{2} n_e b^2 \tau^2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t_f) - \begin{bmatrix} \int_0^\tau (\eta - \tau) w(\eta) d\eta \\ \int_0^\tau w(\eta) d\eta \end{bmatrix}$$

得

$$\mathbf{x}(t_f) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{6} n_e b^2 \tau^3 & -\tau \\ \frac{1}{2} n_e b^2 \tau^2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) + \int_0^\tau (\eta - \tau) w(\eta) d\eta \\ x_2(t) + \int_0^\tau w(\eta) d\eta \end{bmatrix}$$

则代入式(16.111)、(16.102)得

$$\mathbf{u}^* = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{bmatrix} 2n_e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t_f) =$$

$$-n_e b \begin{bmatrix} \tau & 0 \end{bmatrix} \left( 1 + \frac{1}{3} n_e b^2 \tau^3 \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\frac{1}{2} n_e b^2 \tau^2 & 1 - \frac{1}{6} n_e b^2 \tau^3 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) + \int_0^\tau (\eta - \tau) w(\eta) d\eta \\ x_2(t) + \int_0^\tau w(\eta) d\eta \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{3n_e b \tau}{3 + n_e b^2 \tau^3} \left[ x_1(t) + x_2(t) \tau + \int_0^\tau \eta w(\eta) d\eta \right]$$

当  $n_e \rightarrow \infty$  时,

$$\mathbf{u}^* = -\frac{3}{b\tau^2} \left[ x_1(t) + x_2(t) \tau + \int_0^\tau \eta w(\eta) d\eta \right]$$

此结果与16.5节之式(16.75)、(16.73)的解答是相同的。事实上将式(16.87)代入式(16.83)第二式,然后将  $\lambda_2$  代入式(16.77),则得

$$\mathbf{u}^* = -\frac{3n_e b \tau}{3 + n_e b^2 \tau^3} [x_1(t) + x_2(t) \tau]$$

与本例比较起来,在于前者未考虑干扰  $w(t)$ 。

## 第十七章 无控火箭弹道偏差量及射表编制

### 17.1 序 言

理想弹道的计算是建立在六条基本假设基础上的。在实际射击中,对其标准弹道的计算条件还需要规定得更具体一些。除了气象条件为标准值之外,对弹体质量(简称弹量)、药量、药温等弹道条件(或称为射表条件),也必须确定出标准值,其中:

- (1) 标准弹量  $m_n$  (标准全弹量  $m_{on}$  与被动段标准弹量  $m_{Kn}$ , 而  $m_{on} = m_{Kn} + m_P$ ,  $m_P$  是标准装药量);
- (2) 标准药温  $t_{zn} = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- (3) 弹形、转动惯量均符合图纸规定,在弹道计算中,转动惯量取标准值,其中与弹形有关的弹形系数需要通过射击试验确定出标准值;
- (4) 推力时间曲线取标准曲线;
- (5) 标准比冲量  $I_{1n}$ 。

在此基础上计算出的初速  $v_0$  及主动段末端  $K$  点诸元,应与实测值的标准化数值(所谓标准化数值就是将实测值消除非标准因素影响后的值)结合起来,以确定出  $v_0$  及  $K$  点诸元的标准值。

此外,还要求发射装置符合标准条件。

至于地球条件和地形条件,仍如第一章所述,即落点在起点水平面上,地表为平面,柯里奥利加速度为零,重力加速度  $g = 9.80\text{ m/s}^2$ ,方向铅直向下。当然,若射程很大,则应该考虑重力加速度随高度的变化、柯里奥利加速度以及地表的曲率和重力加速度随高度的变化。

在实际射击中,诸因素与以上标准条件有一定偏差,由此形成弹道的偏差量。上述对火箭运动有关的因素与其标准值之差为 1 单位值时所引起的弹道偏差量,被称之为该因素的修正系数。弹道偏差量与修正量是一个问题的两个方面:扰动引起弹道偏差量;对既定的火箭实施射击,利用射表(给出标准条件下的弹道诸元)求取起始装定(火箭炮仰角和射向)中,则要对射表中的射距离和方向加上修正量。显然,该修正量与相应偏差量仅相差负号。弹道修正量都是由非随机因素引起的。

目前,偏差量计算多利用电子计算机求解方程组。利用第八章建立的一般性运动方程组,当考虑某一因素(例如横风  $w_z$ )影响时,则在方程组中只保留这一因素,而将其他因素取为标准值,得到所谓相应于某一因素的非标准化方程组。将此方程组算出的弹道诸元,减去相应的



弹道诸元标准值,得该因素每一单位偏差量相应的弹道诸元的偏差量(修正系数)。显然,当实际的非标准因素与其标准值相差不大时,其相应的弹道诸元偏差量,便是其偏差值与其修正系数之积。以上为求差法。

对地面火炮,通常只考虑对落点修正,因此弹道诸元的修正量,主要是射程修正量和落点侧偏。

除了以上用电子计算机计算的求差法外,还有一种解析法(即微分法)。这种方法在射表编制中已很少使用,但它可以便于考察影响落点偏差量的因素,在弹道设计中还是需要的;同时,借此还可以分析计算机数值计算结果的可靠性。本章将重点介绍诸偏差量的内涵及影响因素。

总之,修正量计算不仅用于射表编制,而且对于型号设计及其他各种射击试验分析,都是必须具备的知识。本章首先介绍在主动段和被动段内,弹道条件和气象条件所产生的弹道偏差量,然后简单介绍主动和被动段内的偏流,最后介绍射表编制的基本原则。

## 17.2 主动段的弹道偏差量

计算火箭弹道落点偏差量,分两步进行。第一步计算影响因素偏差量引起的  $K$  点诸元偏差量  $\Delta v_K$ 、 $\Delta \theta_K$ 、 $\Delta x_K$ 、 $\Delta y_K$  等值;第二步计算被动段内的修正量。在主动段内,主要有弹量偏差量(装药量偏差值  $\Delta m_p$  和空弹量  $m_K$  的偏差值  $\Delta m_K$ )、药温偏差量  $\Delta t_z$  及低空风。关于风的影响已在第七、九、十、十二章介绍过,此处不再重述。但是,关于低空弹道风的取值问题则需要讨论。

### 17.2.1 弹量变化引起的弹道偏差量

援引方程组(2.34)有

$$\begin{cases} v_K = u_{\text{eff}} K(\mu_K) - \frac{t_p c_0}{\mu_K} K(\mu_K) H(\gamma) R(v_K) - g t_p \sin \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_K) \\ \xi(\theta_K) = \xi(\theta_0) - \frac{t_p g}{\mu_K v_K} K(\mu_K) [K_2(\mu_K) - K_2(\mu_0)] \\ y_K = \frac{t_p K_1(\mu_K)}{\mu_K K(\mu_K)} v_K \sin \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_K) \end{cases} \quad (17.1)$$

其中  $\mu_0$  采用式(2.29)

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2s_0\mu_K}{t_p(u_{\text{eff}} - \beta_0)}} \quad (17.2)$$

从方程组(17.1)清楚地看出,弹量因素( $m_K$ 、 $m_p$ )对  $K$  点诸元的影响主要是通过比值  $\mu_K = m_p/(m_K + m_p)$  起作用的,  $\mu_K$  是决定火箭能量的一个重要示性数。固然  $m_p$  或  $m_K$  的变化所引起的全弹量  $m_0$  变化,能够使  $v_K$  表达式第二项稍有影响,但这一影响是微不足道的。况且,  $\mu_K$  对其第二、三两项的影响比之第一项要小得多,以致可以利用更简便的表达式





$$v_K = u_{\text{eff}}^* K(\mu_K) \quad (17.3)$$

来计算弹量的修正系数。此外,  $m_P$  和  $m_K$  的改变量对  $\mu_0$  的影响很小, 是不值得考虑的。

### 1. 对 $v_K$ 的修正

由式(17.3)知

$$\frac{\partial v_K}{\partial \mu_K} = \frac{u_{\text{eff}}^*}{1 - \mu_K} = \frac{v_K}{(1 - \mu_K) K(\mu_K)} \quad (17.4)$$

则

$$\Delta v_K = \frac{\partial v_K}{\partial \mu_K} \Delta \mu_K \quad (17.5)$$

式中

$$\Delta \mu_K = \frac{m_P + \Delta m_P}{m_0 + \Delta m_P + \Delta m_K} - \mu_K \quad (17.6)$$

注意在上式中的  $m_P$ 、 $m_0$ 、 $\mu_K$  都是标准值, 为简化书写, 特省略了脚注“n”。 $\Delta \mu_K$  还可以表示为下式

$$\Delta \mu_K = \Delta \left( \frac{m_P}{m_K + m_P} \right) = \frac{1}{m_0^2} (m_K \Delta m_P - m_P \Delta m_K) \quad (17.7)$$

如欲分别计及  $m_P$  和  $m_K$  的修正系数, 则从(17.7)和(17.4)两式可知

$$\frac{\partial v_K}{\partial m_P} = \frac{v_K m_K}{m_0^2 (1 - \mu_K) K(\mu_K)} = \frac{\mu_K}{m_0 K(\mu_K)} \quad (17.8)$$

$$\frac{\partial v_K}{\partial m_K} = - \frac{v_K m_P}{m_0^2 (1 - \mu_K) K(\mu_K)} = - \frac{m_P}{m_K} \frac{\partial v_K}{\partial m_P} \quad (17.9)$$

(17.8)和(17.9)两式还可以用来计算散布。如果已知  $m_P$  和  $m_K$  的中间误差为  $B_{m_P}$  和  $B_{m_K}$ , 则引起的  $v_K$  的中间误差为

$$B_{v_K} = \sqrt{\left( \frac{\partial v_K}{\partial m_P} B_{m_P} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_K}{\partial m_K} B_{m_K} \right)^2} \quad (17.10)$$

此式将是确定  $m_K$  和  $m_P$  之公差的重要依据。但要注意的是, 有的生产部门在装配火箭弹时, 依据式(17.7)采取重药配重弹、轻药配轻弹的搭配方法, 以使  $\Delta \mu_K$  尽可能小, 从而可减小  $v_K$  的散布。由于在这种情况下的  $\Delta m_P$  和  $\Delta m_K$  已不独立, 就不能使用式(17.10)。

### 2. 对 $\theta_K$ 的修正

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(\theta_K)}{\partial \theta_K} \cdot \frac{\partial \theta_K}{\partial \mu_K} &= \frac{t_P g}{\mu_K^2 u_{\text{eff}}^*} [K_2(\mu_K) - K_2(\mu_0)] - \frac{t_P g}{\mu_K u_{\text{eff}}^* K(\mu_K)} = \\ &= \frac{1}{\mu_K} [\xi(\theta_0) - \xi(\theta_K)] - \frac{t_P g}{\mu_K v_K} \end{aligned}$$

又

$$\frac{\partial \xi(\theta_K)}{\partial \theta_K} = \frac{1}{\cos \theta_K}$$

从而



$$\frac{\partial \theta_K}{\partial \mu_K} = \left[ \xi(\theta_0) - \xi(\theta_K) - \frac{t_P g}{v_K} \right] \frac{\cos \theta_K}{\mu_K} \quad (17.11)$$

$$\Delta \theta_K = \frac{\partial \theta_K}{\partial \mu_K} \Delta \mu_K \quad (17.12)$$

### 3. 对 K 点坐标的修正

由式(17.1)第三式置  $v_K = u_{\text{eff}}^* K(\mu_K)$ , 再两边取对数并微分得

$$\frac{dy_K}{y_K} = \frac{d K_1(\mu_K)}{K_1(\mu_K)} - \frac{d \mu_K}{\mu_K} + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_K) d \theta_K$$

一般第三项很小, 可忽略, 故得

$$\frac{\partial y_K}{\partial \mu_K} = \left[ \frac{K(\mu_K)}{K_1(\mu_K)} - \frac{1}{\mu_K} \right] y_K \quad (17.13)$$

$$\Delta y_K = \frac{\partial y_K}{\partial \mu_K} \Delta \mu_K \quad (17.14)$$

为求  $\Delta x_K$ , 可近似取  $x_K \approx y_K \cot \theta_K$ , 则得

$$\Delta x_K = \cot \theta_K \cdot \Delta y_K - \frac{y_K}{\sin^2 \theta_K} \Delta \theta_K \quad (17.15)$$

### 17.2.2 对药温变化的修正

药温的变化是通过下列几个途径来影响 K 点诸元的。

(1) 引起比冲量  $I_1$  的变化。这不仅使主动段推力大小有所改变, 而且总的推力冲量也改变了, K 点诸元自然会有所变化。由火箭发动机原理知

$$\frac{\partial I_1}{\partial t_z} = \alpha_{lt} I_1 \quad (17.16)$$

从而

$$\frac{\partial u_{\text{eff}}}{\partial t_z} = \alpha_{lt} u_{\text{eff}} \quad (17.17)$$

$\alpha_{lt}$  是由火药性质决定的系数, 在药温  $t_z = -40 \sim +40^\circ \text{C}$  的范围内, 对 H 火药,  $\alpha_{lt} = 0.0011$ , 对 HM<sub>2</sub> 火药,  $\alpha_{lt} = 0.0005$ 。如测得  $\partial I_1 / \partial t_z$ , 则

$$\alpha_{lt} I_1 = \frac{\partial I_1}{\partial t_z} \quad (17.18)$$

(2) 引起火药燃烧速度  $u_F$  的变化, 致使  $t_P$  有显著改变, 从而阻力和重力之作用的时间改变了, 造成 K 点诸元相应的增量。由火箭发动机原理知

$$\frac{\partial u_F}{\partial t_z} = \alpha_{ut} u_F \quad (15^\circ \text{C}) \quad (17.19)$$



式中,  $\alpha_u$  是燃速的温度敏感系数, 表示在任意初温下温度改变  $1^\circ\text{C}$  时燃速的相对变化。例如当燃烧室压力为  $10^7 \text{ Pa}$  时, 测得 H 火药的  $\alpha_u$  值如表 17.1 所示。

表 17.1 H 火药的  $\alpha_u$  值

$t_z/^\circ\text{C}$	- 30	- 10	+ 10	+ 30	+ 50
$\alpha_u$	0.002 6	0.003 0	0.003 4	0.004 2	0.004 4

由于任一种型号火箭的火药肉厚是确定的, 这样, 火药的平均燃速  $u_F$  与  $t_P$  的关系为

$$u_F t_P = \text{const}$$

则

$$\frac{\Delta u_F}{u_F} + \frac{\Delta t_P}{t_P} = 0$$

考虑到式(17.19), 得

$$\frac{\Delta t_P}{t_P} = -\alpha_u \Delta t_z \quad (17.20)$$

如果已测出  $\partial t_P / \partial t_z$ , 那么

$$\alpha_u t_P = -\frac{\partial t_P}{\partial t_z} \quad (17.21)$$

(3) 使推力大小改变, 致使  $\mu_0$  (亦  $v_0$ ) 改变, 这对  $\theta_K$  是有影响的。将(17.2)式两边取对数并微分之(略去对  $\beta_0$  的影响), 再将(17.17)和(17.20)两式代入得

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial t_z} = \frac{1}{2} (a_u - a_h) \mu_0 \quad (17.22)$$

### 1. 对 $v_K$ 的修正

由于  $t_z$  对  $v_K$  的表达式每一项的影响都较明显, 所以应该较仔细地考虑各项。由式(17.1)第一式对  $t_z$  求导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_K}{\partial t_z} = & K(\mu_K) \frac{\partial u_{\text{eff}}}{\partial t_z} - \frac{c_0}{\mu_K} K(\mu_K) H(\gamma) R(v_K) \frac{\partial t_P}{\partial t_z} - \frac{t_P c_0}{\mu_K} K(\mu_K) H(\gamma) \frac{\partial R(v_K)}{\partial v_K} \cdot \frac{\partial v_K}{\partial t_z} - \\ & g \sin \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta_K) \frac{\partial t_P}{\partial t_z} \end{aligned}$$

记下列符号

$$\begin{cases} v_P = u_{\text{eff}} K(\mu_K) \\ v_g = g t_P \sin \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta_K) \\ v_R = v_P - v_K - v_g \end{cases} \quad (17.23)$$

再考虑到

$$\frac{\partial R(v_K)}{\partial v_K} = \frac{\partial}{\partial v_K} \left[ \frac{1}{v_K} \int_0^{v_K} F(v) dv \right] = \frac{1}{v_K} [F(v_K) - R(v_K)]$$





则 
$$\frac{\partial v_K}{\partial t_z} = \alpha_H v_P + \alpha_w v_R - \frac{v_R}{R(v_K)} \frac{1}{v_K} [F(v_K) - R(v_K)] \frac{\partial v_K}{\partial t_z} + a_w v_g$$

从而得到

$$\frac{\partial v_K}{\partial t_z} = \frac{\alpha_H v_P + \alpha_w (v_R + v_g)}{1 + \frac{v_R}{v_K} \left[ \frac{F(v_K)}{R(v_K)} - 1 \right]} \quad (17.24)$$

## 2. 对 $\theta_K$ 的修正

由  $\Delta t_z$  所引起的  $\Delta t_P$  使主动段长度在  $K$  点附近有一相应的变化,从而有一相应的  $\theta_K$  增量;不仅如此,更重要的是,  $\Delta t_z$  使整个主动段的推力加速度大小改变,火箭的离轨速度也变了,相应的  $\Delta \theta_K$  是不可忽视的。从式(17.1)第二式知,  $\theta_K$  与  $t_z$  之间存在下列复合函数关系

$$\xi(\theta_K) = f(\mu_0(t_z), t_P(t_z), v_K(t_z))$$

由此得

$$\frac{1}{\cos \theta_K} \frac{\partial \theta_K}{\partial t_z} = \frac{\partial f}{\partial \mu_0} \frac{\partial \mu_0}{\partial t_z} + \frac{\partial f}{\partial t_P} \frac{\partial t_P}{\partial t_z} + \frac{\partial f}{\partial v_K} \frac{\partial v_K}{\partial t_z} \quad (17.25)$$

而

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mu_0} &= \frac{t_P g}{\mu_K v_K} \frac{K(\mu_K)}{K(\mu_0)} \approx \frac{t_P g}{\mu_K v_K \mu_0} K(\mu_K) \\ \frac{\partial f}{\partial t_P} &= \frac{1}{t_P} [\xi(\theta_K) - \xi(\theta_0)] \\ \frac{\partial f}{\partial v_K} &= \frac{1}{v_K} [\xi(\theta_0) - \xi(\theta_K)] \end{aligned}$$

将以上导数及(17.20)、(17.22)两式代入式(17.25),便得

$$\frac{\partial \theta_K}{\partial t_z} = \left\{ (\alpha_w - \alpha_H) \frac{t_P g K(\mu_K)}{2 v_K \mu_K} + \left( \alpha_w + \frac{1}{v_K} \frac{\partial v_K}{\partial t_z} \right) [\xi(\theta_0) - \xi(\theta_K)] \right\} \cos \theta_K \quad (17.26)$$

## 3. 对 $K$ 点坐标的修正

仿式(17.13)之推导,有

$$\frac{dy_K}{y_K} = \frac{dt_P}{t_P} + \frac{du_{\text{eff}}^*}{u_{\text{eff}}^*} + \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta_K) \frac{\partial \theta_K}{\partial t_z} dt_z$$

则 
$$\frac{\partial y_K}{\partial t_z} = \left[ \alpha_H - \alpha_w + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} (\theta_0 + \theta_K) \frac{\partial \theta_K}{\partial t_z} \right] y_K \quad (17.27)$$

对  $\Delta x_K$  可由式(17.15)计算求得。

### 17.2.3 低空风的层权

在计算风对主动段的影响时,曾设风速为常值。但在主动段内,风速的变化较大,那么,应取风速为何值呢?这个问题涉及到所谓层权的概念。很明显,如果将主动段等分成  $N$  段,那么,



相同的垂直风对各段弹道的影响程度是不一样的。可用某一系数来表示这种影响程度,现研究尾翼式火箭低空风的层权问题。如果对各段作用的垂直风是  $1 \text{ m/s}$ , 在第  $i$  段内作用的结果, 使主动段末端  $K$  点产生一个偏角  $\Delta\psi_{wi}^*$ 。而整个主动段内由  $1 \text{ m/s}$  的垂直风作用, 使  $K$  点产生的总偏角为  $\psi_{wK}^*$ , 则定义

$$q_{wi} = \frac{\Delta\psi_{wi}^*}{\psi_{wK}^*} \quad (17.28)$$

为低空风在该段内的层权。下面近似求  $q_{wi}$  的计算式。

由式(9.69), 忽略低速旋转影响时, 便得尾翼式火箭主动段的风偏近似为

$$\psi_{wK} = - \int_{u_0}^{u_K} k w_{\perp} \psi_{\phi_0}^*(u_n, u_K) du_n \quad (17.29)$$

如图 17.1 所示, 垂直风(例如横风)沿弹道弧长  $s$  的分布曲线是不规则的。可将主动段从  $s_0$  到  $s_K$  的区间等分为  $N$  段, 任取第  $i$  段, 其弹道弧长从  $s_{i-1}$  到  $s_i$ ; 在该段内, 可将风速取为常值  $w_{\perp i}$ , 那么由  $w_{\perp i}$  在弧段区间  $[s_{i-1}, s_i]$  内作用的结果, 便在  $K$  点产生偏角为

$$- \int_{u_{i-1}}^{u_i} k w_{\perp i} \psi_{\phi_0}^*(u_n, u_K) du_n$$

则主动段末的总偏角为

$$\psi_{wK} = - \sum_{i=1}^N \int_{u_{i-1}}^{u_i} k w_{\perp i} \psi_{\phi_0}^*(u_n, u_K) du_n \quad (17.30)$$

其实, 上式正是式(17.29)分段积分之和。

取式(17.29)中的风速为一常值风速, 它等效于实际变化的风速(图 17.1)对主动段的影响, 仍以  $w_{\perp}$  记之, 此为低空弹道风, 于是可从式(17.29)的积分号内提出来。并考感到式(17.29)与式(17.30)相等时, 则低空弹道风为

$$w_{\perp} = \frac{- \sum_{i=1}^N w_{\perp i} \int_{u_{i-1}}^{u_i} k \psi_{\phi_0}^*(u_n, u_K) du_n}{- \int_{u_0}^{u_K} k \psi_{\phi_0}^*(u_n, u_K) du_n} \quad (17.31)$$

显然, 上式分子中的积分

$$- \int_{u_{i-1}}^{u_i} k \psi_{\phi_0}^*(u_n, u_K) du_n$$

正是式(17.28)的  $\Delta\psi_{wi}^*$ , 且

$$\Delta\psi_{wi}^* = - \int_{u_{i-1}}^{u_K} k \psi_{\phi_0}^*(u_n, u_K) du_n + \int_{u_i}^{u_K} k \psi_{\phi_0}^*(u_n, u_K) du_n =$$

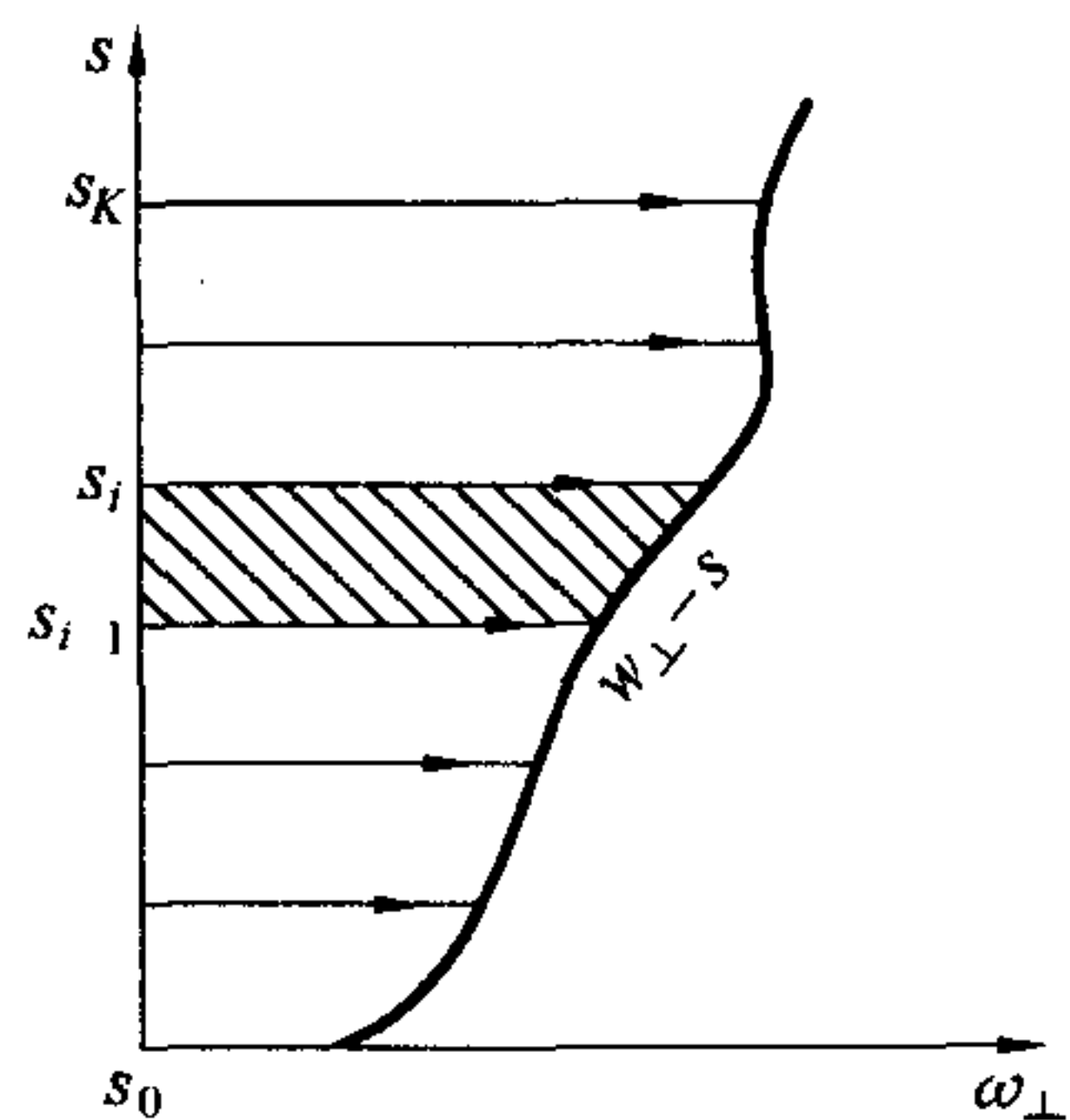


图 17.1 实测  $w_{\perp} - s$  曲线



$$\psi_w^*(u_{i-1}, u_K) - \psi_w^*(u_i, u_K) \quad (17.32)$$

分母正是  $\psi_{wK}^*(u_0, u_K)$ 。可见

$$q_{wi} = \frac{\psi_w^*(u_{i-1}, u_K) - \psi_w^*(u_i, u_K)}{\psi_{wK}^*(u_0, u_K)} \quad (17.33)$$

利用式(7.120)、(7.74),并取  $C_3 \approx 1$ ,上式写为

$$q_{wi} = \frac{\frac{1}{v_{i-1}} - \frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_i} B_R(u_i, u_K) - \frac{1}{v_{i-1}} B_R(u_{i-1}, u_K)}{\frac{1}{v_0} [1 - B_R(u_0, u_K)] - \frac{1}{v_K}} \quad (17.34)$$

则低空弹道风为

$$w_{\perp} = \sum_{i=1}^N q_{wi} w_{\perp i} \quad (17.35)$$

涡轮式火箭弹低空弹道风的层权,可运用以上思路重新推导,这里不予赘述。

### 17.3 被动段的修正系数

在弹道被动段,应对下列弹道条件和气象条件进行修正,即  $K$  点  $v_K$  和  $\theta_K$ ,被动段弹量  $m_K$ ,气压、气温、纵风和横风。其中,横风引起侧偏,其余都影响射程。诸修正系数一般应利用第八章的方程组以求差法得到。在枪炮外弹道学中,对普通火炮弹道的修正计算已有详细推导,而且对诸修正系数建立了表格,列于“地面火炮外弹道表”第二部分。在一般对修正量要求不很准确的情况下(比如散布估算与分析),火箭外弹道的修正量计算,可以借鉴于地炮修正系数:

$Q_{v_0} = \frac{\partial X}{\partial v_0}$ ——火炮初速变化 1 m/s 时的射程变化量;

$Q_{\frac{\delta c}{c}} = \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| \frac{c}{100}$ ——弹道系数变化  $\frac{1}{100}$  (即  $\Delta c = \frac{c}{100}$ ) 或气压变化  $\frac{1}{100}$  (即  $\Delta p_0 = \frac{p_0}{100}$ ) 时的射程变化量;

$Q_{\theta_0} = \frac{\partial X}{\partial \theta_0}$ ——射角变化 1' 时的火炮射程变化量;

$Q_{w_x}$ ——纵风为 1 m/s 时的火炮射程变化量;

$Q_{w_z}$ ——横风为 1 m/s 时的落点侧偏;

$Q_{\tau}$ ——气温变化 1℃ 时的射程变化量。

至于气压修正系数为什么与弹道系数修正系数相同,从式(1.52)便不难理解。以上修正系数,都是由决定地炮弹道的三个参量  $c$ 、 $v_0$ 、 $\theta_0$  编表的。对火箭被动段,则可用  $c^* [= c_K H(y_K)]$ 、 $v_K$ 、 $\theta_K$  查取。

在被动段内宜计算下列因素的变化所引起的弹道落点偏差量。





### 1. 弹量变化

由于  $c_K = \frac{id^2}{m_K} \times 10^3$ , 则

$$\frac{\Delta c_K}{c_K} = - \frac{\Delta m_K}{m_K}$$

于是得射程修正量为

$$\Delta X_m = \frac{\partial X}{\partial c_K} \Delta c_K = - \frac{\partial X}{\partial c_K} c_K \frac{\Delta m_K}{m_K} = \left| \frac{\partial X}{\partial c_K} \right| c_K \frac{\Delta m_K}{m_K}$$

由于

$$Q_{\delta c} = \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| \frac{c}{100}$$

则

$$\Delta X_m = 100 Q_{\delta c} \frac{\Delta m_K}{m_K} \quad (17.36)$$

可见由于弹量增加,使被动段弹道系数减小,射程增加。

### 2. $v_K$ 变化

由  $v_K$  的增量  $\Delta v_K$  必将使射程增加,并且

$$\Delta X_{v_K} = \frac{\partial X}{\partial v_K} \Delta v_K \approx Q_{v_0} \Delta v_K \quad (17.37)$$

### 3. $\theta_K$ 变化

在最大射程角以内,  $\theta_K$  增大,射程增加;  $\theta_K$  大于最大射程角时,  $\theta_K$  增大,射程将减小;在最大射程角附近,  $\theta_K$  的增量对射程的影响甚微。因此,  $Q_{\theta_0}$  将有正负之别。由  $\Delta \theta_K$  引起的射程增量为

$$\Delta X_{\theta_K} = Q_{\theta_0} \Delta \theta_K \quad (17.38)$$

式中,  $\Delta \theta_K$  的单位是分。

### 4. 气压变化

$$\Delta X_h = \frac{\partial X}{\partial h} \Delta p_0 = - 100 Q_{\delta c} \frac{\Delta p_0}{p_0} \quad (17.39)$$

气压增加,使空气阻力加大,故使射程减小。

### 5. 气温变化

空气温度对射程影响较复杂。温度增加使空气密度减小;而温度增加使声速增加,马赫数改变。阻力系数  $C_x(Ma)$  曲线上升段是马赫数的增函数,在下降段是马赫数的减函数。因此,空气温度对射程的影响之修正系数的正负号,将依具体情况而定,很难直观判断。射程修正量为

$$\Delta X_\tau = Q_\tau \Delta \tau_B \quad (17.40)$$

式中,  $\Delta \tau_B$  应取全弹道的某一平均偏差量。



## 6. 风

纵风是顺风时,使被动段射程增加;是逆风时,射程减小。横风产生顺风向的侧向偏移量。由纵风  $w_x$  和横风  $w_z$  在被动段形成的落点射程偏差量及侧偏分别为

$$\begin{cases} \Delta X_{w_x} = Q_{w_x} w_x \\ Z_{w_z} = Q_{w_z} w_z \end{cases} \quad (17.41)$$

在被动段内,风速和气温都是沿高度而变化的。为了求出等效于实际风速及气温作用的平均值,也需要将被动段分段。不过是沿高度划分,一般从地面到顶点  $S$  将弹道等分成  $N$  层,如图 17.2 所示。每一层的高度为  $\Delta y = Y/N$ 。所谓层权,就是用以表示某层高度的实际风或实际温度对全弹道影响量的百分数,可以用弹道方程组准确求得。但在实际上常采用较简便的近似层权。实践表明,上述影响量的百分数,近似与弹箭通过该层的飞行时间与全飞行时间的比值相等;而这个比值在弹道学中称为弹箭通过该层的相对停留时间。实际应用上,常取真空情况下的相对停留时间作为求弹道平均值的近似层权。下面求此近似层权。

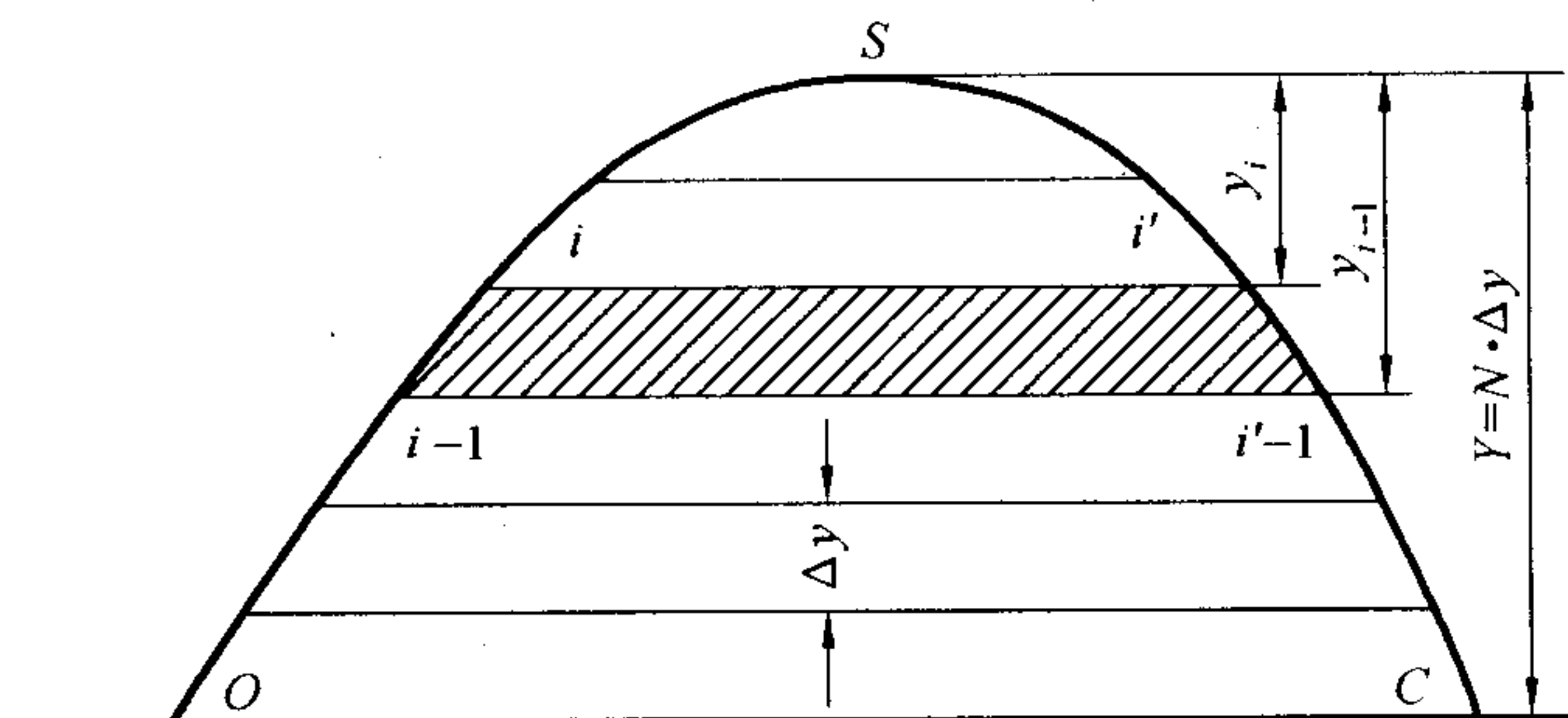


图 17.2 弹道分层

假设某一真空弹道高与真实弹道高  $Y$  相等。由于弹箭由射出点  $O$  (由虚速法,此即虚射出点  $\tilde{o}$ ,见图 3.2) 飞行到  $S$  的时间  $t_s$  与由顶点下落到落点  $C$  的时间相等。又由自由落体公式

$$Y = \frac{1}{2} g t_s^2$$

知道,弹道高  $Y$  与全飞行时间  $T$  的关系为

$$Y = \frac{1}{8} g T^2, \text{ 或 } T = \sqrt{\frac{8}{g} Y}$$

假如弹箭由  $(i-1)$  点抛射出,飞行顶点  $S$  又回到  $(i'-1)$  点,  $(i'-1)$  点与  $(i-1)$  点处同一水平面,故  $(i'-1)$  被视为落点,  $(i-1)$  点为射出点,则弹箭沿弹道  $(i-1)S(i'-1)$  的飞行时间为

$$T_{i-1} = \sqrt{\frac{8}{g} y_{i-1}}$$



同样,对于  $i$  点到  $i'$  点有

$$T_i = \sqrt{\frac{8}{g} y_i}$$

这样就可以求出弹箭在第  $i$  层中的相对停留时间,即近似层权为

$$q_i = \frac{T_{i-1} - T_i}{T} = \frac{\sqrt{y_{i-1}} - \sqrt{y_i}}{\sqrt{Y}}$$

因为

$$\begin{cases} y_{i-1} = [N - (i - 1)]\Delta y \\ y_i = (N - i)\Delta y \\ Y = N\Delta y \end{cases}$$

故

$$q_i = \frac{\sqrt{N - i + 1} - \sqrt{N - i}}{\sqrt{N}} \quad (17.42)$$

表 17.2 是由上式得到的分成 1 ~ 10 层的近似层权。

表 17.2 近似层权

$i \backslash N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.00	0.29	0.18	0.13	0.11	0.09	0.07	0.06	0.05	0.05
2		0.71	0.24	0.16	0.12	0.10	0.08	0.07	0.06	0.06
3			0.58	0.21	0.14	0.11	0.09	0.08	0.07	0.06
4				0.50	0.19	0.13	0.10	0.08	0.07	0.06
5					0.44	0.17	0.12	0.09	0.08	0.07
6						0.40	0.16	0.12	0.09	0.07
7							0.38	0.15	0.11	0.08
8								0.35	0.14	0.10
9									0.33	0.13
10										0.32
$\Sigma$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

由表可见,层权是上大下小,最高一层的速度最小,相对停留的时间最长,故层权最大。如知道相应于各层的风速和气温,则弹道风速和弹道气温的偏差量为

$$\begin{cases} w_x = \sum_{i=1}^N q_i w_{xi} \\ w_z = \sum_{i=1}^N q_i w_{zi} \\ \Delta \tau_B = \sum_{i=1}^N q_i \Delta \tau_i \end{cases} \quad (17.43)$$





## 17.4 偏流简介

偏流是重力引起的绕心运动所形成的质心偏移量。重力矩在半约束期内所形成的起始扰动,摆动角速度是向下的,此外还有起始偏角和起始摆动角,致使  $K$  点速度方向有一个偏角。就涡轮式火箭弹而论, $K$  点速度方向偏向左下方,如图 17.3 所示。此偏角叫做倾离偏角。对尾翼式火箭弹,主动段末的倾离偏角基本偏向下方。

当火箭弹飞出炮口以后,由于重力的作用使速度  $v$  的方向逐渐向下转动,而重力却不能直接使弹轴转动,便产生了攻角。当攻角出现后,涡轮式火箭弹相应产生翻转力矩,使弹顶向上转动;因为陀螺效应,故弹顶向右(右旋弹)上方转动。弹轴在弹道坐标系内的运动情况可参阅图 17.4。也可把此攻角称为主动段内的动力平衡角。由于攻角出现后,相应产生偏角,偏角方向沿右上方,如图 17.5 所示。

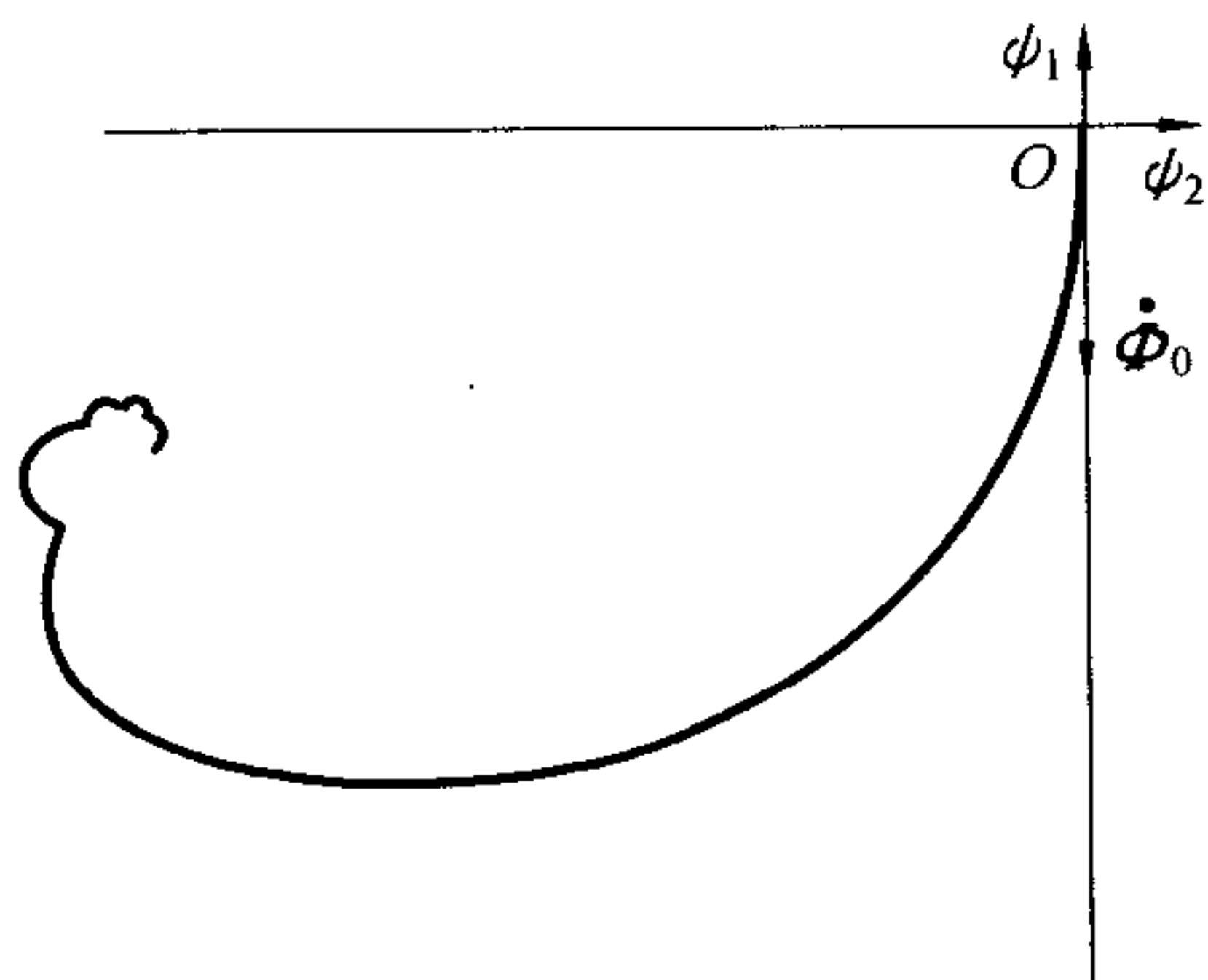


图 17.3 倾离偏角

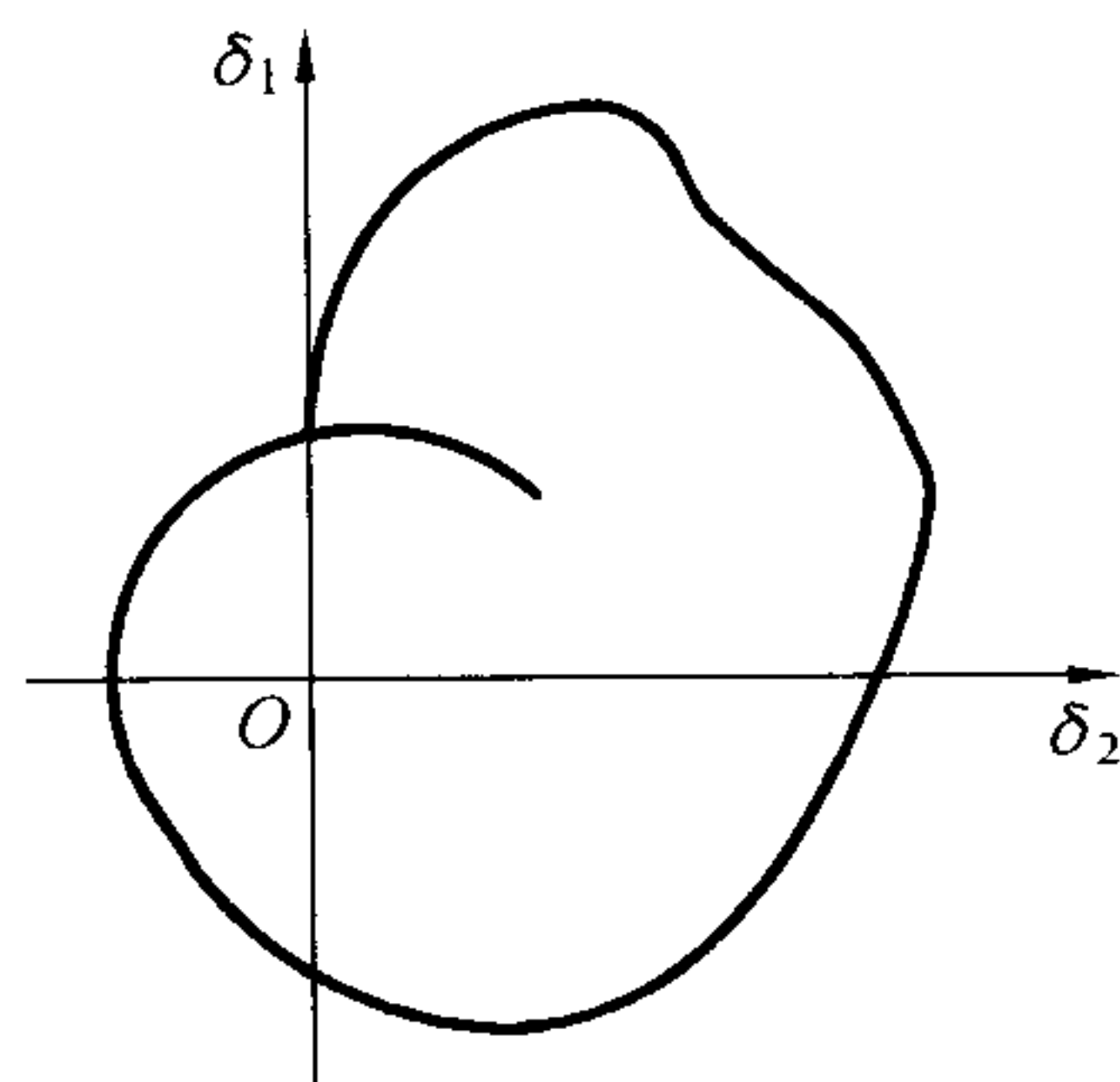


图 17.4 主动段内重力引起的攻角

就涡轮式火箭弹而言,通常倾离偏角的实部绝对值小于主动段内重力攻角引起偏角的实部;而倾离偏角的虚部绝对值,通常大于后者的虚部,故二者合起来,在主动段末的总重力偏角偏向左上方,这个偏角叫做固定偏角(定偏)。它的两部分都与  $\cos\theta_0$  成正比(对倾离偏角已有公式可查;对主动段内的重力偏角还未建立公式,但可想到此偏角是与重力法向分量成正比的),故在水平面上的投影与射角无关。

就尾翼式火箭弹而言,即使有低速旋转,主动段内的重力偏角侧向分量也是很小的,可以不计,只是在被动段需要考虑。

涡轮式火箭弹(右旋)被动段内的动力平衡角大致指向右方,故将产生相应的升力使质心向右偏移,那么,落点偏向右

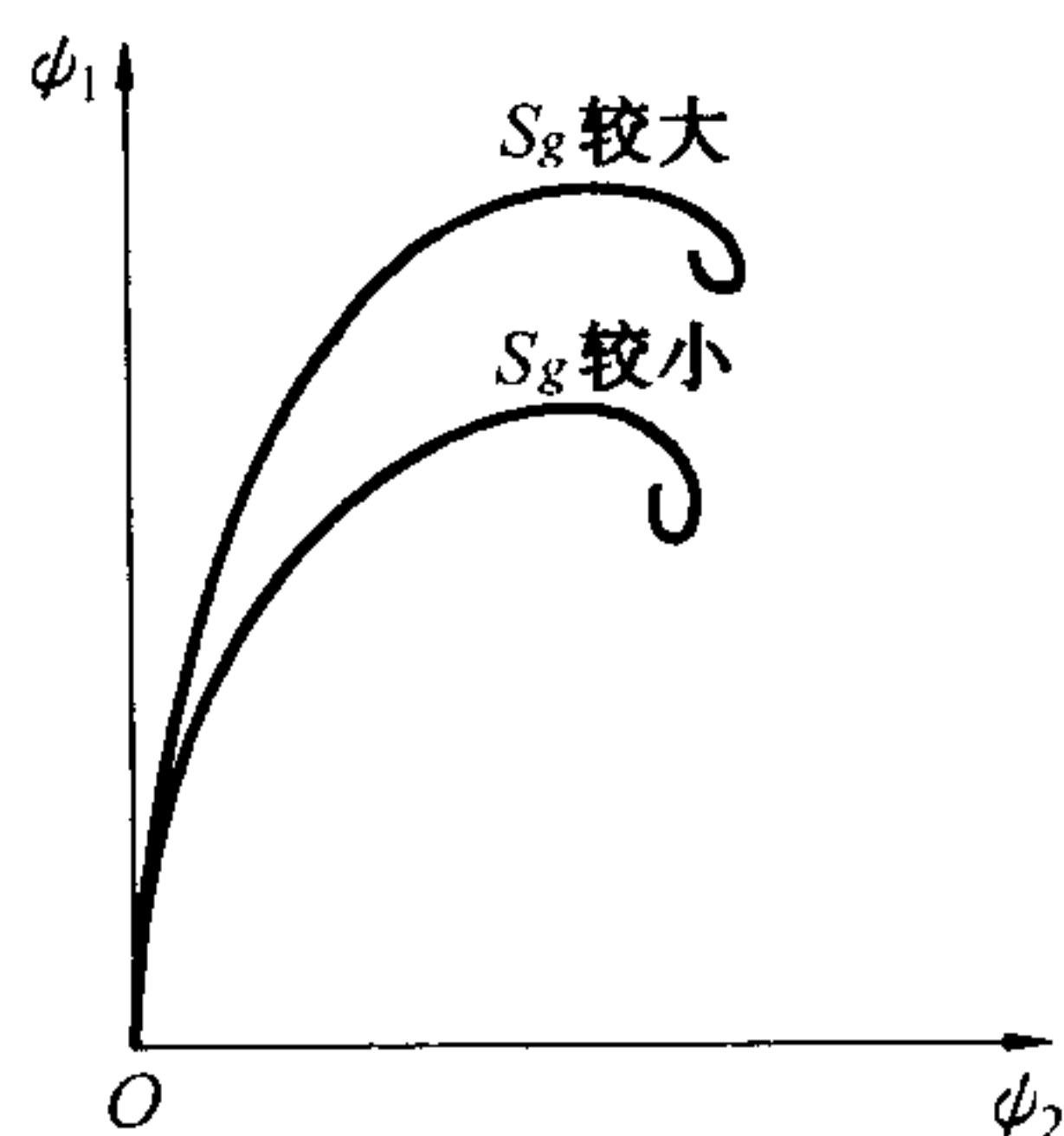


图 17.5 主动段内与重力攻角相应的偏角



方。而且,射角越大,动力平衡角亦将越大,偏流就会越大。尾翼式旋转火箭弹在被动段内的动力平衡角偏左,故偏流也是向左的。

涡轮式火箭弹落点偏流的方向,将取决于主动段与被动段内偏流的合成方向。一般而言,在小射角时偏左,射角较大时偏右,其间必存在无偏射角。

## 17.5 火箭射表编制的基本原则

### 17.5.1 射表的内容

射表是保证进行有效射击的基本文件。一般火箭射表的内容主要分为基本诸元、修正诸元和散布诸元三部分;此外还述及弹药、引信、火箭炮以及射表编制等有关的知识。所谓基本诸元,是指射程  $X$ 、射角  $\theta_0$ 、弹道高  $Y$ 、飞行时间  $T$ 、落速  $v_c$  和落角  $\theta_c$ 。其中弹道高作为计算弹道风、弹道温度等分层的参考,以及用来判断超越障碍进行射击的可能性;飞行时间用来计算对活动目标射击时的提前量与确定空炸引信的时间;落速用以估算落点动能和弹箭所具有的穿透力;落角作为发生跳弹和进行跳弹射击时的参考之用。在射表中,常常没有射角  $\theta_0$ ,而是瞄准角或高角,以  $\alpha$  表示,它与其他有关角度间的关系示于图 17.6 中。

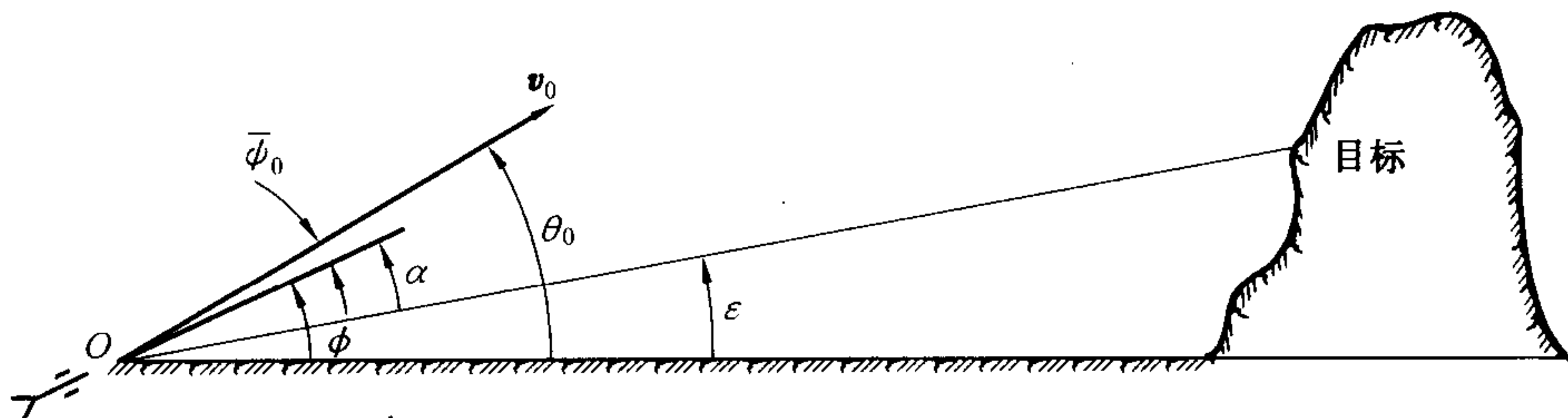


图 17.6 射角与其他角度的关系

图中的  $\varepsilon$  是炮目高低角,  $\phi$  是定向器仰角;  $\bar{\phi}_0$  是平均起始偏角,它主要来源于半约束期内火箭在重力作用下的倾离作用(见第十一章 11.5 节),及滑轨的弯曲变形,  $\bar{\phi}_0$  多为负值。地面射表最基本的关系是瞄准角  $\alpha$  (在高低角  $\varepsilon = 0$  时) 与射程  $X$  间的关系。射表中的修正诸元包括某些弹道条件和气象条件非标准值的修正量,以便实际射击时将射表中的标准条件下的射程换算为非标准条件下的射程,同时修正射向。至于散布诸元,即距离和方向概率误差等,用以估计摧毁目标所需弹药量,以及作为实战试射的参考。典型的射表格式见表 17.3。射表的形式和内容依火箭的具体类型而异。比如尾翼式野战火箭只计及主动段内的横风所引起的方向偏差,纵风只引起距离偏差。对远程火箭则要考虑柯里奥利加速度的影响,以及因重力加速度随地理纬度的变化所引起的射程偏差量。



表 17.3 典型的火箭射表格式之一

射 距 离			$X$	m
表 尺			$\Pi$	mil
高角变化—密位距离改变量			$\Delta X_a$	m
窄 夹 叉 ( $4B_x$ )			$B$	mil
概率误差	距 离		$Bx$	m
	方 向		$Bz$	m
主动段终点的高度			$\gamma_K$	m
方向修正量	主动段横风速度 10 m/s		$\Delta Z_{W_{za}}$	mil
	主动段纵风速度 10 m/s		$\Delta Z_{W_{xa}}$	mil
表尺修正量	主动段纵风速度 10 m/s		$\Delta \Pi_{W_{xa}}$	mil
	主动段横风速度 10 m/s		$\Delta \Pi_{W_{za}}$	mil
方向修正量	主动段横风速度 10 m/s		$\Delta Z_{W_{zb}}$	mil
	偏 离		$\Delta Z_g$	mil
距离修正量	被动段纵风速度 10 m/s		$\Delta X_{W_{xb}}$	m
	弹 道 气 温 10 ℃		$\Delta X_r$	m
	地 面 气 压 10 hPa		$\Delta X_h$	m
	药温 10℃	偏差量为负	$\Delta X_{t_z}$	m
		偏差量为正		m
高 角			$\alpha$	°'
落 角			$ \theta_C $	°'
落 速			$v_C$	m/s
飞 行 时 间			$T$	s
最 大 弹 道 高			$Y$	m
射 距 离			$X$	m

[注] 有的射表中的气压仍以 mmHg 为单位,其换算关系为:10 hPa  $\approx$  7.5 mmHg





### 17.5.2 试验数据

射表是射击试验与弹道计算相结合的产物。射击试验的目的,在于校正弹道方程中的某些重要参量。其中影响最大的力是火箭推力和空气阻力,通过对射程及某些弹道诸元的测量确定,可以将它们校准。此外,对升力、静力矩以及偏流、密集度等等,都需要进行试验予以校正。为节省人力、物力,射表射击试验应尽量结合研制过程中的工厂试验、定型试验以及其他单项测试,在综合整理诸测试数据的基础上,再进行补充试验。所需测试数据有下列各类。

#### 1. 弹、炮参数

- (1) 火箭弹体:弹径,弹量,弹长,药量,质心位置,转动惯量,定心部位置,动、静不平衡度。
- (2) 火箭炮:滑轨长度及其在火箭重力作用下的仰角变化,滑轨波纹度,膛内椭圆度。
- (3) 火箭发动机:推力时间曲线,推力偏心,喷气导转力矩曲线。
- (4) 空气动力和力矩系数:  $C_x(\delta, Ma)$ ,  $C'_y(\delta, Ma)$ ,  $m'_z(\delta, Ma)$ , ...

#### 2. 气象数据

气温、气压、风速、风向从地面到高空的实际分布,空气湿度。

#### 3. 地形及重力加速度

试验场的炮目高差,当地的重力加速度。

#### 4. 飞行试验数据

试验射角选取最大射程角和最小射程角,并于其间加入一两个射角。每个射角的射击宜分组进行,这样可减小当日系统误差。比如阵风大小随平均风速而异,射击时的平均风速不同,概率误差亦将不同。试验以常温为主,适当做高温和低温试验。在不影响飞行性能的前提下,应尽量多测一些所需的数据,计有:

炮口数据 ——  $v_0, \theta_0$ , 起始扰动;

主动段终点数据 ——  $x_K, y_K, v_K, \theta_K, t_K$ ;

落点数据 ——  $X, Y, T, B_X, B_Z$ ;

跟踪数据 —— 转速、坐标及速度随时间的变化规律。

### 17.5.3 符合计算

经典的符合计算是指利用射击试验测得的射程反求弹道系数,符合出来的弹道系数将受到两方面的影响,一是攻角的实际存在,二是阻力定律与该弹箭的阻力系数不完全相似。当今射表编制过程已经不用阻力定律,直接获取弹箭自身的阻力系数及其他气动数据;弹道模型在第八章已具体给出,火箭主动段应采用6自由度刚体弹道模型,被动段可做简化(弹轴摆动角加速度可取为零)。为了使地面所测推力曲线符合实际飞行状态,可将推力乘以系数  $K_P$ ,以保证主动段末端速度  $v_K$  的计算值与实测值相等。将阻力系数乘以  $K_D$ ,使射程计算值与实测值相等。火箭被动段偏流是由动力平衡角  $\delta_{2P}$  产生升力使弹质心侧向偏移,由式(13.60)看出,  $\delta_{2P}$



与  $C'_y$  成反比,而偏流与升力成正比,从而偏流与  $C'_y$  关系甚微,对偏流应对翻转力矩乘以符合系数  $K_M$ ,以体现式(13.60)具有明显影响的  $l_d$ 。此外,将平均起始偏角乘以  $K_{\psi_0}$ ,以符合实测的  $\theta_K$  与计算值一致。符合计算所用方程中的非标准条件,必须与射击时的实际条件一致,况且须用当地的重力加速度值。对  $K_P$  和  $K_D$ ,拟着重于最大射程角时的符合值,因为这可忽略射角  $\theta_0$  的误差所造成的不利影响。

值得注意的是,所有测试数据必须满足精度要求,否则,将会把较大的测试误差带进符合系数中去,这就失去了符合计算的意义。现有弹道诸元的测量主要采用测速雷达和坐标雷达,测量值与弹道模型的计算值能科学地结合起来,卡尔曼(Kalman)滤波就是最好的办法之一。不宜单一地做参数符合计算,利用参数辨识方法可以综合确定所需要的一组参数,在文献[4]、[5]、[11]中便有类似的实例。

#### 17.5.4 射表编拟及计算

当确定出合适的  $K_P$ 、 $K_D$ 、 $\dots$  等符合系数之后,以表定的弹、炮数据,标准气象条件和标准重力加速度,采用符合计算中所用到的弹道模型,计算出射表基本诸元。计算被动段扰动弹道时,一般气温、气压、风速等偏差量,与普通地面炮射表一样处理。高温和低温是编拟修正量表,还是各编独立射表,要根据使用需要和方便来确定。对于大型火箭,因为射击量少,落点概率误差往往难以确定。这需要对型号研制过程中的密集度估算和射击数据进行合理的综合,并参照一般落点概率误差随射角的变化规律来编拟。

## 主要符号汇编

$A$	赤道转动惯量, $A = J_y = J_z$
$A_1, A_2, A_3$	三圆运动的三个幅值的复数形式, 见式(13.44)
$A(U)$	西亚切主要函数, 见式(3.27)
$A(\omega)$	幅频特性, 见式(15.42)
$A_R$	火箭绕过后定心部中心 $R$ 之横轴的转动惯量, 见式(11.3)
$a$	火箭质心加速度, 见式(1.54)
$\bar{a}$	火箭质心加速度平均值
$a_c$	柯里奥利加速度, 见式(1.56)
$a_n$	导弹法向加速度, 见式(5.13)
$a_P$	推力加速度, $a_P = F_P/m$ , 见式(1.14)
$a_{Rn}$	火箭后定心部横向加速度, 见图 11.1
$a_x$	空气阻力加速度, 见式(1.44)
$B$	弹轴与单位球面交点, 见图 8.14
$B(y_0, y)$	函数, $B(y_0, y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{2y} \sqrt{\frac{y_0}{y}} \exp[i(y - y_0)] dy$
$B_R, B_I$	函数 $B(y_0, y)$ 的实部和虚部
$b$	阻尼系数, 见式(7.44)
$C$	极转动惯量, $C = J_x$
$C_1$	动量矩示性数, 见式(4.9)
$C_2$	能量示性数, 见式(4.12)
$C_m$	弹体密度系数, 见式(1.45)
$C'_S$	诱导侧向力系数导数, 见式(8.159)
$C_x$	阻力系数, 见式(7.5)、(14.33)、(14.37)
$C_{xon}(Ma)$	攻角为零时标准弹的阻力系数, 见式(1.43)
$C_y$	升力系数, 见式(7.2)、(7.6)、(14.38)
$C'_y$ 或 $C_y^\alpha$	升力系数导数, 见式(7.6)、(14.39)
$C_z$	侧力系数, 见式(14.40)





$C_z^\beta$	侧力系数导数, 见式(14.40)
$C_{zm}$	马格努斯力系数, 见式(8.155)
$C''_{zm}$	马格努斯力系数二次导数, 见式(8.156)
$c$	弹道系数, 见式(1.42)
$c_K$	火箭弹道被动段弹道系数, 见式(1.62)①
$D$	微分算子, $D = \frac{d}{ds}$ 或 $D = \frac{d}{du}$
$D(U)$	西亚切主要函数, 见式(3.25)
$d$	弹径
$d^*$	涡轮式火箭喷管喉部中心所在圆直径, 见图 8.7
$d_1, d_2$	自由运动阻尼指数, 见式(13.23)、(13.24)
$B(\phi)$ 或 $B_\phi$	随机变量 $\phi$ 的中间误差(概率误差)
$e$	椭圆弹道偏心率, 见式(4.16)
$2e_1$	弹体定心部与炮管的配合间隙
$\exp(\omega)$	指数函数, $\exp(\omega) = e^\omega$
$F$	力的通用符号
$F_C$	柯里奥利惯性力, 见式(8.109)
$F_P$	火箭推力, 见式(1.6)
$F'_P$	喷气反作用力, 见式(1.4)
$F(v_\tau)$	阻力函数, 见式(1.51)
$f$	力矩等效力, 见式(8.147)
$f_0, f_1, \dots, f_6$	西亚切辅助函数, 见式(3.35)
$G$	弹体重力
$G_1$	地心引力, 见图 1.4
$g$	重力加速度, 见式(1.17)、(1.20)
$g_0$	地球表面(海平面)上的重力加速度, 见式(1.19)
$g_{on}$	重力加速度的地面标准值
$H$	哈密尔顿函数, 见式(16.53)
$H$	增程弹增速段起点, 见图 2.2
$H(\gamma)$	空气密度函数, 见式(1.36)
$h$	位势高度, 见式(1.27)
$h_\Gamma$	弹头弧形部长度, 见图 1.9



$I_1$	比冲量, 见式(1.13)
$I(U)$	西亚切主要函数, 见式(3.27)
$i$	弹形系数, 见式(1.41)
$J$	指标函数, 见式(16.12)、(16.42)
$\mathbf{J}$	转动惯量矩阵, 见式(8.46)、(14.17)
$[\mathbf{K}]$	动量矩矩阵, 见式(8.44)
$K$	主动段终点, 见图 0.1
$K_1(\mu)$	函数, 见式(2.31)
$K_2(\mu)$	函数, 见式(2.25)
$K_X$	直射距离计算所用的系数, 见式(3.39)
$k_\Lambda$	克列罗系数, 见式(1.19)
$L$	推力线偏心, 见图 7.7
$L$	拉格朗日函数, 见式(16.54)
$L(v)$	函数, 见式(2.18)
$L_m$	质量偏心, 见图 7.32
$l$	全弹长
$l_B$	火箭前后定心部间的距离
$l_d$	阻力中心到弹体质心的距离
$l_L$	喷喉到火箭质心的距离, 见式(7.102)、(14.34)
$l_R$	火箭后定心部中心到质心的距离
$M$	复力矩, 见式(8.157)
$Ma$	马赫数
$M_G$	空气陀螺力矩, 见式(8.177)
$M_P$	推力偏心矩, 见式(7.13)
$M_{Pc}$	控制力矩, 见式(14.34)
$M_{r0}$	非周期性诱导滚转力矩, 见式(8.176)
$M_{rc}$	周期性诱导滚转力矩, 见式(8.175)
$M_S$	诱导侧向力矩, 见式(8.66)
$M_{xP}$	喷管导转力矩, 见式(8.66)
$M_{xw}$	尾翼导转力矩, 见式(8.76)、(8.104)
$M_{xd}$	极阻尼力矩, 见式(8.78)、(8.105)
$M_y$	马格努斯力矩, 见式(8.81)、(8.106)



$M_z$	静力矩, 见式(8.73)、(8.99)
$M_{zd}$	赤道阻尼力矩, 见式(8.74)、(8.102)
$M_{\delta}$	下洗延迟力矩, 见式(8.180)
$m$	弹体质量
$m''_G$	空气陀螺力矩系数二次导数, 见式(8.179)
$m_P$	推进剂质量
$m_{r0}$	非周期性诱导滚转力矩系数, 见式(8.176)
$m_{rc}$	周期性诱导滚转力矩系数, 见式(8.175)
$m'_S$	诱导侧向力矩系数导数, 见式(8.172)
$m_{x_1}$	滚动力矩系数, 见式(14.39)
$m_{zw}$	尾翼导转力矩系数, 见式(8.77)
$m_{xd}$	极阻尼力矩系数, 见式(8.79)
$m_y$	马格努斯力矩系数, 见式(8.82)
$m'_y$	马格努斯力矩系数导数, 见式(8.83)
$m''_y$	马格努斯力矩系数二阶导数, 见式(8.85)
$m_{y_1}$	偏航力矩系数, 见式(14.43)
$m_z$	静力矩系数, 见式(8.73)
$m_{z_l}$	俯仰力矩系数, 见式(14.41)
$m'_z$	静力矩系数导数, $m'_z = \frac{\partial m_z}{\partial \delta}$
$m_{z_1}^\alpha$	俯仰力矩系数静导数, $m_{z_1}^\alpha = \frac{\partial m_{z_1}}{\partial \alpha}$
$m_{zd}$	赤道阻尼力矩系数, 见式(8.75)
$m'_{zd}$	赤道阻尼力矩系数导数, 见式(8.75)
$\dot{m}_{z_1}^\omega, \dot{m}_{z_1}^\alpha$	俯仰阻尼导数, 见式(14.42)
$m_{z_l}^\delta$	俯仰操纵效率, 见式(14.42)
$\bar{m}_{z_l}^\delta$	俯仰操纵阻尼导数, 见式(14.42)
$m_{\delta}$	下洗延迟力矩系数, 见式(8.181)
$m'_{\delta}$	下洗延迟力矩系数导数, 见式(8.181)
$N$	推力和气动力的合力





$n$	转动惯量比, 见式(9.16)
$\mathbf{n}$	过载矢量, 见式(14.49)
$n_w$	尾翼片数
$n_{\lambda_1}$	尾翼式旋转火箭一个波长内的自转周数, 见式(9.47)
$n_{\lambda_2}$	涡轮式火箭一个波长 $\lambda_2$ 内的自转周数, 见式(10.27)
$O$	射出点, 见图 0.1
$o$	弹道起点
$\tilde{o}$	虚射出点, 见图 3.2
$p$	大气压力, 见式(1.22)
$p_v$	空气中的水蒸气分压
$Q_{v_0}$	初速变化 1 m/s 时的射程变化
$Q_{\frac{\delta c}{c}}$	弹道系数变化 1% 时的射程变化
$Q_{w_x}$	纵风 1 m/s 时的射程变化
$Q_{w_z}$	横风 1 m/s 时的落点侧偏
$Q_{\theta_0}$	射角变化 1' 时的射程变化
$Q_\tau$	气温变化 1℃ 时的射程变化
$q$	视线角, 见图 5.4
$q_i$	被动段第 $i$ 层的层权, 见式(17.43)
$q_{wi}$	火箭主动段低空风在第 $i$ 层的层权, 见式(17.34)
$R$	通用气体常数, $R = 8.314\ 32 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kmol} \cdot \text{K})$
$R_a$	大气常数, 当 $g_0 = 9.806\ 65 \text{ m/s}^2$ 时, $R_a = 29.271\ 3 \text{ m/K}$
$R(v)$	函数, 见式(2.20)
$R_A$	赤道回转半径
$R_C$	极回转半径
$Re$	雷诺数
$R_L(u_0, u)$	函数, 见式(7.95)
$R_R$	绕火箭后定心部中心 $R$ 的横向回转半径
$R_S$	诱导侧向力, 见式(8.169)
$R_x$	空气阻力, 见式(1.39)、(7.1)、(8.91)、(14.32)
$R_y$	升力, 见式(7.2)、(8.94)、(14.32)
$R_z$	侧力, 见式(14.32)



$R_{Zm}$	马格努斯力, 见式(8.130)、(8.164)
$R_{\dot{\varphi}_0}(u_0, u)$	函数, 见式(7.68)
$r$	火箭到地心的距离
$r$	导弹到活动目标之间的距离
$r_0$	有效地球半径, 在北纬 $45^\circ 32' 33''$ 处的 $r_0 = 6\,356.766\text{ km}$
$r_E$	地球半径
$S$	弹体最大横断面积
$S$	弹道顶点
$S_C$	炮弹弹道全弧长
$S_d$	动稳定因子, 见式(13.29)
$S_e$	火箭喷管出口端面面积, 见图 1.2
$S_g$	陀螺稳定因子, 见式(13.21)
$s$	弹道任意点到给定起点的弹道弧长
$s^*$	虚拟炮口位置到实际炮口的距离, 见图 12.11
$s_0$	有效滑轨长度, 见式(7.79)
$s_{00}$	实际滑轨长度
$T$	热力学温度, $T = t + 273.15\text{ K}$
$T$	火箭全飞行时间
$T(U)$	西亚切主要函数, 见式(3.27)
$t$	弹丸飞达任意点的时间
$t$	摄氏温度
$t_F$	火箭前定心部脱离滑轨时的时间
$t_f$	导弹击中活动目标时的时间或导弹运动的终端时间
$t_P$	发动机工作时间
$t_z$	药温
$U$	假速度, 见式(3.22) 及图 3.3
$u$	控制变量, 见式(16.41)
$u$	无因次变量, 见式(7.32)
$u_1$	火箭发动机燃气相对于火箭体的喷射速度
$u_{\text{eff}}$	火箭发动机有效排气速度, 见式(1.8)
$u_{\text{eff}}^*$	代有效排气速度, 见式(2.16)
$v$	弹道任意点的弹体质心速度



$v_0$	初速, 见图 0.1
$\tilde{v}_0$	虚初速, 见图 3.2
$v_I, v_{II}$	分别为第一和第二宇宙速度
$v_C$	火箭落速
$v_K$	火箭在弹道 $K$ 点处速度, 即最大速度
$v_{KH}$	增程弹增速段增加的速度
$v_P$	不计阻力和重力时的火箭最大速度, 见式(17.23)
$v_r$	相对速度, 见式(8.8)、(8.9)
$v_T$	目标速度
$v_\tau$	虚速, 见式(1.48)
$W(p)$	传递函数
$\bar{w}$	风速平均值
$w_{//}$	平行风速, 平等 $v$ 的方向
$w_\perp$	垂直风速, 垂直 $v$ 的方向
$w_x$	纵风风速
$w_z$	横风风速
$X$	火箭全水平射程
$x$	火箭弹道任意点水平距离
$Y$	火箭弹道顶点高
$y$	火箭弹道任意点高度
$y_1$	弧长相对值, $y_1 = s/\lambda_1$
$y_2$	弧长相对值, $y_2 = 2/\lambda_2$
$y_g$	弹道起点处的海拔高度
$Z$	落点侧偏
$z$	火箭弹道任意点侧偏
$\alpha$	导弹冲角, 见图 14.4
$\alpha'$	射向角, 见图 8.13
$\alpha_{It}$	药温对火箭比冲量影响系数, 见式(17.18)
$\alpha_{ut}$	火药燃速的温度敏感系数, 见式(17.19)
$\alpha_w$	速度与相对速度之间的夹角, 见图 8.12
$\beta$	导弹侧滑角, 见图 14.4
$\beta(c, v_0, \theta_0)$	西亚切解法主要系数, 见式(3.38)





$\beta_D$	动不平衡角, 见式(8.158)
$\beta_P$	推力偏心角, 见图 7.7(a)
$\beta_R$	雷达坐标系方位角, 见图 6.9
$2\beta_X$	角射程, 见图 4.5
$\Gamma$	滚转角速度与速度之比值, 见式(9.7)
$\gamma$	火箭绕纵轴的滚转角
$\gamma_v$	导弹速度倾斜角, 见图 14.3
$\gamma_X, \gamma_Z$	落点距离及方向中间误差的相对值
$\Delta$	复攻角, 见式(8.149)
$\Delta^*$	攻角 $\Delta$ 的特征函数
$\Delta_L$	推力偏心矩引起的复攻角
$\Delta_M, \Delta_N$	气动偏心角
$\Delta_r$	相对复攻角
$\Delta_w$	风引起的复攻角
$\Delta_{\beta_D}$	动不平衡引起的复攻角
$\Delta_{\dot{\varphi}_0}, \Delta_{\dot{\varphi}_0}, \Delta_{\dot{\psi}_0}$	各起始扰动引起的复攻角
$\delta$	弹轴与速度矢量的夹角, 即攻角或章动角
$\delta_1, \delta_2$	攻角 $\Delta$ 的二分量
$\delta^*$	攻角 $\delta$ 的特征函数, 例如 $\delta_{\varphi_0}^*$ 表示 $\varphi_0 = 1$ rad 时的攻角
$\delta_L$	推力偏心矩引起的攻角, 见式(7.91)
$\delta_p$	导弹推力调节机构偏转角, 见图 14.9
$\delta_{1P}, \delta_{2P}$	动力平衡角二分量, 见式(13.53)、(13.54)
$\delta_r$	相对攻角, 见图 7.26
$\delta_w$	风引起的攻角
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	导弹副翼、方向舵和升降舵的偏转角
$\delta_{\dot{\varphi}_0}, \delta_{\dot{\varphi}_0}, \delta_{\dot{\psi}_0}$	相应于脚注的起始扰动引起的攻角
$E$	尾翼斜置角
$\epsilon$	喷管斜置角, 见图 8.7
$\epsilon$	遥控弹道跟踪线方位角, 见图 6.10
$\epsilon_I$	遥控弹道跟踪线超前瞄准线的角度, 即提前量, 见图 6.10
$\epsilon_T$	遥控弹道瞄准线方位角, 见图 6.10



$\eta$	椭圆弹道的极角, 见图 4.1
$\eta, \eta_T$	导弹、目标速度矢量与目标线之间的夹角, 即前置角, 见图 5.4
$\theta$	火箭弹道任意点切线倾角, 见图 0.1
$\theta_1$	速度方位角在铅垂面内的分量, 见图 8.2
$\theta_c$	火箭落角
$\theta_0$	射角, 见图 0.1
$\bar{\theta}_0$	虚射角, 见图 3.2
$\vartheta$	导弹俯仰角, 见图 14.5
$\kappa$	比热比, 见式(1.30)
$\Lambda$	地理纬度, 见图 1.4
$\Lambda_1$	地心纬度, 见图 1.4
$\lambda$	尾翼式不旋转火箭弹摆动波长, 见式(7.76)
$\lambda$	拉格朗日乘子, 见式(16.13)、(16.43)
$\lambda_1$	尾翼式旋转火箭弹摆动波长, 见式(9.39)
$\lambda_2$	涡轮式火箭弹章动波长, 见式(10.21)
$\mu$	火箭发动机排出推进剂的相对值, 见式(2.2)
$\nu$	参数, 见式(4.15)
$\xi$	导弹相对阻尼系数, 见式(15.41)
$\xi(\theta)$	函数, 见(2.24)
$\pi$	常数, $\pi = 3.141\ 592\ 6\cdots$
$\pi(\gamma)$	气压函数, 见式(1.34)
$\rho$	空气密度
$\sigma$	均方差, 见式(12.84)
$\sigma, \sigma_T$	导弹、目标速度矢量方向角, 见图 5.4
$\tau$	虚温, 见式(1.32)
$\Phi$	复摆动角, 见式(8.156)
$\Phi_0, \dot{\Phi}_0$	火箭后定心部离轨时的弹轴摆动角及摆动角速度
$\dot{\Phi}_L$	推力线偏心的等效起始扰动, 见式(9.54)、(10.33)
$\dot{\Phi}_{\beta_D}$	动不平衡的等效起始扰动, 见式(9.80)、(10.52)
$\varphi$	摆动角, 见式(7.24)
$\phi_1, \phi_2, \phi_3$	三圆运动的三个幅角, 见式(9.51)
$\phi'_1, \phi'_2$	自由运动(对 $s$ ) 的圆频率, 见式(13.23)、(13.24)



$\varphi_a$	弹轴方位角在铅垂面内的分量,即弹轴高低角,见图 8.6
$\Psi$	复偏角,见式(8.149)
$\Psi^*$	$\Psi$ 的特征函数
$\Psi_L$	推力偏心矩引起的复偏角
$\Psi_r$	相对复偏角,见式(10.37)
$\Psi_w$	风引起的复偏角,见式(10.44)
$\Psi_{\beta_D}$	动不平衡引起的复偏角,见式(9.83)、(10.51)
$\Psi_{\phi_0}$ 、 $\Psi_{\psi_0}$	各起始扰动引起的复偏角
$\psi$	偏角,见式(7.23)
$\psi_1$ 、 $\psi_2$	$\Psi$ 的二分量
$\psi^*$	偏角 $\psi$ 的特征函数
$\bar{\psi}$	偏角的平均值,见式(7.127)
$\psi_a$	导弹偏航角,见图 14.5
$\psi_g^*(u_0, u)$	函数,见式(7.133)
$\psi_L$	推力偏心矩引起的偏角,见式(7.96)
$\psi_{L_m}$	质量偏心 $L_m$ 引起的偏角,见式(7.142)
$\psi_v$	导弹弹道偏角,见图 14.2
$\psi_w^*$	垂直风引起的偏角特征函数,见式(7.120)
$\psi_{\beta_P}$	角推力偏心 $\beta_P$ 引起的偏角,见式(7.134)
$\psi_{\delta_M}$	气动偏心 $\delta_M$ 引起的偏角,见式(7.140)
$\psi_{\phi_0}$ 、 $\psi_{\psi_0}$ 、 $\psi_{\psi_0}$	各起始扰动引起的偏角,见第七章 7.4 节
$\Omega$	弹道坐标系 $o - x_2 y_2 z_2$ 的转动角速度矢量,见式(8.34)
$\Omega_E$	地球自转角速度,见图 1.4
$\omega$	频率,见式(15.30)
$\omega$	全弹的转动角速度矢量,见式(8.41)
$\omega_a$	弹轴坐标系 $o - \xi\eta\zeta$ 的转动角速度矢量,见式(8.40)
$\omega_a$	导弹固有频率,见式(15.43)



# 附表

附表1  $\tau$ - $\gamma$

$\gamma$	$\tau$	$\Delta$	$\gamma$	$\tau$	$\Delta$	$\gamma$	$\tau$	$\Delta$
0	288.9	-6	4000	263.6	-6	8000	238.3	-7
100	288.3	-7	100	263.0	-7	100	237.6	-6
200	287.6	-6	200	262.3	-6	200	237.0	-6
300	287.0	-6	300	261.7	-6	300	236.4	-6
400	286.4	-7	400	261.1	-7	400	235.8	-7
500	285.7	-6	500	260.4	-6	500	235.1	-6
600	285.1	-6	600	259.8	-7	600	234.5	-6
700	284.5	-6	700	259.1	-6	700	233.9	-7
800	283.9	-7	800	258.5	-6	800	233.2	-6
900	283.2	-6	900	257.9	-6	900	232.6	-6
1000	282.6	-6	5000	257.3	-7	9000	232.0	-7
100	282.0	-7	100	256.6	-6	100	231.3	-6
200	281.3	-6	200	256.0	-6	200	230.7	-7
300	280.7	-6	300	255.4	-7	300	230.0	-6
400	280.1	-7	400	254.7	-6	400	229.4	-6
500	279.4	-6	500	254.1	-6	500	228.8	-6
600	278.8	-6	600	253.5	-6	600	228.2	-6
700	278.2	-7	700	252.9	-7	700	227.6	-5
800	277.5	-6	800	252.2	-6	800	227.1	-5
900	276.9	-7	900	251.6	-7	900	226.6	-5
2000	276.2	-6	6000	250.9	-6	10000	226.1	-5
100	275.6	-7	100	250.3	-6	100	225.6	-4
200	274.9	-6	200	249.7	-7	200	225.2	-4
300	274.3	-6	300	249.0	-6	300	224.8	-4
400	273.7	-7	400	248.4	-7	400	224.4	-4
500	273.0	-6	500	247.7	-6	500	224.0	-3
600	272.4	-6	600	247.1	-7	600	223.7	-3
700	271.8	-6	700	246.4	-6	700	223.4	-3
800	271.2	-7	800	245.8	-6	800	223.1	-2
900	270.5	-6	900	245.2	-6	900	222.9	-2
3000	269.9	-6	7000	244.6	-7	11000	222.7	-2
100	269.3	-7	100	243.9	-6	100	222.5	-2
200	268.6	-6	200	243.3	-6	200	222.3	-2
300	268.0	-6	300	242.7	-6	300	222.1	-1
400	267.4	-7	400	242.1	-7	400	222.0	-2
500	266.7	-6	500	241.4	-6	500	221.8	-1
600	266.1	-6	600	240.8	-7	600	221.7	-1
700	265.5	-6	700	240.1	-6	700	221.6	0
800	264.9	-7	800	239.5	-6	800	221.6	-1
900	264.2	-6	900	238.9	-6	900	221.5	0
4000	263.6	-6	8000	238.3	-7	12000	221.5	

附表 2  $\pi(y) = \frac{p(y)}{p_{0n}} = \exp\left(-\frac{1}{R_1} \int_0^y \frac{dy}{\tau}\right)$ 

y	000	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	1.0000	0.9882	0.9766	0.9650	0.9536	0.9423	0.9311	0.9200	0.9090	0.8981
1000	0.8873	0.876	0.8661	0.8556	0.8452	0.8350	0.8428	0.8147	0.8047	0.7949
2000	0.7852	0.7755	0.7659	0.7565	0.7471	0.7378	0.7286	0.7196	0.7106	0.7016
3000	0.6928	0.6841	0.6755	0.6669	0.6585	0.6501	0.6418	0.6336	0.6255	0.6175
4000	0.6095	0.6017	0.5939	0.5862	0.5786	0.5711	0.5636	0.5562	0.5489	0.5417
5000	0.5346	0.5275	0.5205	0.5136	0.5068	0.5000	0.4934	0.4867	0.4802	0.4737
6000	0.4673	0.4610	0.4548	0.4486	0.4424	0.4364	0.4304	0.4245	0.4186	0.4129
7000	0.4071	0.4015	0.3959	0.3904	0.3849	0.3795	0.3742	0.3689	0.3637	0.3585
8000	0.3534	0.3484	0.3434	0.3385	0.3336	0.3288	0.3241	0.3194	0.3147	0.3101
9000	0.3056	0.3011	0.2967	0.2923	0.2880	0.2838	0.2796	0.2754	0.2713	0.2672
10000	0.2632	0.2593	0.2554	0.2515	0.2477	0.2440	0.2403	0.2367	0.2331	0.2295
11000	0.2260	0.2226	0.2192	0.2158	0.2125	0.2093	0.2061	0.2029	0.1998	0.1968
12000	0.1938	0.1908	0.1879	0.1850	0.1822	0.1794	0.1766	0.1739	0.1713	0.1687
13000	0.1661	0.1635	0.1610	0.1586	0.1561	0.1537	0.1514	0.1491	0.1468	0.1445
14000	0.1423	0.1402	0.1380	0.1359	0.1333	0.1318	0.1298	0.1278	0.1258	0.1239
15000	0.1220	0.1201	0.1183	0.1165	0.1147	0.1129	0.1112	0.1095	0.1078	0.1062
16000	0.1046	0.1030	0.1014	0.09982	0.09830	0.09679	0.09531	0.09385	0.09242	0.09100
17000	0.08961	0.08824	0.08689	0.08556	0.08425	0.08296	0.08169	0.08044	0.07921	0.07799
18000	0.07680	0.07562	0.07447	0.07333	0.07220	0.07110	0.07001	0.06894	0.06788	0.06685
19000	0.06582	0.06481	0.06382	0.06285	0.06188	0.06094	0.06000	0.05909	0.05818	0.05729
20000	0.05641	0.05555	0.05470	0.05386	0.05304	0.05223	0.05143	0.05064	0.04987	0.04910
21000	0.04835	0.04761	0.04688	0.04616	0.04546	0.04476	0.04408	0.04340	0.04274	0.04208
22000	0.04143	0.04081	0.04018	0.03957	0.03896	0.03836	0.03778	0.03720	0.03663	0.03607
23000	0.03552	0.03497	0.03444	0.03391	0.03339	0.03288	0.03238	0.03188	0.03139	0.03091
24000	0.03044	0.02997	0.02952	0.02906	0.02862	0.02818	0.02775	0.02732	0.02691	0.02649
25000	0.02609	0.02569	0.02530	0.02491	0.02453	0.02415	0.02378	0.02342	0.02306	0.02271
26000	0.02236	0.02202	0.02168	0.02135	0.02102	0.02070	0.02038	0.02007	0.01976	0.01946
27000	0.01916	0.01887	0.01858	0.01830	0.01802	0.01774	0.01747	0.01720	0.01694	0.01668
28000	0.01642	0.01617	0.01593	0.01568	0.01544	0.01521	0.01497	0.01474	0.01452	0.01430
29000	0.01408	0.01386	0.01365	0.01344	0.01324	0.01303	0.01283	0.01264	0.01244	0.01225
30000	0.01207	0.01188	0.01170	0.01152	0.01134	0.01117	0.01100	0.01083	0.01066	0.01050
31000	0.01034									



附表 3  $H(y) = \frac{\rho}{\rho_{0n}}$

$y$	000	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	1.0000	0.9904	0.9809	0.9714	0.9620	0.9527	0.9435	0.9343	0.9252	0.9161
1000	0.9072	0.8983	0.8894	0.8807	0.8720	0.8633	0.8548	0.8463	0.8378	0.8595
2000	0.8211	0.8129	0.8047	0.7966	0.7886	0.7806	0.7726	0.7648	0.7570	0.7492
3000	0.7416	0.7339	0.7246	0.7189	0.7115	0.7041	0.6968	0.6895	0.6823	0.6752
4000	0.6681	0.6610	0.6541	0.6472	0.6403	0.6335	0.6268	0.6201	0.6134	0.6069
5000	0.6003	0.5939	0.5875	0.5811	0.5748	0.5685	0.5623	0.5562	0.5501	0.5440
6000	0.5380	0.5321	0.5262	0.5204	0.5146	0.5088	0.5031	0.4975	0.4919	0.4864
7000	0.4809	0.4754	0.4700	0.4647	0.4594	0.4541	0.4489	0.4437	0.4386	0.4335
8000	0.4285	0.4235	0.4186	0.4137	0.4088	0.4040	0.3993	0.3945	0.3899	0.3852
9000	0.3807	0.3761	0.3716	0.3671	0.3628	0.3583	0.3539	0.3495	0.3451	0.3407
10000	0.3363	0.3319	0.3275	0.3232	0.3189	0.3146	0.3103	0.3060	0.3017	0.2975
11000	0.2933	0.2891	0.2850	0.2808	0.2767	0.2727	0.2686	0.2646	0.2606	0.2567
12000	0.2528	0.2489	0.2450	0.2413	0.2376	0.2340	0.2304	0.2269	0.2234	0.2200
13000	0.2166	0.2133	0.2100	0.2068	0.2036	0.2005	0.1975	0.1944	0.1915	0.1885
14000	0.1856	0.1828	0.1800	0.1772	0.1745	0.1719	0.1692	0.1666	0.1641	0.1616
15000	0.1591	0.1567	0.1543	0.1519	0.1496	0.1473	0.1450	0.1428	0.1406	0.1385
16000	0.1364	0.1343	0.1322	0.1302	0.1282	0.1262	0.1243	0.1224	0.1205	0.1187
17000	0.1169	0.1151	0.1133	0.1116	0.1099	0.1082	0.1065	0.1049	0.1033	0.1017
18000	0.1002	0.09864	0.09713	0.09564	0.09418	0.09273	0.09131	0.08992	0.08854	0.08719
19000	0.08585	0.08454	0.08324	0.08197	0.08071	0.07948	0.07826	0.07706	0.07589	0.07472
20000	0.07358	0.07245	0.07134	0.07025	0.06918	0.06812	0.06708	0.06605	0.06504	0.06404
21000	0.06306	0.06210	0.06115	0.06021	0.05929	0.05838	0.05749	0.05661	0.05574	0.05489
22000	0.05405	0.05322	0.05241	0.05161	0.05082	0.05004	0.04927	0.04852	0.04777	0.04704
23000	0.04632	0.04561	0.04492	0.04423	0.04355	0.04289	0.04223	0.04158	0.04095	0.04032
24000	0.03970	0.03909	0.03850	0.03791	0.03733	0.03676	0.03619	0.03564	0.03509	0.03456
25000	0.03403	0.03351	0.03299	0.03249	0.03199	0.03150	0.03102	0.03055	0.03008	0.02962
26000	0.02916	0.02872	0.02828	0.02785	0.02742	0.02700	0.02659	0.02618	0.02578	0.02538
27000	0.02500	0.02461	0.02424	0.02387	0.02350	0.02314	0.02279	0.02244	0.02209	0.02176
28000	0.02142	0.02109	0.02077	0.02045	0.02014	0.01983	0.01953	0.01923	0.01894	0.01865
29000	0.01836	0.01808	0.01780	0.01753	0.01726	0.01700	0.01674	0.01648	0.01623	0.01598
30000	0.01574	0.01550	0.01526	0.01502	0.01479	0.01457	0.01435	0.01413	0.01391	0.01370
31000	0.01349									





附表4 饱和蒸汽压力

温度 $t/^\circ\text{C}$	压力 / 0.13 kPa	温度 $t/^\circ\text{C}$	压力 / 0.13 kPa	温度 $t/^\circ\text{C}$	压力 / 0.13 kPa	温度 $t/^\circ\text{C}$	压力 / 0.13 kPa	温度 $t/^\circ\text{C}$	压力 / 0.13 kPa	温度 $t/^\circ\text{C}$	压力 / 0.13 kPa
-20	0.91	-10	2.08	0	4.60	10	9.17	20	17.39	30	31.55
-19	1.00	-9	2.26	1	4.94	11	9.79	21	18.50	31	33.41
-18	1.08	-8	2.46	2	5.30	12	10.46	22	19.66	32	35.36
-17	1.18	-7	2.67	3	5.69	13	11.16	23	20.91	33	37.41
-16	1.28	-6	2.89	4	6.10	14	11.91	24	22.18	34	39.57
-15	1.39	-5	3.13	5	6.53	15	12.70	25	23.55	35	41.83
-14	1.50	-4	3.39	6	7.00	16	13.54	26	24.99	36	44.20
-13	1.63	-3	3.66	7	7.49	17	14.42	27	26.51	37	46.69
-12	1.76	-2	3.69	8	8.02	18	15.36	28	28.10	38	49.30
-11	1.92	-1	4.27	9	8.57	19	16.35	29	29.78	39	52.04
-10	2.08	0	4.06	10	9.17	20	17.39	30	31.55	40	54.90

附表5 1943年阻力定律  $C_{xon}(Ma)$ 

$Ma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.7	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.157	0.158	0.158	0.159	0.159
0.8	0.159	0.160	0.161	0.162	0.164	0.166	0.168	0.170	0.174	0.178
0.9	0.184	0.192	0.204	0.219	0.234	0.252	0.270	0.287	0.302	0.314
1.0	0.325	0.334	0.343	0.351	0.357	0.362	0.366	0.370	0.373	0.376
1.1	0.378	0.379	0.381	0.382	0.382	0.383	0.384	0.384	0.385	0.385
1.2	0.384	0.384	0.384	0.383	0.383	0.382	0.382	0.381	0.381	0.380
1.3	0.379	0.379	0.378	0.377	0.376	0.375	0.374	0.373	0.372	0.371
1.4	0.370	0.370	0.369	0.368	0.367	0.366	0.365	0.365	0.364	0.363
1.5	0.362	0.361	0.359	0.358	0.357	0.356	0.355	0.354	0.353	0.353
1.6	0.352	0.350	0.349	0.348	0.347	0.346	0.345	0.344	0.343	0.343
1.7	0.342	0.341	0.340	0.339	0.338	0.337	0.336	0.335	0.334	0.333
1.8	0.333	0.332	0.331	0.330	0.329	0.328	0.327	0.326	0.325	0.324
1.9	0.323	0.322	0.322	0.321	0.320	0.320	0.319	0.318	0.318	0.317
2.0	0.317	0.316	0.315	0.314	0.314	0.313	0.313	0.312	0.311	0.310
2	0.317	0.308	0.303	0.298	0.293	0.288	0.284	0.280	0.276	0.273
3	0.270	0.269	0.268	0.266	0.264	0.263	0.262	0.261	0.261	0.260
4	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260	0.260



附表 6 1943 年阻力定律  $F(v_r)$

$v_r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0.74	0.76	0.77	0.79	0.80	0.82	0.84	0.85	0.87	0.88
110	0.90	0.92	0.93	0.95	0.97	0.98	1.00	1.02	1.04	1.05
120	1.07	1.09	1.11	1.12	1.14	1.16	1.18	1.20	1.22	1.24
130	1.26	1.28	1.30	1.32	1.33	1.35	1.38	1.40	1.42	1.44
140	1.46	1.48	1.50	1.52	1.54	1.56	1.58	1.61	1.63	1.65
150	1.67	1.70	1.72	1.74	1.76	1.79	1.81	1.83	1.86	1.88
160	1.90	1.93	1.95	1.98	2.00	2.02	2.05	2.07	2.10	2.12
170	2.15	2.17	2.20	2.23	2.25	2.28	2.30	2.33	2.36	2.38
180	2.41	2.44	2.46	2.49	2.52	2.54	2.57	2.60	2.63	2.66
190	2.68	2.71	2.74	2.77	2.80	2.83	2.86	2.89	2.91	2.94
200	2.97	3.00	3.03	3.06	3.09	3.12	3.15	3.19	3.22	3.25
210	3.28	3.31	3.34	3.37	3.40	3.44	3.47	3.50	3.53	3.57
220	3.60	3.63	3.66	3.70	3.73	3.76	3.80	3.83	3.86	3.90
230	3.93	3.97	4.00	4.04	4.07	4.11	4.14	4.18	4.21	4.25
240	4.28	4.32	4.35	4.39	4.43	4.46	4.50	4.54	4.57	4.61
250	4.65	4.68	4.72	4.76	4.80	4.83	4.87	4.92	4.97	5.02
260	5.06	5.09	5.13	5.18	5.22	5.28	5.33	5.37	5.41	5.45
270	5.49	5.53	5.57	5.61	5.66	5.72	5.77	5.82	5.87	5.93
280	5.98	6.03	6.08	6.14	6.20	6.27	6.34	6.41	6.48	6.54
290	6.61	6.68	6.75	6.82	6.89	6.96	7.03	7.11	7.20	7.31
300	7.41	7.51	7.60	7.70	7.82	7.94	8.07	8.21	8.36	8.51
310	8.69	8.88	9.09	9.32	9.56	9.81	10.10	10.37	10.65	10.91
320	11.20	11.51	11.83	12.18	12.52	12.86	13.21	13.55	13.90	14.24
330	14.59	14.92	15.25	15.58	15.90	16.20	16.48	16.76	17.04	17.32
340	17.61	17.88	18.14	18.39	18.64	18.90	19.16	19.42	19.68	19.94
350	20.19	20.44	20.67	20.90	21.11	21.33	21.54	21.75	21.96	22.16
360	22.35	22.55	22.74	22.94	23.15	23.34	23.53	23.71	23.90	24.09
370	24.27	24.47	24.65	24.83	25.00	25.17	25.33	25.47	25.63	25.79
380	25.96	26.16	26.33	26.49	26.65	26.81	26.96	27.10	27.23	27.37
390	27.53	27.70	27.86	28.03	28.20	28.36	28.52	28.67	28.80	28.95
400	29.11	29.29	29.46	29.61	29.77	29.91	30.05	30.18	30.29	30.42
410	30.56	30.71	30.87	31.02	31.17	31.33	31.47	31.61	31.72	31.85
420	31.99	32.14	32.31	32.45	32.59	32.70	32.83	32.98	33.13	33.30
430	33.44	33.58	33.69	33.83	33.98	34.15	34.30	34.45	34.59	34.71
440	34.84	34.97	35.09	35.23	35.37	35.53	35.71	35.86	36.00	36.12
450	36.25	36.39	36.52	36.65	36.79	36.92	37.05	37.19	37.32	37.46
460	37.59	37.72	37.86	37.99	38.13	38.26	38.40	38.53	38.67	38.80
470	38.94	39.07	39.21	39.34	39.48	39.61	39.73	39.88	40.03	40.19
480	40.38	40.54	40.68	40.81	40.95	41.08	41.22	41.36	41.49	41.63
490	41.77	41.90	42.04	42.18	42.32	42.45	42.59	42.72	42.87	43.03
500	43.23	43.39	43.55	43.69	43.81	43.95	44.09	44.23	44.37	44.51
510	44.65	44.79	44.93	45.06	45.22	45.34	45.46	45.53	45.64	45.76
520	45.90	46.05	46.19	46.33	46.47	46.61	46.75	46.89	47.03	47.16
530	47.30	47.44	47.58	47.72	47.86	48.00	48.14	48.28	48.41	48.56
540	48.73	48.94	49.11	49.27	49.42	49.55	49.58	49.79	49.85	49.97
550	50.09	50.24	50.38	50.52	50.66	50.80	50.94	51.08	51.22	51.36
560	51.51	51.65	51.79	51.93	52.07	52.21	52.35	52.49	52.63	52.77
570	52.91	53.05	53.17	53.33	53.50	53.72	53.90	54.06	54.21	54.33
580	54.48	54.62	54.76	54.90	55.04	55.18	55.32	55.46	55.60	55.75
590	55.89	56.03	56.17	56.31	56.45	56.59	56.73	56.87	57.02	57.16

注: 当  $v_r < 100\text{m/s}$  时,  $F(v_r) = 0.7435 \times 10^{-4} v_r^2$ 。





续附表 6

$v_r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	57.30	57.44	57.58	57.72	57.86	58.00	58.14	58.28	58.42	58.54
610	58.69	58.86	59.04	59.27	59.45	59.61	59.73	59.87	60.01	60.15
620	60.30	60.44	60.58	60.72	60.86	61.00	61.14	61.28	61.42	61.56
630	61.70	61.85	61.99	62.13	62.27	62.41	62.55	62.69	62.83	62.97
640	63.11	63.25	63.39	63.53	63.67	63.81	63.95	64.09	64.23	64.37
650	64.49	64.64	64.81	64.99	65.24	65.42	65.58	65.69	65.83	65.97
660	66.11	66.24	66.40	66.59	66.83	67.02	67.18	67.30	67.44	67.58
670	67.72	67.84	68.00	68.18	68.43	68.62	68.79	68.94	69.04	69.20
680	69.39	69.64	69.83	69.99	70.12	70.26	70.40	70.53	70.67	70.81
690	70.95	71.07	71.22	71.39	71.59	71.84	72.02	72.18	72.27	72.43
700	72.61	72.86	73.06	73.24	73.40	73.51	73.65	73.79	73.93	74.07
710	74.20	74.34	74.51	74.62	74.71	74.74	74.81	74.89	74.97	75.06
720	75.51	75.25	75.36	75.47	75.58	75.70	75.83	75.96	76.10	76.24
730	76.39	76.55	76.71	76.88	77.92	78.09	78.27	78.44	78.62	78.79
740	78.97	79.14	79.32	79.50	79.67	79.85	80.02	80.20	80.37	80.55
750	80.73	80.90	81.08	81.26	81.43	81.61	81.79	81.96	82.14	82.32
760	82.49	82.67	82.85	83.02	83.20	83.38	83.56	83.73	83.91	84.09
770	84.27	84.44	84.62	84.80	84.98	85.16	85.33	85.51	85.69	85.87
780	86.05	86.23	86.40	86.58	86.76	86.94	87.12	87.30	87.48	87.66
790	87.83	88.01	88.19	88.37	88.55	88.73	88.91	89.09	89.27	89.45
800	89.63	89.81	89.99	90.17	90.35	90.53	90.71	90.89	91.07	91.25
810	91.43	91.61	91.79	91.97	92.15	92.33	92.51	92.69	92.87	92.05
820	93.23	93.41	93.59	93.77	93.95	94.14	94.32	94.50	94.68	94.86
830	95.04	95.22	95.40	95.59	95.77	95.95	96.09	96.27	96.45	96.63
840	96.82	97.00	97.18	97.37	97.55	97.73	97.92	98.10	98.29	98.48
850	98.66	98.85	99.03	99.22	99.41	99.60	99.78	99.97	100.16	100.35
860	100.54	100.73	100.92	101.11	101.30	101.49	101.69	101.88	102.07	102.26
870	102.50	102.70	102.89	103.08	103.28	103.47	103.67	103.86	104.05	104.25
880	104.44	104.64	104.83	105.03	105.22	105.41	105.61	105.80	106.00	106.19
890	106.39	106.58	106.78	106.98	107.17	107.37	107.56	107.76	107.95	108.15
900	108.3	108.5	108.7	108.9	109.1	109.3	109.5	109.7	109.9	110.1
910	110.3	110.5	110.7	110.9	111.1	111.3	111.5	111.7	111.9	112.1
920	112.3	112.5	112.7	112.9	113.1	113.3	113.5	113.7	113.9	114.0
930	114.2	114.4	114.6	114.8	115.0	115.2	115.4	115.6	115.8	116.0
940	116.2	116.4	116.6	116.8	117.0	117.2	117.4	117.6	117.8	118.0
950	118.2	118.4	118.6	118.8	119.0	119.2	119.4	119.6	119.8	120.0
960	120.2	120.4	120.7	120.9	121.1	121.3	121.5	121.7	121.9	122.1
970	122.3	122.5	122.8	123.0	123.2	123.5	123.7	123.9	124.1	124.3
980	124.5	124.7	125.0	125.2	125.4	125.6	125.8	126.0	126.2	126.5
990	126.7	126.9	127.1	127.3	127.5	127.7	128.0	128.2	128.4	128.6
1000	128.8	129.0	129.3	129.5	129.7	129.9	130.1	130.2	130.4	130.7
1010	130.9	131.1	131.3	131.5	131.8	132.0	132.2	132.4	132.7	132.9
1020	133.1	133.4	133.6	133.8	134.0	134.3	134.5	134.8	135.0	135.2
1030	135.5	135.7	135.9	136.2	136.4	136.7	136.9	137.2	137.4	137.7
1040	137.9	138.3	138.5	138.8	139.0	139.3	139.5	139.8	140.1	140.3
1050	140.6	140.8	141.1	141.3	141.6	141.8	142.1	142.3	142.6	142.8
1060	143.1	143.3	143.6	143.9	144.1	144.4	144.6	144.9	145.1	145.4
1070	145.6	145.9	146.2	146.4	146.7	147.0	147.3	147.5	147.8	148.0
1080	148.3	148.5	148.8	149.0	149.3	149.6	149.8	150.1	150.3	150.6
1090	150.8	151.1	151.3	151.6	151.8	152.1	152.3	152.6	152.8	153.1





续附表 6

$v_r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1100	153.3	153.6	153.8	154.1	154.3	154.6	154.8	155.1	155.3	155.5
1110	155.7	156.0	156.2	156.5	156.7	157.0	157.2	157.5	157.7	158.0
1120	158.2	158.5	158.7	158.9	159.2	159.4	159.7	159.9	160.2	160.4
1130	160.7	160.9	161.2	161.4	161.7	161.9	162.2	162.4	162.7	162.9
1140	163.2	163.4	163.7	163.9	164.1	164.4	164.6	164.9	165.1	165.4
1150	165.6	165.9	166.1	166.4	166.7	166.9	167.2	167.4	167.7	168.0
1160	168.2	168.5	168.7	169.0	169.3	169.5	169.8	170.1	170.3	170.6
1170	170.9	171.1	171.4	171.7	172.0	172.2	172.5	172.9	173.1	173.4
1180	173.7	174.0	174.2	174.5	174.8	175.1	175.3	175.6	175.9	176.2
1190	176.4	176.7	177.0	177.3	177.6	177.8	178.1	178.4	178.7	178.9
1200	179.2	179.5	179.8	180.1	180.3	180.6	180.9	181.2	181.5	181.7
1210	182.0	182.3	182.6	182.9	183.1	183.4	183.7	184.0	184.3	184.5
1220	184.8	185.1	185.4	185.7	186.0	186.2	186.5	186.8	187.1	187.4
1230	187.7	187.9	188.2	188.5	188.8	189.1	189.4	189.7	189.9	190.2
1240	190.5	190.8	191.1	191.4	191.7	191.9	192.1	192.4	192.7	193.0
1250	193.3	193.6	193.9	194.2	194.5	194.8	195.1	195.4	195.6	195.9
1260	196.2	196.5	196.8	197.1	197.4	197.8	198.1	198.4	198.7	199.0
1270	199.3	199.6	199.9	200.2	200.5	200.8	201.1	201.5	201.8	202.1
1280	202.6	202.9	203.2	203.5	203.9	204.2	204.5	204.8	205.1	205.4
1290	205.7	206.0	206.4	206.7	207.0	207.3	207.6	207.9	208.2	208.5
1300	208.8	209.1	209.4	209.7	210.1	210.4	210.7	211.0	211.3	211.6
1310	211.9	212.2	212.5	212.8	213.1	213.4	213.7	214.0	214.3	214.6
1320	214.9	215.2	215.5	215.8	216.0	216.3	216.6	216.9	217.2	217.5
1330	217.8	218.1	218.4	218.8	219.1	219.4	219.8	220.1	220.4	220.7
1340	221.1	221.4	221.7	222.1	222.4	222.7	223.1	223.4	223.7	224.1
1350	224.4	224.7	225.1	225.4	225.7	226.1	226.4	226.7	227.1	227.4
1360	227.7	228.1	228.4	228.7	229.1	229.4	229.7	230.1	230.4	230.8
1370	231.1	231.4	231.8	232.1	232.4	232.8	233.1	233.5	233.8	234.1
1380	234.5	234.8	235.2	235.5	235.8	236.2	236.5	236.9	237.2	237.5
1390	237.9	238.2	238.6	238.9	239.3	239.6	239.9	240.3	240.6	241.0
1400	241.3	241.7	242.0	242.4	242.7	243.0	243.4	243.7	244.1	244.4
1410	244.8	245.1	245.5	245.8	246.2	246.5	246.9	247.2	247.6	247.9
1420	248.3	248.6	249.0	249.3	249.7	250.0	250.4	250.7	251.1	251.4
1430	251.8	252.1	252.5	252.8	253.2	253.5	253.9	254.2	254.6	255.0
1440	255.3	255.7	256.0	256.4	256.7	257.1	257.4	257.8	258.2	258.5
1450	258.9	259.2	259.6	259.9	260.3	260.7	261.0	261.4	261.7	262.1
1460	262.4	262.8	263.2	263.5	263.9	264.2	264.6	265.0	265.3	265.7
1470	266.1	266.4	266.8	267.1	267.5	267.9	268.2	268.6	269.0	269.3
1480	269.7	270.1	270.4	270.8	271.1	271.5	271.9	272.2	272.6	273.0
1490	273.3	273.7	274.1	274.4	274.8	275.2	275.5	275.9	276.3	276.7
1500	277.0	277.4	277.8	278.1	278.5	278.9	279.2	279.6	280.0	280.4
1510	280.7	281.1	281.5	281.8	282.2	282.6	283.0	283.3	283.7	284.1
1520	284.5	284.8	285.2	285.6	286.0	286.3	286.7	287.1	287.5	287.8
1530	288.2	288.6	289.0	289.3	289.7	290.1	290.5	290.9	291.2	291.6
1540	292.0	292.4	292.8	293.1	293.5	293.9	294.3	294.7	295.0	295.4
1550	295.8	296.2	296.6	296.9	297.3	297.7	298.1	298.5	298.9	299.2
1560	299.6	300.0	300.4	300.8	301.2	301.6	301.9	302.3	302.7	303.1
1570	303.5	303.9	304.3	304.6	305.0	305.4	305.8	306.2	306.6	307.0
1580	307.4	307.8	308.1	308.5	308.9	309.3	309.7	310.1	310.5	310.9
1590	311.3	311.7	312.0	312.4	312.8	313.2	313.6	314.0	314.4	314.8



续附表 6

$v_r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1600	315.2	315.6	316.0	316.4	316.8	317.2	317.6	318.0	318.4	318.7
1610	319.1	319.5	319.9	320.3	320.7	321.1	321.5	321.9	322.3	322.7
1620	323.1	323.5	323.9	324.3	324.7	325.1	325.5	325.9	326.3	326.7
1630	327.1	327.5	327.9	328.3	328.7	329.1	329.5	329.9	330.3	330.7
1640	331.2	331.6	332.0	332.4	332.8	333.2	333.6	334.0	334.4	334.8
1650	335.2	335.6	336.0	336.4	336.8	337.2	337.6	338.1	338.5	338.0
1660	339.3	339.7	340.1	340.5	340.9	341.3	341.7	342.1	342.6	343.0
1670	343.4	343.8	344.2	344.6	345.0	345.4	345.8	346.3	346.7	347.1
1680	347.5	347.9	348.3	348.7	349.2	349.6	350.0	350.4	350.8	351.2
1690	351.6	352.1	352.5	352.9	353.3	353.7	354.2	354.6	355.0	355.4
1700	355.8	356.2	356.7	357.1	357.5	357.9	358.3	358.8	359.2	359.6
1710	360.0	360.4	360.9	361.3	361.7	362.1	362.6	363.0	363.4	363.8
1720	364.2	364.7	365.1	365.5	365.9	366.4	366.8	367.2	367.6	368.1
1730	368.5	368.9	369.3	369.8	370.2	370.6	371.1	371.5	371.9	372.3
1740	372.8	373.2	373.6	374.1	374.5	374.9	375.3	375.8	376.2	376.6
1750	377.1	377.5	377.9	378.4	378.8	379.2	379.7	380.1	380.5	381.0
1760	381.4	381.8	382.3	382.7	383.1	383.6	384.0	384.4	384.9	385.3
1770	385.7	386.2	386.6	387.0	387.5	387.9	388.3	388.8	389.2	389.7
1780	390.1	390.5	391.0	391.4	391.9	392.3	392.7	393.2	393.6	394.1
1790	394.5	394.9	395.4	395.8	396.3	396.7	397.1	397.6	398.0	398.5
1800	398.9	399.4	399.8	400.2	400.7	401.1	401.6	402.0	402.5	402.9
1810	403.4	403.8	404.3	404.7	405.1	405.6	406.0	406.5	406.9	407.4
1820	407.8	408.3	408.7	409.2	409.6	410.1	410.5	411.0	411.4	411.9
1830	412.3	412.8	413.2	413.7	414.1	414.6	415.0	415.5	415.9	416.4
1840	416.8	417.3	417.7	418.2	418.7	419.1	419.6	420.0	420.5	420.9
1850	421.4	421.8	422.3	422.8	423.2	423.7	424.1	424.6	425.0	425.5
1860	426.0	426.4	426.9	427.3	427.8	428.2	428.7	429.2	429.6	430.1
1870	430.5	431.0	431.5	431.9	432.4	432.9	433.3	433.8	434.2	434.7
1880	435.2	435.6	436.1	436.6	437.0	437.5	437.9	438.4	438.9	439.3
1890	439.8	440.3	440.7	441.2	441.7	442.1	442.6	443.1	443.5	444.0
1900	444.5	444.9	445.4	445.9	446.3	446.8	447.3	447.8	448.2	448.7
1910	449.2	449.6	450.1	450.6	451.0	451.5	452.0	452.5	452.9	453.4
1920	453.9	454.4	454.8	455.3	455.8	456.2	456.7	457.2	457.7	458.1
1930	458.6	459.1	459.6	460.0	460.5	461.0	461.5	462.0	462.4	462.9
1940	463.4	463.9	464.3	464.8	465.3	465.8	466.3	466.7	467.2	467.7
1950	468.2	468.7	469.1	469.6	470.1	470.6	471.1	471.5	472.0	472.5
1960	473.0	473.5	474.0	474.4	474.9	475.4	475.9	476.4	476.9	477.3
1970	477.8	478.3	478.8	479.3	479.8	480.3	480.7	481.2	481.7	482.2
1980	482.7	483.2	483.7	484.2	484.6	485.1	485.6	486.1	486.6	487.1
1990	487.6	488.1	488.6	489.0	489.5	490.0	490.5	491.0	491.5	492.0
2000	492.5	493.0	493.5	494.0	494.5	495.0	495.4	495.9	496.4	496.9





附表 7  $K_1(\mu) = (1 - \mu)\ln(1 - \mu) + \mu$

$\mu$	$10^4 \cdot K_1(\mu)$	$\mu$	$10^4 \cdot K_1(\mu)$	$\mu$	$10^4 \cdot K_1(\mu)$	$\mu$	$10^4 \cdot K_1(\mu)$
0.010	0.502	0.050	12.6	0.170	154	0.38	836
0.011	0.607	0.055	15.1	0.175	163	0.39	885
0.012	0.723	0.060	18.1	0.180	172	0.40	935
0.013	0.849	0.065	21.7	0.185	183	0.41	987
0.014	0.984	0.070	24.8	0.190	193	0.42	1041
0.015	1.131	0.075	28.5	0.195	204	0.43	1096
0.016	1.287	0.080	32.7	0.20	215	0.44	1153
0.017	1.453	0.085	37.5	0.21	238	0.45	1212
0.018	1.630	0.090	41.9	0.22	262	0.46	1273
0.019	1.816	0.095	46.8	0.23	287	0.47	1335
0.020	2.013	0.100	51.4	0.24	315	0.48	1400
0.021	2.220	0.105	57.4	0.25	342	0.49	1466
0.022	2.438	0.110	62.3	0.26	372	0.50	1534
0.023	2.665	0.115	68.5	0.27	403	0.52	1677
0.024	2.903	0.120	75.4	0.28	435	0.54	1828
0.025	3.151	0.125	81.9	0.29	468	0.56	1988
0.026	3.409	0.130	88.1	0.30	503	0.58	2156
0.027	3.678	0.135	95.7	0.31	539	0.60	2335
0.028	3.956	0.140	103	0.32	577	0.62	2523
0.029	4.246	0.145	110	0.33	617	0.64	2722
0.030	4.545	0.150	119	0.34	658	0.66	2932
0.035	6.46	0.155	127	0.35	700	0.68	3154
0.040	8.32	0.160	135	0.36	744	0.70	3612
0.045	10.7	0.165	144	0.37	789		

附表 8  $K_2(\mu) = - \int_{0.01}^{\mu} \frac{d\mu}{\ln(1 - \mu)}$

$\mu$	$K_2(\mu)$	$\mu$	$K_2(\mu)$	$\mu$	$K_2(\mu)$	$\mu$	$K_2(\mu)$	$\mu$	$K_2(\mu)$
0.010	0.00000	0.029	1.055	0.120	2.431	0.23	3.025	0.42	3.526
0.011	0.09455	0.030	1.088	0.125	2.470	0.24	3.063	0.43	3.544
0.012	0.1809	0.035	1.241	0.130	2.506	0.25	3.098	0.44	3.562
0.013	0.2604	0.040	1.372	0.135	2.541	0.26	3.132	0.45	3.579
0.014	0.3340	0.045	1.488	0.140	2.575	0.27	3.165	0.46	3.595
0.015	0.4026	0.050	1.591	0.145	2.608	0.28	3.196	0.47	3.611
0.016	0.4668	0.055	1.684	0.150	2.639	0.29	3.226	0.48	3.627
0.017	0.5271	0.060	1.769	0.155	2.669	0.30	3.254	0.49	3.642
0.018	0.5838	0.065	1.846	0.160	2.699	0.31	3.282	0.50	3.657
0.019	0.6373	0.070	1.917	0.165	2.727	0.32	3.308	0.52	3.685
0.020	0.6881	0.075	1.984	0.170	2.754	0.33	3.334	0.54	3.711
0.021	0.7364	0.080	2.046	0.175	2.780	0.34	3.358	0.56	3.736
0.022	0.7825	0.085	2.104	0.180	2.806	0.35	3.382	0.58	3.760
0.023	0.8265	0.090	2.159	0.185	2.831	0.36	3.405	0.60	3.782
0.024	0.8686	0.095	2.210	0.190	2.855	0.37	3.427	0.62	3.804
0.025	0.9089	0.100	2.259	0.195	2.878	0.38	3.448	0.64	3.824
0.026	0.9477	0.105	2.305	0.20	2.901	0.39	3.468	0.66	3.843
0.027	0.9849	0.110	2.349	0.21	2.945	0.40	3.488	0.68	3.861
0.028	1.020	0.115	2.391	0.22	2.986	0.41	3.508	0.70	3.878



附表 9  $L(v) = \int_0^v F(v) dv$ 

$v$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	$2478 \times 10^{-2}$	3299	4282	5445	6800	8364	$1015 \times 10^{-1}$	1218	1445	1700
200	$1983 \times 10^{-1}$	2295	2639	3015	3426	3872	4356	4884	5456	6085
300	$6782 \times 10^{-1}$	7580	8566	9583	$1147 \times 10^0$	1336	1549	1782	2034	2302
400	$2585 \times 10^0$	2884	3197	3524	3866	4221	4590	4973	5369	5780
500	$6205 \times 10^0$	6644	7079	7563	8043	8538	9064	9569	$1011 \times 10$	1066
600	$1122 \times 10$	1180	1240	1301	1363	1427	1493	1559	1628	1698
700	$1770 \times 10$	1844	1918	1994	2072	2152	2233	2317	2402	2489
800	$2578 \times 10$	2668	2761	2855	2951	3048	3148	3249	3353	3458
900	$3566 \times 10$	3675	3786	3900	4015	4132	4251	4372	4496	4622
1000	$4749 \times 10$	4879	5011	5145	5282	5421	5563	5708	5855	6004
1100	$6156 \times 10$	6311	6468	6627	6789	6953	7120	7290	7462	7637
1200	$7815 \times 10$	7996	8179	8365	8554	8746	8941	9139	9340	9544
1300	$9751 \times 10$	9962	$1017 \times 10^2$	1039	1061	1083	1106	1129	1152	1176
1400	$1200 \times 10^2$	1224	1249	1274	1299	1325	1351	1377	1404	1431
1500	$1459 \times 10^2$	1487	1515	1543	1573	1602	1632	1662	1692	1723
1600	$1755 \times 10^2$	1786	1818	1851	1884	1917	1951	1985	2020	2055
1700	$2090 \times 10^2$	2126	2162	2199	2236	2273	2311	2349	2388	2427
1800	$2467 \times 10^2$	2507	2548	2589	2630	2672	2715	2757	2801	2844
1900	$2889 \times 10^2$	2933	2978	3024	3070	3117	3164	3211	3259	3308
2000	$3357 \times 10^2$									

注:当  $v < 100\text{m/s}$  时,  $L(v) = 0.2478 \times 10^{-4} v^3$ 。附表 10  $R(v) = \frac{L(v)}{v}$ 

$v$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
100①	0.2478	0.2999	0.3569	0.4188	0.4857	0.5576	0.6344	0.7162	0.8029	0.8946
200	0.9913	1.093	1.199	1.311	1.427	1.549	1.676	1.809	1.949	2.098
300	2.261	2.445	2.677	2.986	3.373	3.817	4.303	4.817	5.352	5.902
400	6.463	7.034	7.612	8.196	8.786	9.380	9.979	10.58	11.19	11.80
500	12.41	13.03	13.65	14.27	14.90	15.52	16.15	16.79	17.42	18.06
600	18.71	19.35	20.00	20.65	21.30	21.96	22.61	23.28	23.94	24.61
700	25.29	25.97	26.64	27.32	28.00	28.69	29.39	30.09	30.79	31.51
800	32.22	32.94	33.67	34.39	35.13	35.86	36.60	37.35	38.10	38.86
900	39.62	40.38	41.16	41.93	42.71	43.39	44.28	45.08	45.88	46.68
1000	47.49	48.31	49.13	49.96	50.79	51.63	52.48	53.34	54.21	55.08
1100	55.97	56.85	57.75	58.65	59.55	60.46	61.38	62.31	63.24	64.18
1200	65.13	66.08	67.04	68.01	68.99	69.97	70.96	71.96	72.97	73.98
1300	75.01	76.04	77.08	78.13	79.18	80.25	81.32	82.40	83.49	84.59
1400	85.70	86.81	87.94	89.07	90.21	91.36	92.52	93.69	94.87	96.05
1500	97.25	98.45	99.66	100.9	102.1	103.3	104.6	105.8	107.1	108.4
1600	109.7	111.0	112.2	113.6	114.9	116.2	117.5	118.9	120.2	121.6
1700	122.9	124.3	125.7	127.1	128.5	129.9	131.3	132.7	134.2	135.6
1800	137.1	138.5	140.0	141.5	142.9	144.4	145.9	147.5	149.0	150.5
1900	152.0	153.6	155.1	156.7	158.3	159.8	161.4	163.0	164.6	166.2
2000	167.8									

注:当  $v < 100\text{m/s}$  时,  $R(v) = 0.2478 \times 10^{-4} v^2$ 。

附表 11  $\xi(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

$\theta$ (°)	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
0 0	0.00000	0.00058	0.00116	0.00175	0.00233	0.00291	0.00349	0.00407	0.00465	0.00524	0.00582	0.00640	0.00698	0.00756	0.00814
0 30	0.00873	0.00931	0.00989	0.01047	0.01105	0.01164	0.01222	0.01280	0.01338	0.01396	0.01454	0.01513	0.01571	0.01629	0.01687
1 0	0.01745	0.01804	0.01862	0.01920	0.01978	0.02036	0.02095	0.02153	0.02211	0.02269	0.02327	0.02386	0.02444	0.02502	0.02560
1 30	0.02618	0.02676	0.02735	0.02793	0.02851	0.02909	0.02967	0.03026	0.03084	0.03142	0.03200	0.03259	0.03317	0.03375	0.03433
2 0	0.03491	0.03550	0.03608	0.03666	0.03724	0.03782	0.03841	0.03899	0.03957	0.04015	0.04074	0.04132	0.04190	0.04248	0.04306
2 30	0.04365	0.04423	0.04481	0.04539	0.04598	0.04656	0.04714	0.04772	0.04831	0.04889	0.04947	0.05005	0.05064	0.05122	0.05180
3 0	0.05238	0.05297	0.05355	0.05413	0.05471	0.05530	0.05588	0.05646	0.05705	0.05763	0.05821	0.05879	0.05938	0.05996	0.06054
3 30	0.06112	0.06171	0.06229	0.06287	0.06346	0.06404	0.06462	0.06521	0.06579	0.06637	0.06695	0.06754	0.06812	0.06870	0.06929
4 0	0.06987	0.07045	0.07104	0.07162	0.07220	0.07279	0.07337	0.07395	0.07454	0.07512	0.07570	0.07629	0.07687	0.07745	0.07804
4 30	0.07862	0.07920	0.07979	0.08037	0.08096	0.08154	0.08212	0.08271	0.08329	0.08387	0.08446	0.08504	0.08563	0.08621	0.08679
5 0	0.08738	0.08796	0.08855	0.08913	0.08971	0.09030	0.09088	0.09147	0.09205	0.09263	0.09322	0.09380	0.09439	0.09497	0.09556
5 30	0.09614	0.09673	0.09731	0.09789	0.09848	0.09906	0.09965	0.10023	0.10082	0.10140	0.10199	0.10257	0.10316	0.10374	0.10433
6 0	0.10491	0.10550	0.10608	0.10667	0.10725	0.10784	0.10842	0.10901	0.10959	0.11018	0.11076	0.11135	0.11193	0.11252	0.11311
6 30	0.11369	0.11428	0.11486	0.11545	0.11603	0.11662	0.11720	0.11779	0.11838	0.11896	0.11955	0.12013	0.12072	0.12131	0.12189
7 0	0.12248	0.12306	0.12365	0.12424	0.12482	0.12541	0.12600	0.12658	0.12717	0.12776	0.12834	0.12893	0.12951	0.13010	0.13069
7 30	0.13128	0.13186	0.13245	0.13304	0.13362	0.13421	0.13480	0.13538	0.13597	0.13656	0.13715	0.13773	0.13832	0.13891	0.13949
8 0	0.14008	0.14067	0.14126	0.14184	0.14243	0.14302	0.14361	0.14420	0.14478	0.14537	0.14596	0.14655	0.14714	0.14772	0.14831
8 30	0.14890	0.14949	0.15008	0.15067	0.15125	0.15184	0.15243	0.15302	0.15361	0.15420	0.15479	0.15537	0.15596	0.15655	0.15714
9 0	0.15773	0.15832	0.15891	0.15950	0.16009	0.16068	0.16126	0.16185	0.16244	0.16303	0.16362	0.16421	0.16480	0.16539	0.16598
9 30	0.16657	0.16716	0.16775	0.16834	0.16893	0.16952	0.17011	0.17070	0.17129	0.17188	0.17247	0.17306	0.17365	0.17424	0.17484
10 0	0.17543	0.17602	0.17661	0.17720	0.17779	0.17838	0.17897	0.17956	0.18015	0.18075	0.18134	0.18193	0.18252	0.18311	0.18370
10 30	0.18429	0.18489	0.18548	0.18607	0.18666	0.18725	0.18785	0.18844	0.18903	0.18962	0.19021	0.19081	0.19140	0.19199	0.19258
11 0	0.19318	0.19377	0.19436	0.19495	0.19555	0.19614	0.19673	0.19733	0.19792	0.19851	0.19911	0.19970	0.20029	0.20089	0.20148
11 30	0.20207	0.20267	0.20326	0.20386	0.20445	0.20504	0.20564	0.20623	0.20683	0.20742	0.20801	0.20861	0.20920	0.20980	0.21039
12 0	0.21099	0.21158	0.21218	0.21277	0.21337	0.21396	0.21456	0.21515	0.21575	0.21634	0.21694	0.21753	0.21813	0.21873	0.21932
12 30	0.21992	0.22051	0.22111	0.22171	0.22230	0.22290	0.22349	0.22409	0.22469	0.22528	0.22588	0.22648	0.22707	0.22767	0.22827
13 0	0.22886	0.22946	0.23006	0.23066	0.23125	0.23185	0.23245	0.23305	0.23364	0.23424	0.23484	0.23544	0.23604	0.23663	0.23723
13 30	0.23783	0.23843	0.23903	0.23963	0.24022	0.24082	0.24142	0.24202	0.24262	0.24322	0.24382	0.24442	0.24502	0.24562	0.24621
14 0	0.24681	0.24741	0.24801	0.24861	0.24921	0.24981	0.25041	0.25101	0.25161	0.25221	0.25281	0.25342	0.25402	0.25462	0.25522
14 30	0.25582	0.25642	0.25702	0.25762	0.25822	0.25882	0.25943	0.26003	0.26063	0.26123	0.26183	0.26243	0.26304	0.26364	0.26424



续附表 11

$\theta$ (°)	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
15 0	0.26484	0.26544	0.26605	0.26665	0.26725	0.26785	0.26846	0.26906	0.26966	0.27027	0.27087	0.27147	0.27208	0.27268	0.27328
15 30	0.27389	0.27449	0.27510	0.27570	0.27630	0.27691	0.27751	0.27812	0.27872	0.27933	0.27993	0.28053	0.28114	0.28174	0.28235
16 0	0.28295	0.28356	0.28417	0.28477	0.28538	0.28598	0.28659	0.28719	0.28780	0.28841	0.28901	0.28962	0.29011	0.29083	0.29144
16 30	0.29204	0.29265	0.29326	0.29387	0.29447	0.29508	0.29569	0.29629	0.29690	0.29751	0.29812	0.29873	0.29933	0.29994	0.30055
17 0	0.30116	0.30177	0.30237	0.30298	0.30359	0.30420	0.30481	0.30542	0.30603	0.30664	0.30725	0.30786	0.30847	0.30908	0.30969
17 30	0.31030	0.31091	0.31152	0.31213	0.31274	0.31335	0.31396	0.31457	0.31518	0.31579	0.31640	0.31701	0.31762	0.31824	0.31885
18 0	0.31946	0.32007	0.32068	0.32129	0.32191	0.32252	0.32313	0.32374	0.32436	0.32497	0.32558	0.32619	0.32681	0.32742	0.32803
18 30	0.32865	0.32926	0.32987	0.33049	0.33110	0.33172	0.33233	0.33294	0.33356	0.33417	0.33479	0.33540	0.33602	0.33663	0.33725
19 0	0.33786	0.33848	0.33909	0.33971	0.34033	0.34094	0.34156	0.34217	0.34279	0.34341	0.34402	0.34464	0.34526	0.34587	0.34649
19 30	0.34711	0.34772	0.34834	0.34896	0.34958	0.35019	0.35081	0.35143	0.35205	0.35267	0.35328	0.35390	0.35452	0.35514	0.35576
20 0	0.35638	0.35700	0.35762	0.35824	0.35886	0.35948	0.36010	0.36072	0.36134	0.36196	0.36258	0.36320	0.36382	0.36444	0.36506
20 30	0.36568	0.36630	0.36692	0.36754	0.36817	0.36879	0.36941	0.37003	0.37065	0.37123	0.37190	0.37252	0.37314	0.37377	0.37439
21 0	0.37501	0.37564	0.37626	0.37688	0.37751	0.37813	0.37875	0.37938	0.38000	0.38063	0.38125	0.38188	0.38250	0.38313	0.38375
21 30	0.38438	0.38500	0.38563	0.38625	0.38688	0.38750	0.38813	0.38876	0.38938	0.39001	0.39064	0.39126	0.39189	0.39252	0.39314
22 0	0.39377	0.39440	0.39503	0.39565	0.39628	0.39691	0.39754	0.39817	0.39880	0.39942	0.40005	0.40068	0.40131	0.40194	0.40257
22 30	0.40320	0.40383	0.40446	0.40509	0.40572	0.40635	0.40698	0.40761	0.40824	0.40887	0.40950	0.41014	0.41077	0.41140	0.41203
23 0	0.41266	0.41329	0.41393	0.41456	0.41519	0.41582	0.41646	0.41709	0.41772	0.41836	0.41899	0.41962	0.42026	0.42089	0.42153
23 30	0.42216	0.42280	0.42343	0.42406	0.42470	0.42533	0.42597	0.42661	0.42724	0.42788	0.42851	0.42915	0.42978	0.43042	0.43106
24 0	0.43169	0.43233	0.43297	0.43361	0.43424	0.43488	0.43552	0.43616	0.43679	0.43743	0.43807	0.43871	0.43935	0.43999	0.44063
24 30	0.44127	0.44191	0.44254	0.44316	0.44382	0.44446	0.44511	0.44579	0.44639	0.44703	0.44767	0.44831	0.44895	0.44959	0.45023
25 0	0.45088	0.45152	0.45216	0.45280	0.45344	0.45409	0.45473	0.45537	0.45602	0.45666	0.45730	0.45795	0.45859	0.45924	0.45988
25 30	0.46052	0.46117	0.46181	0.46246	0.46310	0.46375	0.46439	0.46504	0.46569	0.46638	0.46698	0.46763	0.46827	0.46892	0.46957
26 0	0.47021	0.47086	0.47151	0.47216	0.47280	0.47345	0.47410	0.47475	0.47540	0.47605	0.47669	0.47734	0.47799	0.47864	0.47929
26 30	0.47994	0.48059	0.48124	0.48189	0.48254	0.48320	0.48385	0.48450	0.48515	0.48580	0.48645	0.48711	0.48776	0.48841	0.48906
27 0	0.48972	0.49037	0.49102	0.49168	0.49233	0.49298	0.49364	0.49429	0.49495	0.49560	0.49625	0.49691	0.49756	0.49822	0.49888
27 30	0.49953	0.50019	0.50084	0.50150	0.50216	0.50281	0.50347	0.50413	0.50478	0.50544	0.50610	0.50676	0.50742	0.50807	0.50873
28 0	0.50939	0.51005	0.51071	0.51137	0.51203	0.51269	0.51335	0.51401	0.51467	0.51533	0.51599	0.51665	0.51731	0.51798	0.51864
28 30	0.51930	0.51996	0.52062	0.52129	0.52195	0.52261	0.52327	0.52394	0.52460	0.52527	0.52593	0.52659	0.52726	0.52792	0.52859
29 0	0.52925	0.52992	0.53058	0.53125	0.53192	0.53258	0.53325	0.53391	0.53458	0.53525	0.53592	0.53658	0.53725	0.53792	0.53859
29 30	0.53925	0.53992	0.54059	0.54126	0.54193	0.54260	0.54327	0.54394	0.54461	0.54528	0.54595	0.54662	0.54729	0.54796	0.54863



续附表 11

$\theta$ (°)	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
30 0	0.54931	0.54998	0.55065	0.55132	0.55200	0.55267	0.55334	0.55401	0.55469	0.55536	0.55604	0.55671	0.55738	0.55806	0.55873
30 30	0.55941	0.56008	0.56076	0.56144	0.56211	0.56279	0.56346	0.56414	0.56482	0.56549	0.56617	0.56685	0.56753	0.56821	0.56888
31 0	0.56956	0.57024	0.57092	0.57160	0.57228	0.57296	0.57364	0.57432	0.57500	0.57568	0.57636	0.57704	0.57772	0.57841	0.57909
31 30	0.57977	0.58045	0.58114	0.58182	0.58250	0.58319	0.58387	0.58455	0.58524	0.58592	0.58661	0.58729	0.58798	0.58866	0.58935
32 0	0.59003	0.59072	0.59141	0.59209	0.59278	0.59347	0.59415	0.59484	0.59553	0.59622	0.59691	0.59759	0.59828	0.59897	0.59966
32 30	0.60035	0.60104	0.60173	0.60242	0.60311	0.60380	0.60449	0.60519	0.60588	0.60657	0.60726	0.60795	0.60865	0.60934	0.61003
33 0	0.61073	0.61142	0.61212	0.61281	0.61350	0.61420	0.61489	0.61559	0.61629	0.61698	0.61768	0.61837	0.61907	0.61977	0.62047
33 30	0.62116	0.62186	0.62256	0.62326	0.62396	0.62465	0.62535	0.62605	0.62675	0.62745	0.62815	0.62885	0.62955	0.63026	0.63096
34 0	0.63166	0.63236	0.63306	0.63376	0.63447	0.63517	0.63587	0.63658	0.63728	0.63799	0.63869	0.63939	0.64010	0.64080	0.64151
34 30	0.64222	0.64292	0.64363	0.64433	0.64504	0.64575	0.64646	0.64716	0.64787	0.64858	0.64929	0.65000	0.65071	0.65142	0.65213
35 0	0.65284	0.65355	0.65426	0.65497	0.65568	0.65639	0.65710	0.65782	0.65853	0.65924	0.65995	0.66067	0.66138	0.66209	0.66281
35 30	0.66352	0.66424	0.66495	0.66567	0.66638	0.66710	0.66782	0.66853	0.66925	0.66997	0.67068	0.67140	0.67212	0.67284	0.67356
36 0	0.67428	0.67499	0.67571	0.67643	0.67715	0.67787	0.67860	0.67932	0.68004	0.68076	0.68148	0.68220	0.68293	0.68365	0.68437
36 30	0.68510	0.68582	0.68654	0.68727	0.68799	0.68872	0.68944	0.69017	0.69090	0.69162	0.69235	0.69308	0.69380	0.69453	0.69526
37 0	0.69599	0.69672	0.69745	0.69817	0.69890	0.69963	0.70036	0.70110	0.70183	0.70256	0.70329	0.70402	0.70475	0.70549	0.70622
37 30	0.70695	0.70768	0.70842	0.70915	0.70989	0.71062	0.71136	0.71209	0.71283	0.71356	0.71430	0.71504	0.71577	0.71651	0.71725
38 0	0.71799	0.71873	0.71947	0.72020	0.72094	0.72168	0.72242	0.72316	0.72391	0.72465	0.72539	0.72613	0.72687	0.72761	0.72836
38 30	0.72910	0.72984	0.73059	0.73133	0.73208	0.73282	0.73357	0.73431	0.73506	0.73580	0.73655	0.73730	0.73805	0.73879	0.73954
39 0	0.74029	0.74104	0.74179	0.74254	0.74329	0.74404	0.74479	0.74554	0.74629	0.74704	0.74779	0.74855	0.74930	0.75005	0.75081
39 30	0.75156	0.75231	0.75307	0.75382	0.75458	0.75533	0.75609	0.75685	0.75760	0.75836	0.75912	0.75987	0.76063	0.76139	0.76215
40 0	0.76291	0.76367	0.76443	0.76519	0.76595	0.76671	0.76747	0.76823	0.76900	0.76976	0.77052	0.77129	0.77205	0.77281	0.77358
40 30	0.77434	0.77511	0.77587	0.77664	0.77741	0.77817	0.77894	0.77971	0.78048	0.78124	0.78201	0.78278	0.78355	0.78432	0.78509
41 0	0.78586	0.78663	0.78741	0.78818	0.78895	0.78972	0.79050	0.79127	0.79204	0.79282	0.79359	0.79437	0.79514	0.79592	0.79669
41 30	0.79747	0.79825	0.79902	0.79980	0.80058	0.80136	0.80214	0.80292	0.80370	0.80448	0.80526	0.80604	0.80682	0.80760	0.80838
42 0	0.80917	0.80995	0.81073	0.81152	0.81230	0.81309	0.81387	0.81466	0.81544	0.81623	0.81702	0.81780	0.81859	0.81938	0.82017
42 30	0.82096	0.82175	0.82254	0.82333	0.82412	0.82491	0.82570	0.82640	0.82728	0.82808	0.82887	0.82966	0.83046	0.83125	0.83205
43 0	0.83284	0.83364	0.83443	0.83523	0.83603	0.83682	0.83762	0.83842	0.83922	0.84002	0.84082	0.84162	0.84242	0.84322	0.84402
43 30	0.84482	0.84562	0.84643	0.84723	0.84803	0.84884	0.84964	0.85045	0.85125	0.85206	0.85286	0.85367	0.85448	0.85529	0.85609
44 0	0.85690	0.85771	0.85852	0.85933	0.86014	0.86095	0.86176	0.86258	0.86339	0.86420	0.86501	0.86583	0.86664	0.86746	0.86827
44 30	0.86909	0.86990	0.87072	0.87153	0.87235	0.87317	0.87399	0.87481	0.87563	0.87645	0.87727	0.87809	0.87891	0.87973	0.88055



续附表 11

$\theta$ (°)	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
45 0	0.88137	0.88220	0.88302	0.88384	0.88467	0.88549	0.88632	0.88714	0.88797	0.88880	0.88963	0.89045	0.89128	0.89211	0.89294
45 30	0.89377	0.89460	0.89543	0.89626	0.89709	0.89793	0.89876	0.89959	0.90043	0.90126	0.90209	0.90293	0.90377	0.90460	0.90544
46 0	0.90629	0.90711	0.90795	0.90879	0.90963	0.91047	0.91131	0.91215	0.91299	0.91383	0.91468	0.91552	0.91636	0.91721	0.91805
46 30	0.91890	0.91974	0.92059	0.92143	0.92228	0.92313	0.92398	0.92482	0.92567	0.92652	0.92737	0.92822	0.92907	0.92993	0.93078
47 0	0.93163	0.93248	0.93334	0.93419	0.93505	0.93590	0.93676	0.93762	0.93847	0.93933	0.94019	0.94105	0.94191	0.94277	0.94363
47 30	0.94449	0.94535	0.94621	0.94707	0.94794	0.94880	0.94966	0.95053	0.95139	0.95226	0.95313	0.95399	0.95486	0.95573	0.95660
48 0	0.95747	0.95834	0.95921	0.96008	0.96095	0.96182	0.96269	0.96357	0.96444	0.96531	0.96619	0.96707	0.96794	0.96882	0.96969
48 30	0.97057	0.97145	0.97233	0.97321	0.97409	0.97497	0.97585	0.97673	0.97761	0.97850	0.97938	0.98027	0.98115	0.98204	0.98292
49 0	0.98381	0.98469	0.98558	0.98647	0.98736	0.98825	0.98914	0.99003	0.99092	0.99181	0.99271	0.99360	0.99449	0.99539	0.99628
49 30	0.99718	0.99807	0.99897	0.99987	1.00076	1.00166	1.00256	1.00346	1.00436	1.00526	1.00617	1.00707	1.00797	1.00887	1.00978
50 0	1.01068	1.01159	1.01249	1.01340	1.01431	1.01522	1.01613	1.01703	1.01794	1.01885	1.01977	1.02068	1.02159	1.02250	1.02342
50 30	1.02433	1.02525	1.02616	1.02708	1.02799	1.02891	1.02983	1.03075	1.03167	1.03259	1.03351	1.03443	1.03535	1.03628	1.03720
51 0	1.03812	1.03905	1.03997	1.04090	1.04183	1.04275	1.04368	1.04461	1.04554	1.04647	1.04740	1.04833	1.04927	1.05020	1.05113
51 30	1.05207	1.05300	1.05394	1.05487	1.05581	1.05675	1.05769	1.05862	1.05956	1.06050	1.06145	1.06239	1.06333	1.06427	1.06522
52 0	1.06616	1.06711	1.06805	1.06900	1.06995	1.07090	1.07184	1.07279	1.07374	1.07470	1.07565	1.07660	1.07755	1.07851	1.07946
52 30	1.08042	1.08137	1.08233	1.08329	1.08424	1.08520	1.08616	1.08712	1.08808	1.08905	1.09001	1.09097	1.09194	1.09290	1.09387
53 0	1.09483	1.09580	1.09677	1.09774	1.09871	1.09968	1.10065	1.10162	1.10259	1.10356	1.10454	1.10551	1.10649	1.10746	1.10844
53 30	1.10942	1.11040	1.11138	1.11236	1.11334	1.11432	1.11530	1.11628	1.11727	1.11825	1.11924	1.12022	1.12121	1.12220	1.12319
54 0	1.12418	1.12517	1.12616	1.12715	1.12814	1.12914	1.13013	1.13113	1.13212	1.13312	1.13411	1.13511	1.13611	1.13711	1.13811
54 30	1.13911	1.14012	1.14112	1.14212	1.14313	1.14413	1.14514	1.14615	1.14716	1.14816	1.14917	1.15018	1.15120	1.15221	1.15322
55 0	1.15423	1.15525	1.15626	1.15728	1.15830	1.15932	1.16034	1.16136	1.16238	1.16340	1.16442	1.16544	1.16647	1.16749	1.16852
55 30	1.16954	1.17057	1.17160	1.17263	1.17366	1.17469	1.17572	1.17676	1.17779	1.17882	1.17986	1.18090	1.18193	1.18297	1.18401
56 0	1.18505	1.18609	1.18713	1.18818	1.18922	1.19026	1.19131	1.19236	1.19340	1.19445	1.19550	1.19655	1.19760	1.19865	1.19970
56 30	1.20076	1.20181	1.20287	1.20392	1.20498	1.20604	1.20710	1.20816	1.20922	1.21028	1.21135	1.21241	1.21347	1.21454	1.21561
57 0	1.21667	1.21774	1.21881	1.21988	1.22096	1.22203	1.22310	1.22418	1.22525	1.22633	1.22740	1.22848	1.22956	1.23064	1.23172
57 30	1.23281	1.23389	1.23497	1.23606	1.23715	1.23823	1.23932	1.24041	1.24150	1.24259	1.24368	1.24478	1.24587	1.24697	1.24806
58 0	1.24916	1.25026	1.25136	1.25246	1.25356	1.25466	1.25577	1.25687	1.25798	1.25908	1.26019	1.26130	1.26241	1.26352	1.26463
58 30	1.26574	1.26686	1.26797	1.26909	1.27021	1.27133	1.27244	1.27356	1.27469	1.27581	1.27693	1.27806	1.27918	1.28031	1.28144
59 0	1.28257	1.28370	1.28483	1.28596	1.28709	1.28823	1.28936	1.29050	1.29164	1.29278	1.29392	1.29506	1.29620	1.29734	1.29849
59 30	1.29963	1.30078	1.30193	1.30308	1.30423	1.30538	1.30653	1.30769	1.30884	1.31000	1.31115	1.31231	1.31347	1.31463	1.31579



续附表 11

$\theta$ (°)	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
60 0	1.31696	1.31812	1.31929	1.32045	1.32162	1.32279	1.32396	1.32513	1.32630	1.32748	1.32865	1.32983	1.33101	1.33218	1.33336
60 30	1.33454	1.33573	1.33691	1.33809	1.33928	1.34047	1.34166	1.34284	1.34404	1.34528	1.34642	1.34761	1.34881	1.35001	1.35121
61 0	1.35240	1.35361	1.35481	1.35601	1.35721	1.35842	1.35963	1.36084	1.36205	1.36326	1.36447	1.36568	1.36690	1.36811	1.36933
61 30	1.37055	1.37177	1.37299	1.37421	1.37544	1.37666	1.37789	1.37912	1.38034	1.38157	1.38281	1.38404	1.38527	1.38651	1.38775
62 0	1.38899	1.39023	1.39147	1.39271	1.39395	1.39520	1.39645	1.39769	1.39894	1.40019	1.40145	1.40270	1.40396	1.40521	1.40647
62 30	1.40773	1.40899	1.41025	1.41151	1.41278	1.41405	1.41531	1.41658	1.41785	1.41913	1.42040	1.42167	1.42295	1.42423	1.42551
63 0	1.42679	1.42807	1.42935	1.43064	1.43193	1.43321	1.43450	1.43579	1.43709	1.43838	1.43968	1.44097	1.44227	1.44357	1.44487
63 30	1.44618	1.44748	1.44879	1.45010	1.45140	1.45272	1.45403	1.45534	1.45666	1.45797	1.45929	1.46061	1.46193	1.46326	1.46458
64 0	1.46591	1.46724	1.46857	1.46990	1.47123	1.47256	1.47390	1.47524	1.47658	1.47792	1.47926	1.48060	1.48195	1.48330	1.48465
64 30	1.48600	1.48735	1.48870	1.49006	1.49141	1.49277	1.49413	1.49550	1.49686	1.49823	1.49959	1.50096	1.50233	1.50370	1.50508
65 0	1.50645	1.50783	1.50921	1.51059	1.51197	1.51336	1.51474	1.51613	1.51752	1.51891	1.52031	1.52170	1.52310	1.52450	1.52590
65 30	1.52730	1.52870	1.53011	1.53152	1.53293	1.53434	1.53575	1.53716	1.53858	1.54000	1.54142	1.54284	1.54426	1.54569	1.54712
66 0	1.54855	1.54998	1.55141	1.55285	1.55428	1.55572	1.55716	1.55861	1.56005	1.56150	1.56295	1.56440	1.56585	1.56730	1.56876
66 30	1.57022	1.57168	1.57314	1.57460	1.57607	1.57754	1.57901	1.58048	1.58195	1.58343	1.58490	1.58638	1.58787	1.58935	1.59084
67 0	1.59232	1.59381	1.59531	1.59680	1.59830	1.59979	1.60129	1.60280	1.60430	1.60581	1.60732	1.60883	1.61034	1.61185	1.61337
67 30	1.61489	1.61641	1.61794	1.61946	1.62099	1.62252	1.62405	1.62559	1.62712	1.62866	1.63020	1.63174	1.63329	1.63484	1.63639
68 0	1.63794	1.63949	1.64105	1.64261	1.64417	1.64573	1.64730	1.64887	1.65044	1.65201	1.65358	1.65516	1.65674	1.65832	1.65990
68 30	1.66149	1.66308	1.66467	1.66626	1.66786	1.66946	1.67106	1.67266	1.67426	1.67587	1.67748	1.67909	1.68071	1.68233	1.68395
69 0	1.68557	1.68719	1.68882	1.69045	1.69208	1.69372	1.69535	1.69699	1.69864	1.70028	1.70193	1.70358	1.70523	1.70688	1.70854
69 30	1.71020	1.71186	1.71353	1.71520	1.71687	1.71854	1.72022	1.72189	1.72357	1.72526	1.72694	1.72863	1.73032	1.73202	1.73372
70 0	1.73542	1.73712	1.73882	1.74053	1.74224	1.74395	1.74567	1.74739	1.74911	1.75084	1.75256	1.75429	1.75603	1.75776	1.75950
70 30	1.76124	1.76299	1.76473	1.76648	1.76824	1.76999	1.77175	1.77351	1.77528	1.77704	1.77881	1.78059	1.78236	1.78414	1.78593
71 0	1.78771	1.78950	1.79129	1.79309	1.79488	1.79668	1.79849	1.80030	1.80211	1.80392	1.80573	1.80755	1.80938	1.81120	1.81303
71 30	1.81486	1.81670	1.81854	1.82038	1.82222	1.82407	1.82592	1.82778	1.82963	1.83149	1.83336	1.83523	1.83710	1.83897	1.84085
72 0	1.84273	1.84461	1.84650	1.84839	1.85029	1.85219	1.85409	1.85599	1.85790	1.85981	1.86173	1.86365	1.86557	1.86749	1.86942
72 30	1.87136	1.87329	1.87523	1.87718	1.87912	1.88108	1.88303	1.88499	1.88695	1.88892	1.89088	1.89286	1.89483	1.89681	1.89880
73 0	1.90079	1.90278	1.90477	1.90677	1.90878	1.91078	1.91279	1.91481	1.91683	1.91885	1.92088	1.92291	1.92494	1.92698	1.92902
73 30	1.93107	1.93312	1.93517	1.93723	1.93930	1.94136	1.94343	1.94551	1.94759	1.94967	1.95176	1.95385	1.95594	1.95804	1.96015
74 0	1.96226	1.96437	1.96649	1.96861	1.97073	1.97286	1.97500	1.97714	1.97928	1.98143	1.98358	1.98574	1.98790	1.99006	1.99223
74 30	1.99441	1.99659	1.99877	2.00096	2.00315	2.00535	2.00755	2.00976	2.01197	2.01419	2.01641	2.01864	2.02087	2.02310	2.02534



续附表 11

$\theta$ (°)	00	02	04	06	08	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
75 0	2.02759	2.02984	2.03209	2.03435	2.03662	2.03889	2.04116	2.04344	2.04573	2.04802	2.05032	2.05262	2.05492	2.05723	2.05955
75 30	2.06187	2.06419	2.06653	2.06886	2.07120	2.07355	2.07590	2.07826	2.08063	2.08300	2.08537	2.08775	2.09013	2.09253	2.09402
76 0	2.09732	2.09973	2.10214	2.10456	2.10699	2.10942	2.11185	2.11430	2.11674	2.11920	2.12166	2.12412	2.12659	2.12907	2.13155
76 30	2.13404	2.13654	2.13904	2.14155	2.14406	2.14658	2.14911	2.15164	2.15418	2.15672	2.15927	2.16183	2.16439	2.16696	2.16954
77 0	2.17212	2.17471	2.17731	2.17991	2.18252	2.18514	2.18776	2.19039	2.19302	2.19567	2.19832	2.20097	2.20364	2.20631	2.20898
77 30	2.21167	2.21436	2.21706	2.21976	2.22248	2.22520	2.22792	2.23066	2.23340	2.23615	2.23891	2.24167	2.24444	2.24722	2.25001
78 0	2.25280	2.25560	2.25841	2.26123	2.26406	2.26689	2.26973	2.27258	2.27544	2.27830	2.28117	2.28406	2.28695	2.28984	2.29275
78 30	2.29566	2.29858	2.30152	2.30455	2.30740	2.31036	2.31332	2.31630	2.31928	2.32227	2.32527	2.32828	2.33129	2.33432	2.33736
79 0	2.34040	2.34345	2.34652	2.34959	2.35267	2.35576	2.35886	2.36197	2.36509	2.36822	2.37136	2.37450	2.37766	2.38083	2.38401
79 30	2.38719	2.39039	2.39360	2.39682	2.40005	2.40328	2.40653	2.40979	2.41306	2.41634	2.41963	2.42293	2.42624	2.42957	2.43290
80 0	2.43625	2.43960	2.44297	2.44635	2.44974	2.45314	2.45655	2.45997	2.46341	2.46686	2.47031	2.47379	2.47727	2.48076	2.48427
80 30	2.48779	2.49132	2.49486	2.49842	2.50199	2.50557	2.50916	2.51277	2.51639	2.52002	2.52366	2.52732	2.53099	2.53468	2.53838
81 0	2.54209	2.54582	2.54956	2.55331	2.55708	2.56086	2.56465	2.56846	2.57229	2.57613	2.57998	2.58385	2.58773	2.59163	2.59554
81 30	2.59947	2.60342	2.60737	2.61135	2.61534	2.61935	2.62337	2.62741	2.63146	2.63553	2.63962	2.64372	2.64784	2.65198	2.65613
82 0	2.66031	2.66450	2.66870	2.67293	2.67717	2.68143	2.68570	2.69000	2.69431	2.69865	2.70300	2.70737	2.71176	2.71617	2.72059
82 30	2.72504	2.72951	2.73400	2.73850	2.74303	2.74758	2.75215	2.75673	2.76134	2.76598	2.77063	2.77530	2.78000	2.78472	2.78946
83 0	2.79422	2.79900	2.80381	2.80864	2.81350	2.81838	2.82328	2.82820	2.83315	2.83813	2.84313	2.84815	2.85320	2.85827	2.86337
83 30	2.86850	2.87365	2.87883	2.88404	2.88927	2.89453	2.89982	2.90513	2.91048	2.91585	2.92125	2.92668	2.93214	2.93763	2.94315
84 0	2.94870	2.95428	2.95989	2.96554	2.97121	2.97692	2.98266	2.98844	2.99424	3.00008	3.00596	3.01187	3.01781	3.02379	3.02981
84 30	3.03586	3.04195	3.04807	3.05423	3.06044	3.06668	3.07295	3.07927	3.08563	3.09203	3.09847	3.10495	3.11147	3.11804	3.12465
85 0	3.13130	3.13800	3.14474	3.15153	3.15836	3.16524	3.17217	3.17915	3.18618	3.19325	3.20038	3.20755	3.21478	3.22206	3.22939

附表 12  $\phi(x) = 1 - x - \ln |1 - x|$ 

	0	1	2	3	4
1.1	2.2026	2.0973	2.0003	1.9102	1.8261
1.2	1.4094	1.3506	1.2942	1.2397	1.1871
1.3	0.9040	0.8612	0.8194	0.7787	0.7388
1.4	0.5163	0.4816	0.4475	0.4140	0.3810
1.5	0.1931	0.1633	0.1339	0.1049	0.0762
1.6	-0.0892	-0.1157	-0.1420	-0.1680	-0.1937
1.7	-0.3433	-0.3675	-0.3915	-0.4153	-0.4389
1.8	-0.5768	-0.5993	-0.6215	-0.6437	-0.6656
1.9	-0.7946	-0.8157	-0.8366	-0.8574	-0.8781
2.0	-1.0000	-1.0200	-1.0398	-1.0596	-1.0792
2.1	-1.1953	-1.2144	-1.2333	-1.2522	-1.2710
2.2	-1.3823	-1.4006	-1.4189	-1.4370	-1.4551
2.3	-1.5624	-1.5800	-1.5976	-1.6152	-1.6327
2.4	-1.7365	-1.7536	-1.7707	-1.7877	-1.8046
2.5	-1.9055	-1.9221	-1.9387	-1.9553	-1.9718
2.6	-2.0700	-2.0862	-2.1024	-2.1186	-2.1347
2.7	-2.2306	-2.2465	-2.2623	-2.2781	-2.2939
2.8	-2.3878	-2.4033	-2.4188	-2.4343	-2.4498
2.9	-2.5419	-2.5571	-2.5723	-2.5875	-2.6027
3.0	-2.6932	-2.7081	-2.7231	-2.7380	-2.7530
3.1	-2.8420	-2.8567	-2.8714	-2.8861	-2.9008
3.2	-2.9885	-3.0030	-3.0175	-3.0320	-3.0465
3.3	-3.1329	-3.1472	-3.1616	-3.1759	-3.1902
3.4	-3.2755	-3.2896	-3.3038	-3.3179	-3.3320
3.5	-3.4163	-3.4303	-3.4443	-3.4582	-3.4722
3.6	-3.5555	-3.5694	-3.5832	-3.5970	-3.6108
3.7	-3.6932	-3.7070	-3.7206	-3.7343	-3.7480
3.8	-3.8296	-3.8432	-3.8567	-3.8703	-3.8838
3.9	-3.9647	-3.9782	-3.9916	-4.0050	-4.0184
4.0	-4.0986	-4.1119	-4.1253	-4.1386	-4.1519
4.1	-4.2314	-4.2446	-4.2578	-4.2710	-4.2842
4.2	-4.3632	-4.3763	-4.3894	-4.4025	-4.4156
4.3	-4.4939	-4.5070	-4.5200	-4.5330	-4.5460
4.4	-4.6238	-4.6367	-4.6496	-4.6626	-4.6755
4.5	-4.7528	-4.7656	-4.7785	-4.7913	-4.8041
4.6	-4.8809	-4.8937	-4.9065	-4.9192	-4.9320
4.7	-5.0083	-5.0210	-5.0337	-5.0464	-5.0591
4.8	-5.1350	-5.1476	-5.1603	-5.1729	-5.1855
4.9	-5.2610	-5.2735	-5.2861	-5.2986	-5.3112
5.0	-5.3836	-5.3988	-5.4113	-5.4238	-5.4362
5.1	-5.5110	-5.5234	-5.5359	-5.5483	-5.5607
5.2	-5.6351	-5.6475	-5.6598	-5.6722	-5.6846
5.3	-5.7586	-5.7709	-5.7833	-5.7956	-5.8079
5.4	-5.8816	-5.8939	-5.9061	-5.9184	-5.9307
5.5	-6.0041	-6.0163	-6.0285	-6.0407	-6.0529
5.6	-6.1261	-6.1382	-6.1504	-6.1626	-6.1747
5.7	-6.2476	-6.2597	-6.2718	-6.2839	-6.2960
5.8	-6.3686	-6.3807	-6.3928	-6.4049	-6.4169
5.9	-6.4892	-6.5013	-6.5133	-6.5253	-6.5373
6.0	-6.6094	-6.6214	-6.6334	-6.6454	-6.6574





续附表 12

	5	6	7	8	9
1.1	1.7471	1.6726	1.6020	1.5348	1.4707
1.2	1.1363	1.0871	1.0394	0.9930	0.9479
1.3	0.6998	0.6617	0.6243	0.5876	0.5516
1.4	0.3485	0.3165	0.2850	0.2540	0.2234
1.5	0.0478	0.0198	- 0.0079	- 0.0353	- 0.0624
1.6	- 0.2192	- 0.2445	- 0.2695	- 0.2943	- 0.3189
1.7	- 0.4623	- 0.4856	- 0.5086	- 0.5315	- 0.5543
1.8	- 0.6875	- 0.7092	- 0.7307	- 0.7522	- 0.7735
1.9	- 0.8987	- 0.9192	- 0.9395	- 0.9598	- 0.9799
2.0	- 1.0988	- 1.1183	- 1.1377	- 1.1570	- 1.1762
2.1	- 1.2898	- 1.3084	- 1.3270	- 1.3455	- 1.3640
2.2	- 1.4731	- 1.4911	- 1.5090	- 1.5269	- 1.5446
2.3	- 1.6501	- 1.6675	- 1.6848	- 1.7021	- 1.7193
2.4	- 1.8216	- 1.8384	- 1.8553	- 1.8720	- 1.8888
2.5	- 1.9883	- 2.0047	- 2.0211	- 2.0374	- 2.0537
2.6	- 2.1508	- 2.1668	- 2.1828	- 2.1988	- 2.2147
2.7	- 2.3096	- 2.3253	- 2.3410	- 2.3566	- 2.3722
2.8	- 2.4652	- 2.4806	- 2.4959	- 2.5113	- 2.5266
2.9	- 2.6178	- 2.6329	- 2.6480	- 2.6631	- 2.6781
3.0	- 2.7678	- 2.7827	- 2.7976	- 2.8124	- 2.8272
3.1	- 2.9155	- 2.9301	- 2.9447	- 2.9593	- 2.9739
3.2	- 3.0609	- 3.0754	- 3.0898	- 3.1042	- 3.1186
3.3	- 3.2044	- 3.2187	- 3.2329	- 3.2471	- 3.2613
3.4	- 3.3461	- 3.3602	- 3.3742	- 3.3883	- 3.4023
3.5	- 3.4861	- 3.5000	- 3.5139	- 3.5278	- 3.5417
3.6	- 3.6246	- 3.6383	- 3.6521	- 3.6658	- 3.6795
3.7	- 3.7616	- 3.7752	- 3.7888	- 3.8025	- 3.8160
3.8	- 3.8973	- 3.9108	- 3.9243	- 3.9378	- 3.9513
3.9	- 4.0318	- 4.0452	- 4.0586	- 4.0719	- 4.0853
4.0	- 4.1651	- 4.1784	- 4.1917	- 4.2049	- 4.2182
4.1	- 4.2974	- 4.3106	- 4.3237	- 4.3369	- 4.3500
4.2	- 4.4286	- 4.4417	- 4.4548	- 4.4678	- 4.4809
4.3	- 4.5590	- 4.5719	- 4.5849	- 4.5979	- 4.6108
4.4	- 4.6884	- 4.7013	- 4.7142	- 4.7270	- 4.7400
4.5	- 4.8170	- 4.8300	- 4.8426	- 4.8554	- 4.8682
4.6	- 4.9447	- 4.9575	- 4.9702	- 4.9829	- 4.9956
4.7	- 5.0718	- 5.0844	- 5.0971	- 5.1097	- 5.1224
4.8	- 5.1981	- 5.2107	- 5.2233	- 5.2358	- 5.2484
4.9	- 5.3237	- 5.3362	- 5.3488	- 5.3613	- 5.3738
5.0	- 5.4487	- 5.4612	- 5.4736	- 5.4861	- 5.4985
5.1	- 5.5731	- 5.5855	- 5.5970	- 5.6103	- 5.6227
5.2	- 5.6969	- 5.7093	- 5.7216	- 5.7340	- 5.7463
5.3	- 5.8202	- 5.8325	- 5.8448	- 5.8570	- 5.8693
5.4	- 5.9429	- 5.9551	- 5.9674	- 5.9796	- 5.9919
5.5	- 6.0651	- 6.0773	- 6.0895	- 6.1017	- 6.1139
5.6	- 6.1869	- 6.1990	- 6.2112	- 6.2233	- 6.2354
5.7	- 6.3081	- 6.3203	- 6.3324	- 6.3444	- 6.3565
5.8	- 6.4270	- 6.4410	- 6.4531	- 6.4652	- 6.4772
5.9	- 6.5494	- 6.5614	- 6.5734	- 6.5854	- 6.5974
6.0	- 6.6694	- 6.6814	- 6.6933	- 6.7053	- 6.7173





附表 13  $K_X = \sqrt{\frac{2}{f_1 f_6}}$

$c\sqrt{Y}$ \ $v_0$	250	300	325	350	375	400	450	500
0	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903
0.2	0.901	0.901	0.900	0.899	0.898	0.898	0.897	0.896
0.4	0.900	0.899	0.897	0.894	0.893	0.892	0.890	0.889
0.6	0.898	0.897	0.894	0.890	0.888	0.886	0.884	0.883
0.8	0.896	0.895	0.891	0.886	0.883	0.880	0.878	0.876
1.0	0.895	0.894	0.888	0.882	0.878	0.875	0.872	0.869
1.2	0.893	0.892	0.885	0.877	0.873	0.869	0.866	0.863
1.4	0.892	0.890	0.882	0.873	0.867	0.864	0.860	0.857
1.6	0.890	0.888	0.879	0.868	0.862	0.858	0.854	0.850
1.8	0.880	0.886	0.877	0.865	0.858	0.853	0.848	0.844
2.0	0.887	0.884	0.875	0.862	0.854	0.849	0.843	0.838
2.2	0.885	0.882	0.873	0.859	0.850	0.844	0.838	0.832
2.4	0.884	0.880	0.870	0.856	0.846	0.839	0.832	0.826
2.6	0.882	0.878	0.868	0.853	0.842	0.834	0.826	0.820
2.8	0.881	0.876	0.866	0.849	0.838	0.829	0.820	0.814
3.0	0.880	0.875	0.864	0.846	0.834	0.824	0.816	0.808
3.2	0.878	0.873	0.862	0.843	0.829	0.820	0.811	0.802
3.4	0.877	0.871	0.859	0.840	0.826	0.816	0.807	0.797
3.6	0.876	0.869	0.857	0.837	0.823	0.813	0.802	0.792
3.8	0.874	0.867	0.855	0.835	0.819	0.809	0.797	0.787
4.0	0.873	0.865	0.853	0.833	0.816	0.805	0.791	0.782
4.2	0.872	0.863	0.852	0.830	0.813	0.801	0.786	0.777
4.4	0.870	0.862	0.850	0.828	0.809	0.797	0.782	0.773
4.6	0.869	0.860	0.848	0.825	0.806	0.793	0.778	0.769
4.8	0.868	0.858	0.846	0.823	0.803	0.790	0.774	0.764
5.0	0.867	0.857	0.844	0.820	0.800	0.787	0.770	0.759
5.2	0.866	0.855	0.843	0.818	0.797	0.784	0.766	0.754
5.4	0.864	0.854	0.841	0.815	0.795	0.780	0.762	0.749
5.6	0.863	0.852	0.839	0.813	0.792	0.776	0.758	0.744
5.8	0.862	0.851	0.837	0.811	0.790	0.773	0.754	0.740
6.0	0.861	0.849	0.835	0.809	0.787	0.770	0.749	0.735
6.5	0.858	0.846	0.830	0.805	0.781	0.763	0.741	0.724
7.0	0.855	0.842	0.826	0.800	0.775	0.756	0.732	0.714
7.5	0.851	0.838	0.822	0.795	0.769	0.750	0.724	0.705
8.0	0.848	0.834	0.818	0.790	0.764	0.744	0.716	0.696
8.5	0.844	0.830	0.814	0.786	0.729	0.738	0.709	0.687
9.0	0.841	0.827	0.810	0.782	0.754	0.732	0.702	0.679
9.5	0.837	0.823	0.806	0.778	0.749	0.727	0.695	0.671
10.0	0.834	0.819	0.802	0.774	0.745	0.722	0.689	0.664



续附表 13

$c\sqrt{Y}$ \ $v_0$	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300
0	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903
0.2	0.895	0.895	0.894	0.894	0.893	0.892	0.891	0.890
0.4	0.888	0.887	0.885	0.884	0.883	0.881	0.880	0.878
0.6	0.881	0.879	0.877	0.875	0.873	0.871	0.869	0.867
0.8	0.873	0.870	0.868	0.866	0.864	0.861	0.858	0.855
1.0	0.865	0.862	0.860	0.857	0.855	0.851	0.847	0.844
1.2	0.859	0.855	0.852	0.849	0.845	0.841	0.837	0.833
1.4	0.852	0.848	0.844	0.840	0.836	0.831	0.827	0.822
1.6	0.845	0.840	0.836	0.831	0.827	0.821	0.817	0.812
1.8	0.838	0.832	0.828	0.823	0.818	0.813	0.808	0.802
2.0	0.831	0.825	0.820	0.815	0.810	0.804	0.799	0.792
2.2	0.825	0.819	0.812	0.807	0.802	0.795	0.789	0.783
2.4	0.819	0.812	0.805	0.799	0.793	0.787	0.781	0.774
2.6	0.812	0.805	0.798	0.792	0.785	0.779	0.772	0.765
2.8	0.806	0.799	0.791	0.784	0.778	0.771	0.763	0.756
3.0	0.800	0.792	0.785	0.777	0.770	0.763	0.755	0.747
3.2	0.794	0.786	0.778	0.770	0.763	0.755	0.747	0.739
3.4	0.788	0.779	0.772	0.764	0.756	0.748	0.739	0.731
3.6	0.782	0.773	0.765	0.757	0.749	0.740	0.731	0.723
3.8	0.776	0.767	0.759	0.750	0.742	0.733	0.724	0.715
4.0	0.771	0.761	0.752	0.743	0.735	0.726	0.716	0.707
4.2	0.765	0.755	0.746	0.737	0.728	0.719	0.709	0.700
4.4	0.759	0.749	0.740	0.731	0.722	0.712	0.702	0.693
4.6	0.755	0.743	0.734	0.724	0.715	0.706	0.696	0.687
4.8	0.750	0.737	0.727	0.718	0.709	0.700	0.689	0.680
5.0	0.745	0.732	0.721	0.712	0.702	0.693	0.683	0.673
5.2	0.740	0.727	0.715	0.705	0.696	0.687	0.676	0.666
5.4	0.735	0.722	0.710	0.700	0.690	0.680	0.670	0.659
5.6	0.730	0.717	0.705	0.694	0.684	0.674	0.664	0.653
5.8	0.726	0.712	0.699	0.689	0.679	0.669	0.658	0.647
6.0	0.721	0.707	0.694	0.683	0.673	0.663	0.652	0.641
6.5	0.708	0.694	0.681	0.670	0.659	0.649	0.638	0.627
7.0	0.696	0.682	0.668	0.657	0.646	0.635	0.624	0.613
7.5	0.684	0.669	0.655	0.644	0.633	0.622	0.610	0.599
8.0	0.674	0.658	0.644	0.632	0.620	0.609	0.597	0.586
8.5	0.664	0.647	0.633	0.621	0.608	0.597	0.585	0.574
9.0	0.654	0.636	0.622	0.610	0.597	0.586	0.574	0.563
9.5	0.645	0.627	0.612	0.600	0.587	0.575	0.563	0.551
10.0	0.636	0.618	0.603	0.590	0.577	0.564	0.552	0.540



续附表 13

$c\sqrt{Y}$ \ $v_0$	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000
0	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903	0.903
0.2	0.890	0.889	0.888	0.887	0.886	0.885	0.884
0.4	0.877	0.876	0.874	0.872	0.870	0.868	0.865
0.6	0.864	0.861	0.858	0.856	0.853	0.850	0.847
0.8	0.851	0.847	0.843	0.840	0.838	0.834	0.830
1.0	0.839	0.835	0.830	0.826	0.823	0.819	0.814
1.2	0.828	0.823	0.818	0.813	0.808	0.804	0.800
1.4	0.817	0.812	0.806	0.801	0.796	0.790	0.785
1.6	0.807	0.801	0.794	0.788	0.782	0.777	0.772
1.8	0.797	0.790	0.782	0.776	0.770	0.764	0.758
2.0	0.787	0.779	0.771	0.764	0.758	0.752	0.746
2.2	0.776	0.768	0.760	0.753	0.746	0.740	0.734
2.4	0.766	0.758	0.750	0.742	0.735	0.729	0.722
2.6	0.757	0.749	0.741	0.733	0.725	0.718	0.711
2.8	0.748	0.740	0.730	0.722	0.715	0.707	0.700
3.0	0.739	0.731	0.722	0.714	0.705	0.697	0.690
3.2	0.730	0.722	0.712	0.704	0.696	0.688	0.680
3.4	0.722	0.715	0.705	0.696	0.687	0.679	0.670
3.6	0.714	0.704	0.696	0.687	0.678	0.670	0.661
3.8	0.706	0.696	0.688	0.679	0.670	0.661	0.652
4.0	0.698	0.688	0.680	0.671	0.662	0.653	0.644
4.2	0.691	0.681	0.672	0.663	0.654	0.644	0.635
4.4	0.684	0.674	0.664	0.655	0.646	0.637	0.628
4.6	0.677	0.667	0.656	0.646	0.637	0.627	0.618
4.8	0.670	0.660	0.649	0.639	0.629	0.620	0.611
5.0	0.663	0.653	0.642	0.632	0.622	0.613	0.604
5.2	0.656	0.646	0.635	0.625	0.614	0.605	0.596
5.4	0.649	0.639	0.628	0.618	0.607	0.599	0.590
5.6	0.643	0.632	0.621	0.611	0.600	0.592	0.583
5.8	0.637	0.626	0.615	0.604	0.593	0.585	0.577
6.0	0.631	0.620	0.609	0.599	0.588	0.579	0.570
6.5	0.616	0.604	0.594	0.584	0.573	0.563	0.554
7.0	0.601	0.590	0.580	0.570	0.559	0.549	0.539
7.5	0.588	0.576	0.566	0.556	0.545	0.535	0.525
8.0	0.575	0.563	0.553	0.543	0.532	0.522	0.512
8.5	0.565	0.551	0.541	0.531	0.520	0.510	0.500
9.0	0.551	0.540	0.528	0.518	0.508	0.498	0.488
9.5	0.539	0.529	0.516	0.506	0.497	0.487	0.477
10.0	0.528	0.518	0.506	0.496	0.486	0.476	0.467



附表 14  $B(u_0, u) \times 10^5 = 10^5 \int_{u_0}^u \frac{1}{2u} \sqrt{\frac{u_0}{u}} \exp[i(u - u_0)] du$ 

$u$	0.2		0.4		0.6		0.8		1.0		1.2	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	77523	2691	83820	4453	86389	5790	87729	6880	88476	7791	88881	8561
0.02	68246	2952	77176	5354	80828	7209	82738	8731	83807	10010	84392	11092
0.03	61142	2903	72107	5736	76603	7963	78961	9803	80285	11356	81015	12674
0.04	55161	2729	67855	5873	73071	8393	75815	10490	77362	12268	78220	13782
0.05	49896	2496	64122	5870	69983	8628	73073	10943	74823	12913	75799	14595
0.06	45138	2238	60759	5777	67209	8735	70619	11236	72558	13375	73645	15207
0.07	40765	1971	57674	5625	64672	8750	68383	11415	70500	13703	71694	15671
0.08	36694	1707	54809	5433	62323	8698	66318	11507	68606	13931	69903	16021
0.09	32870	1452	52122	5212	60127	8595	64394	11532	66846	14079	68244	16282
0.10	29252	1212	49585	4972	58057	8453	62586	11504	65197	14163	66694	16470
0.12	22521	787	44872	4459	54227	8086	59254	11328	62172	14183	63862	16678
0.14	16325	446	40542	3929	50723	7644	56222	11037	59435	14056	61313	16714
0.16	10555	199	36512	3404	47474	7157	53424	10666	56992	13825	58987	16625
0.18	5131	50	32726	2898	44430	6645	50814	10240	54591	13515	56840	16441
0.20	0	0	29142	2419	41555	6122	48359	9776	52408	13148	54840	16184
0.30			13377	621	28958	3616	37695	7236	43042	10851	46377	14253
0.40			0	0	18246	1645	28702	4797	35262	8333	39486	11858
0.50					8699	415	20683	2755	28376	5957	33468	9407
0.60					0	0	13318	1240	22053	3888	27980	7092
0.70							6448	312	16122	2217	22838	5020
0.80							0	0	10493	994	17936	3259
0.90									5123	250	13218	1852
1.00									0	0	8659	829
1.20											0	0
1.40												
1.60												
1.80												
2.00												



续附表 14

$u$	1.4		1.6		1.8		2.0		2.2		2.4	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	89071	9210	89117	9753	89065	10201	88946	10564	88783	10849	88595	11065
0.02	84669	12007	84742	12774	84674	13409	84511	13924	84285	14330	84022	14638
0.03	81366	13791	81464	14730	81389	15508	81196	16141	80924	16641	80606	17021
0.04	78638	15067	78762	16150	78684	17049	78469	17782	78161	18363	77798	18806
0.05	76281	16028	76432	17237	76355	18244	76122	19065	75785	19718	75383	20217
0.06	74189	16771	74367	18094	74294	19197	74048	20100	73685	20818	73251	21370
0.07	72298	17354	72505	18781	72438	19974	72181	20951	71798	21731	71335	22331
0.08	70567	17814	70804	19338	70745	20613	70481	21660	70079	22498	69591	23145
0.09	68967	18177	69234	19790	29185	21143	68916	22257	68500	23150	67988	23841
0.10	67476	18460	67775	20157	67737	21584	67466	22761	67036	23706	66504	24440
0.12	64762	18839	65127	20692	65117	22255	64845	23550	64395	24595	63829	25410
0.14	62333	19029	62766	21022	62789	22710	62524	24114	62060	25253	61466	26145
0.16	60126	19078	60632	21198	60692	23002	60439	24509	59968	25735	59352	26702
0.18	58099	19018	58681	21256	58783	23168	58547	24771	58073	26081	57441	27120
0.20	56222	18873	56882	21219	57030	23233	56815	24927	56343	26318	55699	27426
0.30	48390	17361	49481	20140	49908	22575	49853	24666	49448	26419	48798	27847
0.40	42157	15197	43730	18263	44502	21012	44679	23421	44416	25482	43834	27198
0.50	36811	12823	38904	16059	40070	19030	40535	21690	40473	24012	40017	25986
0.60	31988	10450	34633	13747	36228	16859	37027	19707	37213	22245	36932	24446
0.70	27518	8196	30705	11456	32755	14628	33921	17602	34394	20310	34330	22706
0.80	23253	6137	26992	9265	29511	12420	31068	15460	31861	18289	32048	20845
0.90	19135	4327	23412	7232	26404	10295	28369	13338	29506	16240	29974	18918
1.00	15125	2802	19916	5398	23377	8296	25758	11281	27255	14205	28028	16965
1.20	7371	711	13080	2456	17426	4814	20633	7500	22877	10314	24307	13108
1.40	0	0	6418	622	11525	2186	15495	4341	18474	6838	20588	9490
1.60			0	0	5683	553	10301	1968	13952	3952	16730	6281
1.80					0	0	5099	498	9313	1790	12690	3626
2.00							0	0	4624	453	8498	1642
2.20									0	0	4230	451
2.40											0	0
2.60												
2.80												
3.00												
3.20												
3.40												
3.60												
3.80												
4.00												



续附表 14

$u$	2.6		2.8		3.0		3.2		3.4		3.6	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	88394	11219	88192	11318	87996	11369	87813	11378	87649	11354	87505	11302
0.02	83741	14858	83456	15000	83179	15075	82921	15091	82688	15059	82484	14988
0.03	80264	17295	79916	17472	79579	17567	79263	17590	78977	17554	78726	17469
0.04	77406	19125	77007	19335	76618	19448	76254	19478	75923	19439	75633	19344
0.05	74949	20578	74505	20817	74072	20948	73665	20986	73294	20946	72969	20843
0.06	72779	21770	72296	22036	71823	22184	71377	22231	70971	22191	70613	22082
0.07	70829	22769	70310	23062	69801	23227	69320	23281	68881	23243	68494	23129
0.08	69055	23618	68503	23937	67961	24119	67447	24182	66977	24146	66562	24028
0.09	67425	24349	66843	24692	66270	24891	65725	24964	65227	24930	64785	24809
0.10	65916	24981	65306	25350	64704	25565	64131	25648	63605	25618	63138	25492
0.12	63196	26016	62537	26433	61882	26682	61256	26785	60679	26764	60166	26639
0.14	60796	26813	60093	27277	59391	27560	58718	27685	58094	27675	57537	27552
0.16	58650	27430	57909	27941	57164	28259	56447	28407	55781	28409	55182	28289
0.18	56712	27907	55936	28464	55154	28817	54396	28989	53690	29005	53052	28891
0.20	54947	28270	54141	28875	53324	29263	52529	29460	51785	29492	51111	29385
0.30	47985	28969	47077	29804	46129	30376	45185	30714	44281	30844	43447	30796
0.40	43030	28580	42083	29644	41059	30411	40013	30908	38990	31161	38027	31203
0.50	39276	27613	38342	28902	37288	29870	36181	30539	35071	30936	34003	31090
0.60	36303	26301	35425	27808	34383	28979	33248	29829	32082	30382	30935	30667
0.70	33853	24767	33072	26482	32078	27852	30951	28888	29757	29609	28556	30038
0.80	31761	23088	31113	24996	30202	26559	29113	27782	27921	28676	26688	29260
0.90	29908	21315	29427	23397	28631	25143	27612	26549	26447	27619	25208	28366
1.00	28212	19486	27926	21720	27275	23636	26354	25217	25245	26461	24025	27376
1.20	25053	15775	25232	18236	24950	20434	24305	22332	23386	23909	22274	25157
1.40	21950	12153	22667	14719	22841	17106	22565	19254	21931	21121	21022	22680
1.60	18722	8782	20019	11318	20708	13783	20876	16092	20607	18183	19986	20006
1.80	15289	5806	17172	8170	18407	10586	19068	12951	19229	15181	18968	17211
2.00	11639	3350	14079	5397	15861	7635	17039	9940	17673	12210	17828	14361
2.20	7814	1516	10749	3112	13047	5041	14738	7165	15863	9366	16471	11545
2.40	3898	383	7233	1408	9986	2906	12157	4729	13765	6749	14840	8853
2.60	0	0	3614	356	6732	1314	9324	2725	11382	4453	12914	6377
2.80			0	0	3369	332	6296	1232	8745	2565	10700	4207
3.00					0	0	3155	311	5913	1160	8234	2423
3.20							0	0	2966	293	5574	1096
3.40									0	0	2799	277
3.60											0	0
3.80												
4.00												





续附表 14

$u$	3.8		4.0		4.2		4.4		4.6		4.8	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87385	11229	87290	11141	87220	11043	87174	10941	87151	10839	87148	10741
0.02	82314	14886	82178	14763	82077	14626	82010	14482	81976	14338	81972	14200
0.03	78516	17347	78348	17197	78223	17031	78140	16855	78097	16680	78089	16510
0.04	75389	19205	75193	19035	75047	18844	74949	18643	74896	18440	74886	18244
0.05	72695	20691	72474	20502	72308	20290	72196	20066	72136	19841	72122	19622
0.06	70311	21918	70068	21714	69884	21484	69759	21240	69690	20993	69672	20753
0.07	68166	22955	67900	22737	67699	22491	67562	22228	67484	21963	67463	21704
0.08	66209	23846	65924	23616	65706	23354	65556	23075	65470	22792	65444	22516
0.09	64409	24620	64104	24379	63870	24104	63708	23810	63614	23510	63584	23218
0.10	62740	25299	62416	25049	62167	24761	61993	24453	61891	24138	61855	23830
0.12	59725	26434	59364	26166	59085	25857	58888	25523	58769	25180	58724	24844
0.14	57057	27339	56661	27058	56353	26730	56133	26374	55997	26006	55941	25644
0.16	54665	28072	54236	27781	53899	27436	53656	27060	53504	26670	53436	26284
0.18	52490	28672	52038	28372	51674	28014	51408	27620	51238	27210	51158	26802
0.20	50523	29166	50031	28859	49640	28490	49352	28080	49164	27652	49071	27223
0.30	42704	30601	42066	30287	41545	29885	41143	29421	40862	28922	40696	28411
0.40	37150	31064	36382	30777	35736	30375	35221	29888	34840	29347	34591	28780
0.50	33013	31033	32126	30800	31363	30424	30736	29940	30251	29381	29911	28777
0.60	29849	30713	28857	30556	27984	30230	27248	29771	26659	29215	26222	28594
0.70	27393	30205	26310	30143	25337	29887	24496	29474	23803	28939	23266	28319
0.80	25470	29562	24311	29612	23248	29444	22310	29093	21516	28598	20879	27996
0.90	23955	28814	22737	28989	21598	28924	20570	28654	19680	28215	18944	27647
1.00	22757	27977	21498	28289	20296	28341	19190	28165	18210	27799	17378	27281
1.20	21044	26079	19760	26687	18481	27004	17255	27057	16124	26877	15118	26502
1.40	19917	23920	18689	24840	17403	25450	16117	25768	14880	25821	13735	25640
1.60	19092	21543	18001	22768	16783	23680	15503	24287	14218	24605	12980	24658
1.80	18362	18994	17486	20496	16412	21701	15209	22602	13941	23203	12664	23519
2.00	17575	16330	16985	18066	16128	19536	15074	20718	13889	21605	12637	22198
2.20	16621	13621	16376	15529	15801	17218	14964	18653	13931	19811	12768	20683
2.40	15425	10947	15569	12951	15331	14799	14772	16442	13956	17842	12945	18975
2.60	13943	8393	14505	10407	14644	12342	14414	14133	13870	15730	13074	17095
2.80	12162	6045	13149	7977	13689	9916	13824	11785	13601	13522	13072	15074
3.00	10095	3987	11493	5744	12441	7600	12962	9469	13092	11276	12875	12960
3.20	7779	2296	9555	3788	10895	5472	11806	7257	12308	9060	12434	10808
3.40	5272	1038	7372	2182	9070	3609	10356	5225	11233	6943	11718	8684
3.60	2650	262	5001	986	7006	2078	8633	3445	9868	4999	10713	6655
3.80	0	0	2515	249	4757	939	6674	1984	8235	3296	9424	4791
4.00			0	0	2394	237	4535	897	6372	1898	7873	3159
4.20					0	0	2284	226	4333	858	6097	1819
4.40							0	0	2184	217	4148	822
4.60									0	0	2092	208
4.80											0	0



续附表 14

$u$	5.0		5.5		6.0		6.5		7.0		7.5	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87164	10650	87267	10472	87420	10378	87579	10371	87706	10432	87779	10536
0.02	81993	14071	82136	13817	82351	13683	82575	13670	82755	13755	82861	13902
0.03	78114	16352	78286	16040	78548	15872	78822	15853	79044	15956	79175	16130
0.04	74913	18062	75107	17699	75408	17503	75724	17478	75982	17593	76135	17796
0.05	72150	19418	72363	19010	72697	18787	73050	18755	73339	18882	73513	19106
0.06	69700	20530	69930	20080	70293	19832	70680	19794	70998	19930	71190	20173
0.07	67491	21462	67734	20974	68124	20703	68540	20657	68886	20800	29096	21061
0.08	65472	22257	65726	21733	66140	12438	66586	21385	66956	21534	67184	21811
0.09	63610	22943	63875	22384	64310	22067	64782	22007	65177	22161	65421	22452
0.10	61881	23540	62153	22948	62609	22610	63106	22541	63523	22699	63784	23004
0.12	58745	24526	59031	23872	59523	23491	60065	23404	60526	23569	60818	23896
0.14	55957	25300	56251	24588	56775	24166	57358	24060	57859	24228	58182	24575
0.16	53446	25916	53745	25149	54295	24686	54917	24562	55456	24730	55809	25094
0.18	51161	26412	51462	25591	52035	25089	52692	24944	53267	25111	53649	25490
0.20	49065	26812	49365	25941	49959	25400	50648	25233	51258	25396	51668	25788
0.30	40639	27910	40898	26812	41556	26081	42375	25793	43138	25917	43686	26345
0.40	34468	28211	34639	26919	35310	26003	36218	25577	37109	25633	37788	26061
0.50	29710	28158	29756	26703	30401	25608	31363	25033	32361	24996	33163	25396
0.60	25935	27941	25826	26349	26409	25086	27395	24354	28479	24204	29397	24552
0.70	22888	27648	22599	25949	23089	24528	24070	23636	25218	23358	26243	23633
0.80	20405	27323	19916	25547	20286	23983	21234	22929	22425	22510	23545	22694
0.90	18372	26987	17668	25164	17893	23475	18782	22262	19995	21694	21196	21769
1.00	16709	26649	15779	24811	15837	23015	16642	21650	17854	20926	19122	20879
1.20	14262	25968	12864	24197	12535	22257	13102	20616	14246	19576	15597	19249
1.40	12714	25259	10854	23684	10090	21701	10338	19842	11326	18495	12685	17859
1.60	11829	24475	9546	23220	8324	21305	8189	19304	8938	17683	10227	16728
1.80	11430	23572	8793	22749	7118	21015	6557	18964	6994	17121	8133	15857
2.00	11373	22511	8476	22213	6383	20773	5373	18772	5439	16776	6351	15231
2.20	11534	21268	8493	21565	6042	20520	4587	18674	4239	16609	4854	14831
2.40	11803	19830	8753	20765	6027	20205	4154	18616	3369	16575	3631	14627
2.60	12086	18203	9167	19788	6271	19779	4032	18546	2809	16626	2673	14585
2.80	12296	16405	9654	18618	6706	19207	4175	18415	2536	16714	1976	14666
3.00	12361	14469	10137	17258	7267	18462	4537	18178	2524	16790	1535	14828
3.20	12224	12442	10545	15721	7887	17528	5065	17801	2742	16809	1339	15026
3.40	11840	10377	10815	14034	8500	16403	5705	17258	3156	16731	1373	15217
3.60	11182	8338	10896	12235	9046	15098	6402	16531	3723	16521	1616	15358
3.80	10240	6390	10748	10372	9469	13633	7099	15615	4400	16152	2041	15412
4.00	9019	4600	10341	8501	9720	12040	7741	14517	5136	15607	2613	15343
4.20	7541	3033	9663	6682	9760	10362	8277	13252	5882	14877	3295	15126
4.40	5844	1746	8715	4975	9560	8647	8660	11848	6588	13964	4044	14740
4.60	3979	789	7511	3441	9104	6950	8852	10340	7207	12882	4814	14176
4.80	2007	199	6082	2138	8389	5327	8825	8772	7693	11651	5560	13432
5.00	0	0	4469	1113	7423	3835	8558	7192	8009	10302	6237	12516
5.50			0	0	4088	1020	6820	3540	7879	6678	7361	9607





续附表 14

$u$	8.0		8.5		9.0		9.5		10.0		10.5	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87793	10650	87754	10746	87680	10807	87593	10824	87516	10799	87446	10676
0.02	82882	14061	82828	14199	82724	14286	82602	14310	82493	14276	82392	14104
0.03	79202	16329	79138	16498	79012	16606	78863	16638	78728	16597	78603	16387
0.04	76169	18023	76097	18219	75953	18345	75781	18383	75625	18337	75478	18097
0.05	73553	19360	73475	19580	73315	19722	73124	19767	72949	19718	72782	19450
0.06	71237	20451	71154	20692	70981	20850	70771	20901	70579	20849	70393	20558
0.07	69150	21360	69062	21622	68877	21795	68651	21852	68443	21798	68239	21485
0.08	67245	22130	67154	22411	66958	22598	66717	22661	66494	22606	66272	22274
0.09	65489	22790	65396	23089	65189	23288	64935	23358	64698	23302	64459	22952
0.10	63859	23359	63764	23675	63549	23887	63281	23964	63030	23907	62775	23541
0.12	60908	24284	60811	24632	60580	24870	60288	24959	60012	24903	59725	24507
0.14	58288	24992	58190	25370	57946	25631	57633	25734	57334	25679	57015	25258
0.16	55930	25537	55834	25944	55578	26228	55246	26345	54925	26292	54576	25849
0.18	53787	25957	53694	26390	53428	26697	53079	26828	52737	26779	52357	26317
0.20	51824	26277	51734	26736	51461	27065	51096	27210	50735	27166	50324	26686
0.30	43935	26922	43883	27491	43590	27926	43162	28148	42717	28138	42158	27604
0.40	38141	26695	38146	27355	37860	27888	37394	28192	36881	28232	36178	27683
0.50	33627	26062	33706	26796	33448	27421	32963	27811	32398	27913	31554	27380
0.60	29975	25228	30142	26019	29929	26729	29443	27207	28838	27380	27860	26892
0.70	26937	24296	27202	25129	27049	25914	26579	26481	25947	26732	24843	26313
0.80	24354	23325	24724	24183	24646	25035	24206	25688	23560	26022	22342	25694
0.90	22117	22350	22599	23216	22605	24123	22211	24859	21565	25280	20244	25063
1.00	20149	21391	20745	22249	20848	23200	20511	24012	19878	24522	18470	24433
1.20	16811	19575	17638	20366	17955	21365	17770	22311	17201	22996	15670	23207
1.40	14040	17944	15085	18604	15635	19593	15643	20634	15188	21481	13612	22033
1.60	11665	16530	12901	16999	13687	17918	13916	19007	13619	19992	12085	20905
1.80	9586	15347	10969	15575	11980	16365	12447	17448	12346	18534	10944	19807
2.00	7745	14401	9221	14346	10431	14950	11141	15972	11264	17115	10082	18723
2.20	6114	13687	7620	13323	8990	13692	9933	14594	10298	15744	9418	17643
2.40	4683	13195	6149	12510	7628	12603	8780	13331	9392	14432	8885	16559
2.60	3450	12906	4804	11904	6332	11694	7658	12198	8510	13195	8432	15469
2.80	2421	12798	3591	11500	5102	10971	6554	11211	7626	12049	8016	14378
3.00	1602	12842	2522	11284	3946	10437	5469	10381	6728	11011	7603	13293
3.20	999	13002	1611	11236	2878	10087	4408	9718	5812	10097	7166	12227
3.40	615	13242	872	11333	1917	9912	3387	9226	4883	9321	6687	11196
3.60	448	13521	317	11543	1080	9897	2422	8905	3950	8695	6153	10217
3.80	489	13800	- 46	11835	386	10022	1535	8749	3031	8226	5559	9309
4.00	725	14039	- 214	12173	- 149	10261	746	8747	2144	7916	4907	8489
4.20	1133	14200	- 190	12517	- 514	10584	77	8881	1312	7762	4204	7776
4.40	1687	14252	17	12832	- 701	10959	- 454	9130	557	7757	3461	7182
4.60	2353	14165	392	13082	- 708	11351	- 832	9468	- 98	7886	2695	6721
4.80	3094	13921	911	13234	- 542	11724	- 1048	9864	- 634	8132	1926	6398
5.00	3870	13505	1546	13261	- 213	12045	- 1096	10287	- 1034	8470	1175	6217
5.50	5679	11707	3419	12651	1188	12416	- 509	11243	- 1365	9539	- 465	6354





续附表 14

$u$	12.0		13.0		14.0		15.0		16.0		17.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87503	10567	87612	10558	87671	10634	87641	10716	87565	10734	87514	10684
0.02	82471	13949	82624	13934	82709	14041	82669	14157	82560	14183	82487	14113
0.03	78698	16196	78885	16176	78990	16307	78942	16450	78810	16483	78720	16398
0.04	75586	17875	75801	17850	75924	18000	75870	18165	75718	18205	75613	18108
0.05	72900	19201	73141	19171	73279	19337	73221	19522	73052	19568	72933	19461
0.06	70520	20284	70783	20248	70937	20428	70875	20632	70690	20685	70559	20568
0.07	68373	21188	68657	21146	68825	21330	68761	21560	69561	21619	68418	21495
0.08	66412	21955	66716	21907	66897	22112	66831	22348	66618	22413	66464	22282
0.09	64604	22612	64926	22558	65120	22773	65052	23025	64828	23096	64663	22959
0.10	62925	23181	63263	23121	63470	23345	63401	23611	63165	23689	62990	23546
0.12	59881	24110	60250	24036	60482	24278	60412	24571	60155	24660	59960	24508
0.14	57175	24826	57571	24739	57828	24995	57759	25312	57483	25415	57269	25254
0.16	54737	25384	55159	25282	55438	25550	55371	25891	55079	26007	54847	25839
0.18	52518	25820	52964	25703	53266	25981	53202	26344	52894	26473	52645	26300
0.20	50484	26159	50951	26027	51275	26313	51215	26697	50894	26840	50627	26663
0.30	42288	26942	42841	26723	43271	27033	43245	27508	42871	27721	42524	27538
0.40	36250	26908	36861	26593	37390	26899	37416	27448	37010	27736	36590	27566
0.50	31548	26510	32192	26092	32815	26373	32905	26981	32485	27346	31999	27204
0.60	27758	25944	28414	25417	29124	25656	29288	26309	28871	26752	28326	26651
0.70	24632	25305	25280	24668	26069	24848	26316	25532	25915	26054	25318	26003
0.80	22009	24644	22631	23898	23489	24005	23825	24706	23454	25304	22814	25314
0.90	19782	23990	20359	23137	21276	23159	21704	23863	21377	24533	20702	24612
1.00	17872	23357	18388	22401	19352	22328	19875	23022	19602	23759	18903	23912
1.20	14795	22181	15140	21043	16159	20754	16872	21385	16739	22236	16022	22553
1.40	12465	21135	12586	19856	13604	19332	14494	19847	14536	20776	13844	21265
1.60	10693	20208	10548	18842	11503	18077	12545	18427	12786	19392	12166	20051
1.80	9350	19375	8912	17986	9743	16989	10899	17134	11354	18086	10848	18902
2.00	8345	18612	7601	17268	8251	16064	9476	15972	10145	16860	9793	17809
2.20	7609	17890	6564	16664	6981	15291	8222	14941	9094	15715	8930	16764
2.40	7085	17187	5761	16149	5903	14657	7100	14041	8154	14652	8204	15760
2.60	6726	16482	5161	15697	4997	14146	6091	13270	7292	13675	7572	14795
2.80	6490	15760	4736	15284	4250	13740	5182	12624	6487	12788	7002	13870
3.00	6339	15009	4462	14887	3651	13421	4367	12097	5725	11995	6470	12986
3.20	6239	14224	4314	14485	3192	13167	3645	11680	4999	11299	5956	12149
3.40	6159	13403	4268	14062	2865	12960	3018	11365	4307	10702	5449	11365
3.60	6071	12551	4299	13601	2659	12777	2487	11137	3652	10206	4939	10641
3.80	5954	11675	4383	13095	2564	12600	2056	10984	3039	9808	4423	9983
4.00	5786	10789	4496	12536	2566	12409	1726	10884	2475	9505	3902	9399
4.20	5554	9906	4615	11923	2650	12189	1497	10832	1967	9291	3379	8894
4.40	5249	9045	4717	11260	2800	11925	1367	10798	1525	9157	2861	8472
4.60	4865	8224	4781	10551	2996	11608	1331	10770	1156	9093	2356	8135
4.80	4403	7463	4792	9810	3219	11230	1382	10729	867	9085	1873	7882
5.00	3869	6780	4734	9049	3448	10788	1510	10659	661	9119	1424	7712
5.50	2298	5517	4235	7171	3926	9418	2076	10275	521	9284	516	7606



续附表 14

$u$	18.0		19.0		20.0		21.0		22.0		23.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87527	10620	87583	10598	87628	10631	87625	10683	87583	10706	87543	10685
0.02	82505	14023	82585	13991	82648	14037	82645	14110	82585	14144	82529	14114
0.03	78741	16286	78837	16247	78916	16303	78912	16392	78840	16434	78771	16398
0.04	75636	17979	75747	17932	75838	17995	75835	18099	75752	18148	75672	18108
0.05	72957	19316	73080	19263	73184	19333	73181	19448	73089	19504	72999	19460
0.06	70583	20410	70718	20350	70832	20425	70830	20552	70730	20614	70631	20567
0.07	68443	21323	68588	21257	68712	21337	68712	21474	68604	21542	68496	21492
0.08	66489	22098	66643	22026	66776	22110	66777	22257	66663	22331	66547	22279
0.09	64687	22764	64850	22686	64992	22774	64995	22929	64874	23008	64751	22954
0.10	63013	23340	63184	23256	63335	23347	63339	23510	63214	23596	63083	23540
0.12	59981	24282	60167	24186	60334	24282	60342	24461	60206	24558	60062	24499
0.14	57287	25009	57485	24902	57668	25003	57681	25196	57536	25303	57379	25243
0.16	54861	25577	55070	25458	55268	25562	55286	25768	55133	25886	54964	25825
0.18	52654	26022	52874	25892	53085	25997	53108	26215	52949	26343	52769	26283
0.20	50631	26370	50860	26228	51085	26335	51114	26564	50949	26702	50757	26642
0.30	42493	27181	42755	26979	43042	27082	43105	27358	42921	27546	42680	27497
0.40	36514	27159	36791	26897	37133	26982	37237	27292	37048	27529	36765	27500
0.50	31889	26759	32148	26437	32538	26494	32689	26827	32504	27112	32187	27111
0.60	28135	26180	28404	25799	28835	25818	29036	26164	28866	26495	28520	26529
0.70	25062	25510	25310	25080	25776	25053	26029	25404	25882	25778	25514	25852
0.80	22490	24826	22707	24332	23199	24255	23506	24600	23390	25015	23006	25132
0.90	20308	24131	20485	23587	20996	23453	21357	23785	21278	24235	20885	24399
1.00	18440	23449	18568	22860	19090	22666	19503	22976	19468	23456	19073	23670
1.20	15424	22157	15433	21496	15951	21174	16462	21418	16529	21940	16151	22256
1.40	13126	20974	12994	20273	13474	19821	14067	19969	14249	20508	13918	20924
1.60	11351	19899	11064	19192	11470	18617	12123	18646	12429	19172	12170	19678
1.80	9969	18916	9522	18242	9823	17558	10508	17450	10936	17933	10773	18513
2.00	8888	18007	8285	17405	8453	16635	9138	16380	9682	16789	9635	17423
2.20	8041	17156	7296	16662	7308	15836	7959	15431	8603	15738	8687	16399
2.40	7375	16346	6509	15995	6350	15147	6933	14598	7656	14778	7879	15438
2.60	6848	15564	5892	15385	5555	14553	6035	13872	6810	13907	7174	14533
2.80	6424	14801	5416	14816	4901	14039	5249	13248	6045	13123	6544	13685
3.00	6075	14050	5055	14272	4373	13590	4564	12716	5345	12426	5967	12894
3.20	5775	13307	4788	13742	3958	13191	3971	12267	4703	11813	5428	12159
3.40	5502	12572	4594	13213	3643	12827	3467	11890	4113	11282	4917	11483
3.60	5240	11847	4455	12679	3416	12484	3048	11575	3575	10830	4427	10868
3.80	4972	11136	4352	12134	3266	12150	2710	11310	3089	10452	3954	10317
4.00	4689	10446	4269	11576	3181	11813	2450	11082	2656	10142	3499	9830
4.20	4383	9785	4191	11006	3147	11466	2264	10880	2279	9894	3062	9409
4.40	4049	9162	4105	10425	3151	11099	2146	10691	1961	9699	2647	9053
4.60	3687	8585	3999	9840	3179	10709	2090	10504	1703	9547	2260	8761
4.80	3297	8063	3864	9256	3220	10292	2088	10308	1506	9429	1904	8529
5.00	2885	7605	3694	8682	3260	9850	2131	10095	1371	9334	1586	8353
5.50	1806	6772	3093	7357	3280	8650	2364	9443	1282	9125	986	8114





续附表 14

$u$	24.0		25.0		26.0		27.0		28.0		29.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87540	10643	87571	10619	87606	10632	87614	10666	87591	10690	87560	10683
0.02	82524	14055	82563	14021	82618	14038	82629	14087	82596	14121	82553	14112
0.03	78764	16326	78818	16284	78879	16305	78893	16364	78853	16405	78800	16395
0.04	75663	18024	75724	17974	75795	17998	75812	18066	75767	18115	75705	18103
0.05	72988	19367	73056	19311	73135	19336	73155	19412	73105	19467	73036	19455
0.06	70618	20465	70692	20402	70779	20430	70802	20513	70743	20573	70671	20561
0.07	68481	21382	68561	21314	68655	21342	68680	21432	68622	21498	68540	21485
0.08	66530	22161	66614	22087	66715	22117	66744	22212	66682	22283	66594	22271
0.09	64731	22830	64820	22751	64927	22781	64958	22882	64894	22958	64800	22945
0.10	63061	23409	63153	23325	63267	23355	63301	23461	63234	23542	63135	23530
0.12	60035	24356	60134	24262	60260	24293	60299	24408	60227	24498	60118	24487
0.14	57346	25089	57452	24985	57588	25016	57633	25139	57557	25233	57440	25229
0.16	54926	25661	55036	25548	55182	25578	55233	25709	55154	25816	55029	25808
0.18	52725	26110	52840	25987	52995	26016	53051	26154	52970	26269	52837	26264
0.20	50707	26460	50826	26329	50990	26356	51052	26500	50969	26624	50829	26612
0.30	42597	27281	42726	27107	42929	27120	43023	27288	42937	27448	42765	27462
0.40	36645	27262	36772	27047	37007	27038	37135	27220	37054	27415	36858	27450
0.50	32027	26860	32144	26606	32405	26570	32566	26759	32499	26984	32285	27046
0.60	28328	26273	28418	25983	28699	25916	28895	26104	28846	26356	28620	26447
0.70	25269	25598	25345	25276	25639	25173	25871	25354	25846	25631	25612	25753
0.80	22718	24889	22765	24538	23067	24397	23333	24565	23335	24862	23099	25016
0.90	20556	24173	20569	23798	20872	23617	21170	23766	21204	24079	20972	24267
1.00	18704	23467	18677	23073	18976	22851	19305	22976	19374	23301	19150	23522
1.20	15711	22119	15597	21701	15870	21398	16250	21460	16394	21794	16202	22081
1.40	13422	20872	13211	20455	13435	20075	13851	20059	14076	20382	13933	20727
1.60	11640	19729	11330	19336	11484	18891	11916	18786	12220	19077	12144	19468
1.80	10233	18678	9829	18335	9895	17840	10322	17640	10699	17878	10703	18301
2.00	9117	17707	8622	17437	8586	16911	8986	16615	9425	16782	9518	17218
2.20	8208	16800	7648	16625	7502	16092	7851	15704	8338	15784	8524	16213
2.40	7472	15947	6863	15884	6603	15368	6880	14899	7394	14880	7673	15281
2.60	6864	15137	6230	15199	5858	14727	6044	14191	6565	14065	6932	14416
2.80	6353	14364	5720	14557	5245	14154	5323	13571	5827	13335	6273	13616
3.00	5913	13621	5311	13947	4746	13635	4705	13028	5168	12685	5678	12879
3.20	5523	12906	4980	13360	4344	13160	4179	12554	4577	12112	5133	12203
3.40	5165	12218	4710	12788	4027	12717	3735	12138	4047	11610	4628	11588
3.60	4828	11559	4485	12226	3781	12294	3369	11770	3575	11174	4157	11033
3.80	4499	10930	4290	11672	3595	11884	3073	11441	3159	10798	3716	10538
4.00	4171	10336	4112	11125	3457	11479	2842	11140	2798	10476	3304	10101
4.20	3841	9780	3942	10584	3356	11074	2669	10858	2489	10201	2922	9721
4.40	3504	9267	3769	10053	3281	10663	2548	10586	2234	9964	2570	9394
4.60	3162	8801	3587	9535	3222	10245	2471	10318	2031	9757	2252	9118
4.80	2815	8386	3390	9034	3169	9820	2432	10044	1877	9573	1969	8888
5.00	2462	8025	3175	8557	3112	9388	2421	9762	1770	9402	1723	8699
5.50	1634	7369	2552	7503	2912	8298	2464	8990	1684	8987	1288	8363





续附表 14

$u$	30.0		31.0		32.0		33.0		34.0		35.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87549	10655	87566	10632	87593	10634	87606	10657	87594	10678	87570	10680
0.02	82537	14072	82561	14040	82599	14042	82617	14074	82601	14105	82567	14107
0.03	78780	16347	78809	16307	78856	16309	78878	16348	78859	16386	78818	16390
0.04	75682	18408	75715	18001	75769	18004	75795	18048	75773	18092	75726	18097
0.05	73010	19393	73046	19341	73106	19343	73136	19392	73112	19442	73059	19448
0.06	70642	20494	70681	20436	70747	20437	70781	20491	70754	20546	70697	20553
0.07	68508	21413	68549	21350	68621	21351	68657	21409	68629	21468	68567	21476
0.08	66559	22194	66602	22126	66679	22126	66718	22188	66689	22251	66623	22261
0.09	64762	22864	64807	22792	64889	22791	64931	22856	64901	22924	64831	22934
0.10	63094	23445	63141	23368	63227	23366	63272	23434	63241	23506	63167	23518
0.12	60072	24395	60122	24310	60215	24306	60267	24380	60234	24459	60154	24474
0.14	57387	25103	57439	25037	57540	25031	57597	25109	57564	25195	57477	25213
0.16	54970	25704	55024	25604	55132	25595	55195	25677	55161	25770	55068	25791
0.18	52773	26154	52827	26047	52942	26035	53010	26121	52976	26220	52879	26244
0.20	50759	26506	50814	26392	50935	26377	51008	26467	50975	26572	50872	26599
0.30	42666	27331	42719	27185	42864	27152	42965	27252	42937	27385	42815	27430
0.40	36729	27312	36774	27137	36937	27083	37064	27186	37047	27342	36913	27408
0.50	32126	26906	32156	26707	32331	26629	32484	26729	32482	26904	32341	26993
0.60	28431	26312	28442	26092	28625	25987	28802	26080	28820	26271	28675	26383
0.70	25395	25628	25383	25390	25568	25258	25769	25338	25808	25542	25665	25678
0.80	22855	24907	22817	24655	23000	24495	23222	24559	23285	24771	23148	24931
0.90	20702	24177	20636	23916	20811	23727	21053	23771	21142	23988	21014	24172
1.00	18858	23457	18760	23189	18924	22973	19182	22994	19299	23212	19183	23419
1.20	15874	22074	15711	21808	15841	21540	16122	21506	16295	21715	16216	21962
1.40	13585	20790	13355	20543	13435	20232	13726	20136	13953	20320	13923	20599
1.60	11793	19608	11500	19398	11517	19056	11801	18893	12079	19038	12106	19336
1.80	10367	18520	10018	18364	9964	18004	10225	17775	10544	17867	10635	18171
2.00	9216	17515	8823	17427	8692	17067	8914	16775	9263	16803	9420	17099
2.20	8276	16582	7854	16573	7644	16230	7811	15884	8175	15840	8399	16111
2.40	7496	15709	7062	15788	6776	15480	6876	15092	7239	14971	7524	15202
2.60	6840	14890	6413	15060	6058	14805	6079	14388	6425	14190	6764	14366
2.80	6277	14117	5879	14377	5464	14192	5400	13763	5711	13491	6092	13600
3.00	5785	13386	5434	13732	4976	13629	4823	13208	5082	12867	5491	12900
3.20	5345	12695	5061	13117	4576	13107	4334	12712	4527	12314	4948	12263
3.40	4943	12041	4742	12526	4250	12615	3925	12265	4039	11824	4453	11687
3.60	4567	11426	4464	11956	3986	12146	3587	11860	3610	11392	4000	11169
3.80	4209	10850	4214	11404	3771	11693	3311	11487	3239	11010	3586	10706
4.00	3864	10314	3981	10871	3595	11252	3090	11138	2921	10673	3208	10297
4.20	3527	9820	3758	10356	3448	10817	2918	10805	2653	10373	2865	9937
4.40	3198	9371	3539	9861	3321	10387	2787	10483	2434	10103	2557	9623
4.60	2876	8968	3317	9390	3206	9961	2690	10166	2259	9857	2285	9350
4.80	2563	8611	3090	8944	3095	9538	2620	9848	2126	9626	2049	9113
5.00	2261	8301	2856	8527	2981	9121	2569	9527	2030	9405	1849	8908
5.50	1583	7726	2244	7635	2657	8119	2482	8700	1925	8859	1508	8492



续附表 14

$u$	36.0		37.0		38.0		39.0		40.0		41.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87557	10662	87564	10642	87585	10637	87599	10651	87595	10670	87577	10677
0.02	82548	14082	82559	14053	82587	14047	82608	14066	82602	14093	82577	14103
0.03	78794	16359	78806	16323	78841	16315	78866	16339	78860	16372	78830	16384
0.04	75698	18062	75712	18020	75752	18010	75781	18038	75774	18076	75740	18090
0.05	73027	19408	73042	19362	73087	19351	73120	19381	73113	19424	73074	19440
0.06	70661	20510	70678	20459	70727	20446	70763	20479	70755	20525	70714	20543
0.07	68529	21430	68545	21375	68599	21361	68638	21396	68630	21446	68585	21466
0.08	66581	22212	66599	22153	66655	22137	66698	22174	66690	22228	66642	22250
0.09	64786	22883	64804	22821	64864	22802	64910	22842	64902	22899	64815	22922
0.10	63119	23465	63137	23398	63200	23379	63249	23420	63241	23480	63188	23505
0.12	60100	24416	60119	24343	60187	24320	60241	24364	60234	24430	60177	24459
0.14	57418	25152	57436	25073	57510	25047	57570	25093	57563	25165	57502	25197
0.16	55004	25727	55022	25642	55100	25613	55165	25660	55159	25737	55094	25773
0.18	52809	26178	52826	26087	52908	26054	52978	26104	52974	26186	52906	26225
0.20	50797	26531	50814	26435	50900	26398	50974	26449	50791	26535	50900	26578
0.30	42716	27356	42724	27238	42824	27182	42921	27235	42928	27340	42847	27402
0.40	36790	27335	36785	27197	36894	27122	37011	27172	37032	27292	36946	27372
0.50	32196	26925	32175	26772	32288	26677	32424	26718	32461	26850	32373	26948
0.60	28509	26325	28471	26161	28583	26044	28736	26075	28790	26214	28706	26331
0.70	25480	25633	25421	25461	25529	25324	25696	25341	25770	25484	25692	25619
0.80	22947	24903	22865	24727	22966	24569	23145	24569	23239	24714	23170	24865
0.90	20799	24164	20694	23986	20784	23810	20973	23790	21087	23933	21030	24100
1.00	18957	23433	18829	23257	18904	23062	19101	23022	19235	23160	19194	23341
1.20	15976	22026	15800	21866	15838	21640	16040	21554	16215	21673	16210	21877
1.40	13682	20718	13462	20586	13454	20339	13649	20204	13860	20293	13898	20510
1.60	11880	19512	11620	19420	11559	19163	11736	18981	11975	19029	12061	19248
1.80	10437	18402	10148	18362	10031	18107	10176	17880	10435	17880	10570	18089
2.00	9264	17378	8957	17397	8783	17159	8885	16894	9152	16839	9336	17027
2.20	8296	16431	7985	16514	7756	16306	7806	16012	8069	15900	8297	16055
2.40	7486	15551	7184	15701	6907	15535	6897	15224	7143	15054	7409	15166
2.60	6796	14730	6520	14946	6202	14834	6128	14519	6344	14295	6639	14354
2.80	6200	13964	5963	14240	5617	14191	5477	13886	5651	13614	5962	13613
3.00	5676	13246	5492	13575	5131	13597	4926	13317	5046	13005	5362	12940
3.20	5206	12576	5087	12946	4726	13043	4461	12801	4519	12460	4825	12330
3.40	4778	11950	4734	12348	4389	12519	4071	12329	4060	11973	4343	11779
3.60	4382	11367	4419	11778	4106	12012	3747	11895	3663	11538	3908	11284
3.80	4011	10829	4132	11235	3867	11543	3479	11489	3322	11147	3517	10842
4.00	3660	10333	3864	10717	3661	11081	3260	11106	3032	10794	3166	10447
4.20	3326	9881	3610	10225	3479	10632	3082	10739	2789	10472	2853	10096
4.40	3009	9473	3363	9760	3315	10196	2938	10383	2590	10175	2578	9785
4.60	2707	9108	3120	9324	3163	9770	2821	10034	2430	9896	2339	9508
4.80	2422	8786	2880	8918	3011	9356	2724	9690	2305	9631	2135	9261
5.00	2156	8505	2641	8544	2861	8956	2642	9348	2211	9374	1965	9038
5.50	1588	7967	2054	7759	2464	8028	2459	8498	2075	8739	1680	8554





续附表 14

$u$	4.20		4.30		4.40		4.50		4.60		4.70	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87563	10666	87564	10649	87579	10641	87593	10649	87594	10664	87582	10673
0.02	82557	14088	82559	14063	82579	14052	82599	14063	82601	14085	82584	14097
0.03	78805	16365	78806	16335	78831	16321	78856	16334	78859	16361	78838	16377
0.04	75710	18069	75712	18035	75741	18018	75770	18033	75773	18064	75749	18082
0.05	73041	19417	73043	19378	73075	19359	73107	19375	73111	19410	73085	19431
0.06	70677	20519	70678	20476	70713	20455	70749	20473	70753	20511	70725	20534
0.07	68546	21440	68546	21394	68584	21371	68623	21389	68628	21430	68597	21456
0.08	66600	22222	66600	22173	66640	22148	66681	22167	66687	22211	66655	22238
0.09	64806	22894	64806	22842	64848	22814	64892	22834	64899	22881	64864	22911
0.10	63140	23475	63139	23421	63183	23392	63230	23412	63238	23461	63202	23493
0.12	60123	24427	60121	24368	60169	24335	60220	24356	60230	24409	60191	24445
0.14	57443	25164	57440	25099	57490	25063	57547	25085	57558	25142	57517	25181
0.16	55031	25739	55026	25670	55079	25630	55140	25652	55153	15713	55111	25756
0.18	52838	26190	52831	26117	52887	26073	52952	26096	52967	26160	52923	26207
0.20	50828	26543	50819	26466	50877	26419	50946	26441	50964	26509	50918	26559
0.30	42755	27367	42735	27275	42799	27210	42886	27229	42916	27309	42866	27375
0.40	36836	27343	36802	27239	36869	27157	36970	27169	37014	27257	36964	27339
0.50	32248	26929	32199	26817	32264	26718	32378	26720	32436	26814	32391	26910
0.60	28567	26323	28501	26206	28561	26092	28686	26081	28760	26177	28720	26288
0.70	25542	25626	25458	25507	25511	25378	25644	25353	25733	25448	25703	25571
0.80	23011	24888	22910	24771	22952	24628	23091	24587	23196	24679	23177	24813
0.90	20865	24142	20746	24029	20775	23873	20917	23816	21038	23901	21032	24044
1.00	19025	23402	18888	23296	18902	23130	19045	23054	19181	23131	19189	23282
1.20	16042	21979	15871	21895	15850	21713	15987	21601	16150	21654	16192	21814
1.40	13742	20653	13544	20601	13483	20413	13604	20265	13787	20287	13866	20447
1.60	11928	19432	11710	19419	11606	19235	11701	19055	11898	19038	12014	19189
1.80	10470	18308	10241	18342	10094	18172	10155	17964	10356	17905	10509	18038
2.00	9279	17275	9048	17357	8861	17213	8881	16985	9076	16882	9262	16988
2.20	8290	16321	8070	16454	7848	16345	7821	16107	8000	15960	8213	16030
2.40	7457	15440	7259	15621	7009	15556	6932	15318	7085	15130	7318	15157
2.60	6744	14623	6580	14849	6311	14834	6183	14607	6301	14384	6543	14364
2.80	6125	13865	6005	14129	5728	14169	5551	13965	5625	13714	5867	13643
3.00	5579	13162	5511	13454	5239	13552	5017	13381	5040	13111	5272	12989
3.20	5090	12510	5082	12820	4826	12974	4567	12847	4535	12569	4744	12398
3.40	4648	11907	4703	12222	4476	12430	4188	12355	4099	12081	4275	11865
3.60	4242	11351	4361	11657	4175	11914	3869	11896	3724	11638	3857	11385
3.80	3866	10841	4049	11124	3914	11421	3603	11466	3403	11236	3486	10953
4.00	3517	10375	3759	10623	3684	10948	3380	11057	3132	10866	3158	10565
4.20	3192	9952	3485	10152	3475	10494	3192	10665	2905	10524	2869	10216
4.40	2888	9572	3223	9712	3283	10058	3034	10287	2717	10204	2619	9902
4.60	2606	9231	2970	9304	3101	9638	2897	9919	2563	9900	2403	9617
4.80	2346	8930	2725	8929	3924	9237	2777	9559	2439	9608	2222	9357
5.00	2109	8664	2489	8586	2749	8854	2668	9206	2339	9323	2071	9117
5.50	1625	8137	1935	7875	2310	7990	2412	8355	2168	8628	1818	8573





续附表 14

$u$	48.0		49.0		50.0		52.0		54.0		56.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87568	10668	87565	10654	87575	10644	87593	10660	87573	10669	87573	10648
0.02	82564	14090	82560	14071	82574	14057	82599	14078	82571	14091	82571	14062
0.03	78814	16369	78808	16345	78825	16328	78856	16353	78822	16370	78821	16334
0.04	75721	18073	75714	18045	75734	18025	75769	18055	75730	18074	75729	18033
0.05	73053	19421	73046	19390	73067	19367	73170	19400	73064	19422	73062	19376
0.06	70690	20523	70682	20489	70704	20464	70749	20499	70702	20524	70699	20473
0.07	68560	21444	68550	21408	68575	21381	68623	21418	68572	21445	68569	21391
0.08	66615	22226	66604	22188	66630	22159	66682	22198	66628	22227	66624	22169
0.09	64822	22898	64810	22857	64837	22826	64893	22867	64836	22899	64831	22837
0.10	63157	23480	63144	23437	63172	23404	63232	23447	63172	23481	63166	23416
0.12	60142	24432	60127	24386	60157	24349	60223	24394	60158	24433	60150	24362
0.14	57464	25169	57446	25119	57478	25078	57550	25126	57481	25169	57471	25092
0.16	55053	25744	55034	25691	55067	25647	55145	25696	55072	25744	55059	25662
0.18	52862	26195	52840	26139	52874	26091	52958	26142	52881	26194	52866	26108
0.20	50583	26547	50829	26489	50864	26438	50953	26490	50874	26546	50856	26456
0.30	42786	27369	42749	27301	42785	27235	42901	27287	42811	27366	42778	27257
0.40	36872	27342	36821	27267	36855	27187	36994	27234	36900	27334	36850	27214
0.50	32288	26923	32223	26846	32252	26753	32412	26790	32318	26912	32259	26783
0.60	28610	26313	28531	26236	28552	26132	28730	26154	28641	26298	28553	26165
0.70	25587	25610	25494	25536	25506	25421	25699	25426	25619	25590	25509	25457
0.80	23058	24867	22951	24798	22951	24675	23157	24659	23090	24842	22959	24712
0.90	20912	24114	20792	24053	20779	23923	20995	23884	20943	24085	20791	23961
1.00	19071	23368	18938	23316	18911	23181	19134	23118	19100	23334	18928	23220
1.20	16083	21933	15930	21906	15872	21767	16097	21651	16108	21889	15898	21805
1.40	13776	20596	13608	20600	13517	20465	13730	20294	13793	20544	13533	20500
1.60	11952	19364	11777	19404	11652	19282	11840	19058	11959	19307	11698	19311
1.80	10481	18233	10307	18312	10152	18211	10299	17938	10476	18172	10205	18232
2.00	9274	17194	9111	17312	8930	17241	9025	16928	9256	17133	8989	17251
2.20	8268	16240	8126	16395	7924	16359	7957	16018	8237	16180	7987	16357
2.40	7417	15361	7304	15549	7090	15555	7053	15199	7373	15306	7154	15539
2.60	6687	14551	6610	14766	6394	14816	6282	14461	6631	14504	6456	14787
2.80	6052	13803	6018	14039	5809	14134	5621	13795	5985	13768	5866	14092
3.00	5493	13114	5506	13360	5313	13500	5054	13195	5417	13092	5363	13445
3.20	4993	12479	5058	12725	4891	12906	4566	12651	4913	12472	4930	12841
3.40	4543	11896	4659	12131	4527	12348	4146	12157	4460	11905	4553	12274
3.60	4134	11361	4299	11575	4210	11820	3787	11705	4052	11388	4221	11741
3.80	3760	10873	3969	11054	3931	11320	3481	11290	3683	10916	3925	11237
4.00	3417	10428	3664	10568	3679	10843	3221	10905	3348	10488	3657	10761
4.20	3102	10026	3378	10117	3450	10390	3002	10545	3045	10100	3411	10312
4.40	2813	9664	3109	9699	3236	9958	2819	10205	2771	9750	3181	9888
4.60	2550	9340	2853	9314	3033	9548	2665	9880	2525	9434	2964	9489
4.80	2312	9049	2610	8962	2838	9160	2537	9567	2306	9149	2757	9115
5.00	2099	8791	2380	8643	2648	8794	2430	9263	2114	8891	2558	8766
5.50	1680	8258	1864	7981	2187	7986	2221	8527	1743	8344	2089	8005



续附表 14

$u$	58.0		60.0		62.0		64.0		66.0		68.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87591	10656	87577	10668	87572	10651	87588	10654	87579	10667	87571	10654
0.02	82596	14073	82576	14091	82569	14067	82593	14070	82580	14089	82569	14071
0.03	78852	16347	78828	16369	78819	16340	78848	16343	78833	16367	78819	16345
0.04	75765	18048	75738	18073	75727	18039	75760	18043	75743	18071	75726	18045
0.05	73102	19392	73072	19421	73059	19383	73097	19387	73078	19418	73059	19390
0.06	70744	20491	70711	20523	70697	20482	70738	20486	70718	20520	70696	20489
0.07	68617	21409	68582	21444	68566	21400	68611	21404	68590	21440	68566	21407
0.08	66676	22189	66638	22226	66621	22179	66669	22182	66646	22222	66621	22187
0.09	64886	22858	64847	22897	64828	22847	64879	22851	64855	22893	64828	22856
0.10	63224	23437	63183	23479	63163	23427	63216	23430	63192	23475	63163	23436
0.12	60214	24383	60171	24430	60147	24373	60206	24376	60180	24425	60147	24384
0.14	57541	25114	57495	25166	57468	25105	57531	25106	57505	25160	57468	25116
0.16	55135	25684	55086	25740	55057	25676	55124	25676	55097	25734	55057	25688
0.18	52947	26129	52896	26190	52864	26122	52935	26121	52908	26183	52864	26135
0.20	50941	26476	50890	26541	50854	26471	50929	26468	50902	26534	50855	26484
0.30	42885	27272	42830	27358	42777	27277	42869	27264	42844	27348	42780	27293
0.40	36974	27219	36921	27323	36851	27236	36955	27211	36935	27310	36856	27254
0.50	32388	26775	32340	26898	32253	26808	32365	26768	32355	26881	32261	26827
0.60	28702	26141	28664	26279	28559	26191	28677	26135	28678	26260	28570	26212
0.70	25668	25415	25641	25568	25519	25484	25640	25412	25655	25545	25533	25505
0.80	23123	24651	23111	24817	22972	24741	23093	24651	23123	24791	22989	24761
0.90	20958	23879	20963	24055	20809	23990	20926	23882	20973	24027	20828	24010
1.00	19094	23117	19118	23301	18949	23249	19061	23123	19126	23271	18972	23268
1.20	16054	21657	16120	21850	15927	21831	16020	21672	16121	21816	15956	21846
1.40	13686	20311	13797	20500	13589	20521	13654	20333	13791	20464	13623	20531
1.60	11797	19085	11953	19260	11740	19326	11767	19115	11940	19222	11777	19329
1.80	10261	17975	10460	18124	10252	18238	10236	18013	10438	18088	10292	18233
2.00	8993	16974	9230	17087	9039	17247	8975	17018	9200	17054	9079	17235
2.20	7933	16072	8201	16138	8038	16343	7925	16121	8163	16111	8076	16322
2.40	7040	15259	7327	15271	7203	15515	7041	15310	7283	15251	7238	15485
2.60	6281	14525	6577	14478	6500	14752	6293	14577	6527	14467	6530	14714
2.80	5634	13861	5925	13752	5904	14047	5657	13911	5872	13751	5926	14002
3.00	5080	13258	5353	13088	5392	13392	5113	13305	5299	13098	5405	13342
3.20	4605	12710	4846	12482	4948	12781	4649	12751	4794	12503	4952	12728
3.40	4198	12209	4395	11928	4560	12210	4251	12240	4347	11960	4552	12155
3.60	3850	11747	3992	11424	4215	11674	3910	11768	3949	11466	4196	11621
3.80	3553	11319	3630	10965	3905	11172	3617	11329	3595	11016	3875	11122
4.00	3300	10920	3304	10548	3624	10700	3366	10916	3281	10606	3584	10655
4.20	3084	10544	3013	10170	3365	10257	3150	10527	3301	10233	3315	10220
4.40	2900	10187	2753	9826	3123	9842	2963	10156	2754	9892	3067	9816
4.60	2743	9845	2523	9514	2897	9454	2800	9802	2537	9580	2835	9440
4.80	2608	9517	2320	9229	2683	9094	2656	9462	2348	9293	2617	9092
5.00	2491	9198	2144	8986	2479	8760	2527	9133	2184	9027	2413	8771
5.50	2244	8437	1810	8400	2014	8039	2246	8359	1877	8433	1959	8083





续附表 14

$u$	70.0		72.0		74.0		76.0		78.0		80.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87586	10652	87582	10666	87572	10657	87584	10652	87583	10664	87573	10659
0.02	82589	14068	82583	14087	82569	14074	82586	14067	82586	14084	82570	14077
0.03	78844	16341	78837	16364	78819	16349	78840	16340	78840	16361	78821	16353
0.04	75755	18040	75748	18068	75727	18050	75751	18039	75751	18064	75729	18054
0.05	73091	19384	73083	19415	73060	19395	73086	19383	73087	19411	73062	19400
0.06	70732	20482	70723	20516	70697	20495	70726	20481	70727	20511	70700	20500
0.07	68604	21400	68595	21436	68567	21414	68598	21398	68599	21431	68570	21420
0.08	66661	22179	66653	22218	66622	22194	66655	22177	66657	22212	66625	22200
0.09	64871	22847	64862	22888	64830	22864	64864	22845	64866	22883	64833	22870
0.10	63208	23426	63199	23469	63165	23444	63201	23424	63204	23463	63168	23450
0.12	60197	24372	60188	24419	60150	24392	60188	24370	60192	24413	60153	24399
0.14	57522	25102	57513	25154	57471	25125	57512	25100	57518	25147	57475	25133
0.16	55113	25671	55105	25727	55060	25698	55104	25670	55111	25719	55065	25705
0.18	52924	26116	52916	26176	52868	26145	52914	26115	52922	26167	52873	26154
0.20	50917	26464	50911	26526	50859	26495	50906	26462	50916	26517	50864	26504
0.30	42854	27260	42853	27337	42786	27305	42840	27259	42859	27325	42764	27315
0.40	36937	27208	36945	27296	36865	27268	36921	27209	36950	27282	36875	27278
0.50	32345	26767	32364	26864	32271	26842	32328	26770	32368	26848	32284	26852
0.60	28655	26136	28687	26241	28583	26226	28637	26142	28689	26223	28589	26236
0.70	25617	25415	25662	25524	25549	25520	25579	25423	25663	25504	25565	25529
0.80	23068	24657	23128	24768	23008	24775	23049	24667	23127	24747	23026	24783
0.90	20901	23891	20976	24002	20849	24023	20882	23904	20972	23980	20870	24029
1.00	19036	23135	19126	23244	18995	23279	19017	23151	19120	23221	19018	23283
1.20	15965	21690	16115	21787	15983	21853	15978	21711	16104	21763	16008	21853
1.40	13631	20358	13779	20434	13653	20533	13618	20383	13762	20412	13679	20527
1.60	11749	19145	11920	19194	11810	19324	11741	19175	11898	19175	11836	19313
1.80	10224	18049	10412	18063	10324	18221	10221	18081	10385	18047	10349	18204
2.00	8970	17058	9168	17033	9110	17215	8974	17092	9136	17023	9132	17192
2.20	7927	16163	8125	16097	8104	16296	7939	16197	8091	16092	8122	16267
2.40	7053	15353	7242	15244	7261	15452	7072	15386	7205	15247	7273	15419
2.60	6314	14618	6484	14468	6547	14676	6340	14648	6447	14478	6553	14640
2.80	5686	13949	5828	13761	5935	13960	5719	13974	5793	13779	5934	13922
3.00	5151	13337	5257	13117	5406	13297	5189	13356	5225	13143	5397	13259
3.20	4693	12775	4755	12531	4943	12682	4736	12786	4728	12563	4926	12646
3.40	4301	12256	4313	11997	4534	12111	4346	12258	4293	12035	4509	12078
3.60	3963	11774	3923	11510	4169	11580	4009	11767	3910	11553	4137	11552
3.80	3672	11323	3578	11066	3840	11086	3717	11307	3573	11111	3802	11064
4.00	3420	10899	3273	10660	3541	10627	3462	10874	3278	10707	3498	10612
4.20	3201	10499	3004	10288	3266	10201	3238	10465	3019	10334	3221	10195
4.40	3009	10118	2768	9947	3013	9806	3039	10076	2792	9990	2966	9809
4.60	2838	9755	2526	9632	2779	9440	2860	9707	2595	9670	2733	9453
4.80	2685	9406	2384	9339	2562	9104	2697	9354	2424	9371	2518	9126
5.00	2544	9072	2230	9066	2361	8794	2546	9317	2277	9090	2321	8826
5.50	2231	8294	1938	8447	1922	8130	2205	8243	1994	8445	1901	8179





续附表 14

$u$	82.0		84.0		86.0		88.0		90.0		92.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87581	10651	87584	10662	87574	10660	87579	10652	87585	10660	87575	10662
0.02	82583	14067	82587	14082	82572	14080	82580	14067	82588	14079	82574	14081
0.03	78836	16340	78841	16358	78823	16355	78833	16340	78842	16355	78825	16357
0.04	75746	18039	75753	18060	75732	18057	75743	18040	75754	18057	75734	18060
0.05	73081	19383	73089	19406	73065	19403	73077	19384	73090	19402	73068	19406
0.06	70720	20481	70729	20579	70703	20504	70716	20482	70730	20502	70706	20506
0.07	68592	21399	68601	21426	68573	21424	68587	21400	68602	21422	68577	21426
0.08	66649	22177	66659	22207	66629	22204	66643	22179	66660	22202	66633	22207
0.09	64857	22846	64869	22877	64837	22874	64852	22874	64870	22872	64841	22377
0.10	63194	23424	63206	23457	63172	23455	63188	23426	63207	23452	63177	23458
0.12	60181	24370	60195	24406	60158	24404	60175	24372	60196	24400	60163	24408
0.14	57504	25101	57521	25139	57480	25138	57498	25103	57521	25132	57486	25142
0.16	55095	25671	55113	25711	55070	25711	55088	25673	55114	25704	55076	25714
0.18	52904	26116	52925	26150	52879	26159	52879	26119	52925	26151	52886	26163
0.20	50897	26464	50919	26508	50871	26510	50889	26467	50919	26500	50878	26513
0.30	42829	27262	42861	27314	42803	27322	42819	27267	42860	27304	42812	27325
0.40	36908	27214	36952	27269	36885	27285	36898	27220	36950	27258	36896	27288
0.50	32314	26777	32368	26834	32297	26858	32304	26785	32365	26821	32309	26860
0.60	28622	26150	28688	26207	28612	26241	28612	26161	28683	26193	28626	26242
0.70	25583	25434	25659	25487	25582	25538	25573	25446	25652	25473	25597	25532
0.80	23035	24680	23122	24729	23044	24785	23025	24694	23113	24715	23060	24783
0.90	20868	23919	20965	23961	20889	24029	20860	23935	20954	23948	20905	24026
1.00	19004	23168	19110	23203	19037	23282	18997	23186	19097	23189	19054	23276
1.20	15969	21732	16090	21746	16029	21847	15965	21753	16073	21734	16046	21834
1.40	13612	20408	13743	20397	13700	20517	13612	20431	13723	20388	13716	20503
1.60	11740	19203	11875	19163	11856	19297	11745	19226	11852	19158	11869	19279
1.80	10226	18110	10358	18040	10367	18184	10237	18133	10333	18040	10377	18162
2.00	8985	18121	9107	17021	9146	17168	9001	17143	9081	17026	9152	17143
2.20	7956	16224	8060	16096	8131	16239	7977	16244	8035	16107	8132	16213
2.40	7095	15410	7175	15257	7277	15389	7120	15425	7151	15273	7272	15361
2.60	6368	14667	6419	14495	6550	14608	6398	14678	6398	14516	6540	14581
2.80	5752	13988	5767	13802	5924	13890	5784	13992	5750	13828	5908	13865
3.00	5226	13363	5203	13172	5380	13229	5259	13361	5191	13201	5359	13206
3.20	4774	12786	4712	12597	4903	12629	4808	12777	4706	12629	4877	12600
3.40	4385	12251	4283	12072	4481	12055	4417	12235	4284	12106	4451	12042
3.60	4047	11751	3908	11592	4104	11534	4076	11729	3916	11626	4071	11527
3.80	3752	11283	3580	11151	3765	11053	3777	11255	3594	11184	3730	11053
4.00	3492	10843	3292	10745	3458	10609	3511	10810	3314	10776	3423	10616
4.20	3262	10427	3041	10370	3180	10199	3274	10390	3069	10396	3146	10213
4.40	3055	10034	2822	10022	2927	9822	3060	9994	2855	10042	2896	9843
4.60	2868	9661	2631	9696	2696	9475	2864	9620	2669	9709	2669	9501
4.80	2695	9307	2466	9389	2485	9155	2683	9266	2506	9396	2464	9187
5.00	2535	8970	2322	9100	2294	8861	2515	8932	2364	9098	2279	8898
5.50	2171	8205	2040	8431	1894	8225	2133	8180	2077	8408	1889	8267



续附表 14

$u$	94.0		96.0		98.0		100.0		102.0		104.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87573	10653	87585	10659	87577	10662	87577	10654	87584	10657	87578	10662
0.02	82578	14068	82588	14077	82576	14082	82576	14070	82587	14075	82578	14082
0.03	78830	16342	78842	16352	78828	16358	78828	16344	78841	16350	78831	16359
0.04	75740	18042	75753	18053	75737	18061	75737	18044	75752	18050	75740	18061
0.05	73074	19386	73089	19399	73071	19407	73071	19388	73088	19395	73075	19407
0.06	70712	20484	70729	20498	70710	20508	70709	20487	70728	20495	70714	20508
0.07	68583	21402	68602	21417	68581	21428	68580	21405	68601	21414	68585	21428
0.08	66639	22181	66659	22167	66637	22209	66636	22184	66658	22193	66641	22209
0.09	64847	22850	64869	22867	64846	22879	64844	22853	64867	22862	64850	22879
0.10	63183	23429	63206	23446	63182	23460	63180	23433	63205	23442	63186	23460
0.12	60170	24376	60195	24394	60169	24409	60166	24380	60193	24389	60174	24409
0.14	57492	25107	57520	25126	57492	25143	57489	25111	57518	25121	57497	25143
0.16	55082	25677	55113	25697	55083	25716	55078	25682	55110	25692	55089	25716
0.18	52891	26124	52924	26114	52892	26165	52887	26129	52921	26139	52898	26164
0.20	50883	26472	50917	26493	50885	26515	50879	26477	50914	26487	50891	26515
0.30	42813	27274	42857	27295	42820	27326	42808	27281	42853	27288	42828	27325
0.40	36891	27229	36945	27248	36906	27288	36887	27237	36939	27241	36915	27286
0.50	32297	26795	32359	26811	32320	26860	32293	26806	32352	26803	32330	26856
0.60	28606	26173	28675	26183	28638	26240	28603	26184	28666	26175	28648	26235
0.70	25567	25459	25643	25463	25609	25528	25565	25472	25633	25456	25620	25522
0.80	23021	24709	23102	24705	23073	24778	23020	24723	23090	24698	23083	24770
0.90	20856	23951	20941	23938	20919	24019	20857	23966	20928	23933	20929	24009
1.00	18995	23203	19083	23181	19068	23267	18997	23210	19069	23176	19077	23256
1.20	15967	21772	16056	21728	16058	21825	15972	21788	16040	21727	16066	21811
1.40	13618	20451	13703	20385	13727	20487	13628	20466	13686	20387	13732	20470
1.60	11755	19245	11831	19159	11877	19260	11769	19260	11813	19165	11879	19242
1.80	10251	18151	10312	18045	10381	18141	10268	18163	10294	18055	10379	18122
2.00	9020	17158	9060	17036	9151	17121	9040	17167	9044	17050	9146	17101
2.20	8000	16255	8015	16122	8127	16190	8022	16261	8002	16139	8117	16170
2.40	7146	15433	7134	15292	7262	15339	7170	15436	7124	15313	7248	15321
2.60	6425	14680	6384	14539	6525	14560	6450	14676	6378	14563	6507	14545
2.80	5812	13989	5742	13854	5889	13847	5836	13980	5740	13880	5867	13835
3.00	5287	13352	5188	13230	5336	13192	5310	13337	5192	13256	5312	13184
3.20	4834	12762	4709	12659	4850	12590	4854	12743	4718	12684	4824	12588
3.40	4441	12214	4293	12136	4422	12037	4457	12191	4307	12159	4395	12040
3.60	4096	11703	3930	11654	4040	11528	4107	11676	3950	11675	4014	11537
3.80	3791	11225	3615	11209	3700	11060	3797	11195	3638	11226	3675	11074
4.00	3520	10776	3339	10797	3394	10629	3520	10745	3367	10809	3372	10648
4.20	3276	10355	3099	10412	3120	10233	3269	10324	3129	10419	3102	10256
4.40	3055	9958	2888	10052	2873	9868	3042	9929	2920	10053	2860	9895
4.60	2852	9585	2704	9713	2651	9531	2833	9558	2736	9707	2643	9561
4.80	2664	9234	2542	9392	2452	9221	2639	9211	2573	9380	2450	9252
5.00	2489	8904	2399	9086	2275	8934	2460	8886	2427	9068	2279	8966
5.50	2095	8167	2104	8380	1913	8302	2059	8165	2121	8349	1933	8329





续附表 14

$u$	106.0		108.0		110.0		112.0		114.0		116.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87576	10655	87584	10656	87579	10662	87576	10656	87583	10655	87580	10662
0.02	82575	14072	82586	14073	82580	14082	82575	14073	82585	14072	82582	14081
0.03	78827	16346	78840	16348	78833	16358	78826	16348	78838	16346	78835	16357
0.04	75736	18046	75751	18048	75743	18061	75735	18049	75749	18047	75745	18060
0.05	73070	19391	73086	19393	73078	19407	73069	19393	73048	19391	73080	19406
0.06	70708	20490	70726	20492	70717	20508	70707	20493	70724	20490	70719	20506
0.07	68578	21408	68598	21411	68588	21427	68578	21412	68596	21408	68591	21426
0.08	66634	22188	66656	22190	66645	22208	66633	22191	66653	22188	66648	22207
0.09	64842	22857	64865	22859	64854	22878	64841	22861	64862	22857	64857	22877
0.10	63178	23437	63202	23439	63191	23459	63177	23441	63199	23436	63194	23457
0.12	60164	24384	60190	24386	60178	24408	60163	24388	60187	24383	60182	24406
0.14	57486	25116	57515	25117	57502	25142	57485	25121	57511	25115	57506	25140
0.16	55076	25687	55106	25688	55094	25715	55075	25692	55102	25685	55098	25715
0.18	52885	26134	52917	26134	52904	26163	52884	26140	52912	26131	52908	26160
0.20	50876	26483	50910	26482	50897	26513	50875	26489	50905	26479	50902	26510
0.30	42806	27288	42847	27283	42835	27322	42806	27295	42841	27280	42840	27318
0.40	36885	27246	36932	27236	36923	27281	36886	27254	36925	27233	36928	27276
0.50	32292	26815	32343	26799	32338	26851	32294	26824	32335	26796	32343	26844
0.60	28063	26195	28657	26171	28656	26228	28606	26205	28647	26170	28661	26221
0.70	25567	25484	25622	25452	25627	25514	25571	25494	25611	25452	25632	25505
0.80	23023	24735	23078	24696	23091	24761	23028	24745	23067	24696	23095	24751
0.90	20861	23979	20915	23931	20935	23998	20868	23989	20904	23933	20939	23987
1.00	19003	23232	19055	23176	19083	23244	19011	23242	19043	23179	19085	23232
1.20	15981	21800	16025	21729	16070	21797	15992	21809	16013	21735	16070	21783
1.40	13640	20478	13671	20393	13733	20455	13653	20485	13659	20402	13730	20441
1.60	11784	19269	11798	19174	11877	19226	11799	19274	11788	19186	11870	19211
1.80	10286	18170	10281	18068	10373	18105	10303	18172	10273	18083	10364	18092
2.00	9060	17170	9033	17066	9136	17085	9078	17168	9028	17083	9124	17073
2.20	8043	16260	7994	16158	8104	16156	8061	16254	7992	16176	8088	16146
2.40	7191	15428	7120	15334	7232	15309	7208	15418	7121	15353	7214	15303
2.60	6470	14666	6378	14585	6487	14536	6486	14652	6384	14604	6468	14533
2.80	5855	13965	5745	13902	5846	13830	5869	13948	5755	13921	5825	13831
3.00	5326	13319	5201	13277	5289	13184	5336	13299	5215	13294	5268	13189
3.20	4867	12721	4732	12704	4801	12592	4873	12699	4749	12719	4781	12601
3.40	4465	12166	4325	12177	4372	12049	4466	12142	4345	12188	4354	12062
3.60	4110	11649	3972	11689	3993	11550	4107	11625	3994	11696	3977	11567
3.80	3795	11168	3663	11236	3656	11092	3787	11144	3688	11238	3644	11112
4.00	3512	10718	3394	10814	3357	10670	3499	10696	3419	10811	3349	10693
4.20	3256	10298	3157	10418	3091	10281	3239	10279	3181	10410	3088	10306
4.40	3023	9905	2948	10046	2854	9922	3001	9889	2971	10033	2856	9948
4.60	2809	9539	2762	9695	2643	9590	2784	9527	2783	9677	2650	9615
4.80	2612	9196	2597	9362	2456	9281	2585	9189	2614	9340	2468	9305
5.00	2429	8876	2448	9045	2291	8993	2401	8876	2460	9020	2308	9014
5.50	2027	8171	2128	8318	1958	8348	2000	8185	2127	8288	1984	8360





续附表 14

$u$	118.0		120.0		122.0		124.0		126.0		128.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87576	10657	87582	10655	87581	10661	87576	10658	87581	10654	87582	10660
0.02	82575	14075	82583	14071	82583	14080	82575	14076	82582	14071	82584	14079
0.03	78826	16350	78836	16345	78836	16356	78827	16352	78835	16345	78837	16355
0.04	75735	18051	75747	18046	75747	18058	75736	18053	75745	18045	75748	18056
0.05	73069	19396	73082	19390	73082	19404	73069	19398	73080	19390	73083	19402
0.06	70707	20496	70721	20489	70722	20504	70708	20498	70719	20489	70723	20502
0.07	68578	21415	68593	21407	68593	21424	68578	21418	68590	21407	68595	21422
0.08	66633	22195	66650	22187	66650	22204	66634	22198	66647	22186	66652	22202
0.09	64841	22864	64859	22856	64860	22874	64842	22868	64856	22855	64861	22872
0.10	63177	23444	63195	23435	63197	23455	63178	23448	63192	23434	63198	23452
0.12	60163	24393	60183	24382	60185	24404	60164	24396	60179	24381	60186	24400
0.14	57486	25125	57507	25113	57509	25137	57487	25129	57503	25113	57511	25133
0.16	55076	25697	55098	25684	55101	25709	55077	25701	55094	25683	55103	25705
0.18	52885	26145	52908	26130	52911	26156	52886	26149	52903	26130	52913	26152
0.20	50876	26494	50900	26478	50905	26506	50878	26498	50896	26478	50907	26502
0.30	42807	27302	42835	27279	42844	27313	42810	27307	42829	27280	42846	27307
0.40	36889	27261	36918	27232	36932	27270	36893	27267	36911	27234	36933	27263
0.50	32298	26832	32327	26797	32346	26837	32303	26838	32319	26799	32347	26829
0.60	28610	26213	28638	26171	28664	26212	28617	26218	28630	26174	28664	26204
0.70	25577	25502	25602	25454	25634	25496	25584	25507	25594	25458	25634	25487
0.80	23035	24753	23057	24699	23096	24741	23044	24758	23049	24705	23094	24731
0.90	20876	23996	20894	23937	20939	23977	20886	24011	20886	23944	20936	23967
1.00	19021	23248	19033	23185	19048	23221	19031	23252	19025	23192	19081	23211
1.20	16004	21815	16003	21744	16066	21772	16016	21817	15997	21753	16060	21762
1.40	13667	20488	13651	20413	13724	20429	13680	20487	13646	20425	13715	20420
1.60	11814	19274	11781	19199	11861	19200	11828	19271	11779	19212	11851	19193
1.80	10319	18169	10269	18098	10352	18082	10332	18162	10269	18112	10339	18076
2.00	9093	17162	9027	17099	9110	17066	9106	17153	9030	17114	9095	17062
2.20	8076	16244	7994	16193	8012	16142	8087	16232	8001	16208	8057	16141
2.40	7221	15405	7127	15370	7197	15301	7230	15391	7137	15384	7181	15304
2.60	6497	14637	6393	14620	6450	14535	6502	14620	6406	14632	6434	14542
2.80	5876	13930	5768	13935	5808	13837	5878	13912	5783	13944	5792	13846
3.00	5340	13279	5231	13306	5251	13198	5338	13260	5248	13312	5238	13211
3.20	4873	12678	4768	12727	4766	12614	4867	12659	4787	12730	4756	12630
3.40	4462	12121	4366	12192	4341	12079	4453	12103	4386	12192	4334	12096
3.60	4098	11605	4016	11696	3968	11587	4085	11588	4036	11691	3964	11606
3.80	3773	11125	3710	11234	3639	11134	3757	11112	3729	11225	3639	11154
4.00	3482	10680	3440	10802	3348	10716	3462	10669	3457	10790	3352	10736
4.20	3218	10266	3201	10397	3091	10329	3196	10259	3216	10381	3100	10348
4.40	2978	9881	2988	10016	2864	9970	2955	9879	2999	9997	2876	9988
4.60	2759	9523	2797	9657	2663	9636	2736	9525	2804	9635	2679	9651
4.80	2559	9190	2623	9317	2485	9323	2536	9198	2626	9294	2504	9335
5.00	2375	8882	2465	8995	2328	9029	2353	8894	2463	8971	2350	9037
5.50	1979	8204	2119	8263	2010	8363	1965	8225	2106	8242	2034	8360



续附表 14

$u$	130.0		132.0		134.0		136.0		138.0		140.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87576	10659	87580	10655	87582	10659	87577	10660	87579	10655	87582	10658
0.02	82576	14078	82580	14071	82584	14078	82577	14079	82579	14072	82584	14077
0.03	78827	16353	78833	16345	78838	16353	78829	16354	78831	16346	78833	16352
0.04	75737	18055	75743	18045	75749	18055	75738	18056	75741	18046	75749	18053
0.05	73071	19400	73077	19390	73048	19400	73072	19402	73075	19391	73084	19398
0.06	70709	20500	70716	20489	70724	20500	70711	20502	70714	20490	70724	20498
0.07	68580	21420	68583	21407	68596	21419	68582	21422	68585	21408	68596	21417
0.08	66636	22200	66644	22187	66653	22199	66633	22202	66642	22188	66653	22197
0.09	64844	22870	64853	22856	64862	22869	64846	22872	64850	22857	64862	22866
0.10	63180	23450	63189	23435	63199	23449	63182	23452	63186	23436	63199	23446
0.12	60166	24399	63176	24382	60187	24397	60169	24401	60173	24383	60187	24394
0.14	57489	25132	57499	25114	57512	25130	57492	25134	57496	25115	57512	25126
0.16	55080	25704	55090	25684	55104	25701	55083	25707	55087	25686	55103	25698
0.18	52889	26152	52899	26131	52914	26148	52892	26155	52896	26133	52914	26145
0.20	50881	26502	50891	26479	50908	26497	50885	26504	50888	26481	50907	26493
0.30	42814	27311	42824	27282	42846	27302	42819	27313	42820	27285	42845	27297
0.40	36898	27271	36905	27236	36933	27257	36903	27273	36901	27240	36931	27252
0.50	32309	26842	32313	26802	32346	26823	32315	26844	32309	26807	32344	26817
0.60	28623	26222	28624	26178	28663	26197	28631	26223	28620	26184	28659	26191
0.70	25592	25511	25588	25464	25631	25479	25600	25511	25584	25470	25627	25473
0.80	23052	24761	23043	24711	23091	24724	23061	24761	23040	24719	23086	24717
0.90	20895	24003	20880	23951	20932	23959	20904	24002	20877	23960	20926	23953
1.00	19041	23253	19020	23201	19075	23204	19051	23251	19018	23210	19068	23198
1.20	16027	21815	15993	21764	16053	21755	16036	21811	15993	21774	16044	21750
1.40	13691	20483	13645	20436	13706	20414	13701	20477	13646	20447	13695	20411
1.60	11839	19264	11780	19225	11839	19189	11847	19256	11784	19236	11828	19188
1.80	10342	18153	10273	18125	10327	18074	10349	18143	10279	18135	10315	18076
2.00	9114	17141	9036	17126	9082	17063	9119	17129	9045	17136	9069	17067
2.20	8093	16218	8010	16219	8043	16145	8096	16205	8021	16227	8031	16152
2.40	7234	15375	7149	15393	7167	15310	7234	15361	7162	15399	7157	15320
2.60	6503	14603	6420	14639	6422	14551	6500	14589	6435	14643	6413	14563
2.80	5876	13895	5799	13949	5782	13858	5869	13881	5814	13949	5776	13872
3.00	5332	13244	5265	13314	5230	13226	5323	13230	5281	13311	5226	13241
3.20	4858	12643	4804	12728	4750	12646	4845	12632	4820	12722	4750	12662
3.40	4440	12089	4403	12186	4332	12114	4425	12080	4417	12177	4335	12130
3.60	4069	11577	4052	11682	3966	11624	4053	11571	4065	11670	3972	11640
3.80	3739	11103	3743	11213	3644	11172	3721	11101	3753	11198	3654	11187
4.00	3443	10665	3469	10774	3361	10753	3424	10666	3476	10757	3374	10766
4.20	3176	10259	3225	10363	3112	10364	3157	10263	3228	10344	3127	10375
4.40	2934	9882	3055	9977	2892	10001	2917	9891	3004	9957	2909	10008
4.60	2716	9533	2805	9614	2697	9661	2700	9546	2801	9595	2716	9665
4.80	2517	9210	2623	9272	2525	9341	2504	9225	2615	9254	2544	9341
5.00	2337	8910	2456	8950	2371	9039	2327	8928	2444	8934	2391	9036
5.50	1958	8248	2088	8226	2055	8351	1958	8270	2069	8217	2071	8337





续附表 14

u	142.0		144.0		146.0		148.0		150.0	
u <sub>0</sub>	R	I	R	I	R	I	R	I	R	I
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87578	10660	87578	10655	87582	10658	87579	10660	87577	10656
0.02	82578	14079	82578	14072	82584	14075	82579	14080	82577	14073
0.03	78830	16355	78830	16347	78838	16350	78831	16355	78829	16348
0.04	75740	18057	75740	18047	75748	18051	75741	18057	75739	18048
0.05	73074	19043	73074	19392	73084	19396	73076	19403	73073	19393
0.06	70713	20503	70713	20491	70723	20496	70715	20503	70711	20493
0.07	68584	21423	68584	21410	68595	21415	68586	21423	68582	21411
0.08	66640	22230	66640	22189	66652	22194	66642	22203	66638	22191
0.09	64849	22873	64848	22858	64861	22864	64851	22874	64847	22860
0.10	63185	23453	63184	23438	63198	23444	63188	23454	63183	23440
0.12	60172	24402	60171	24385	60186	24391	60175	24403	60169	24388
0.14	57495	25136	57494	25117	57511	25123	57498	25136	57492	25120
0.16	55086	25708	55084	25688	55102	25694	55089	25708	55082	25691
0.18	52896	26156	52893	26135	52913	26141	52899	26156	52891	26138
0.20	50888	26506	50885	26484	50906	26490	50892	26506	50883	26487
0.30	42824	27314	42817	27288	42843	27293	42828	27314	42815	27292
0.40	36909	27274	36898	27245	36928	27247	36914	27273	36897	27250
0.50	32321	26844	32306	26813	32340	26812	32327	26843	32305	26818
0.60	28637	26223	28618	26190	28655	26186	28643	26221	28617	26197
0.70	25607	25510	25582	25477	25622	25469	25613	25507	25582	25484
0.80	23068	24759	23039	24727	23080	24713	23075	24755	23039	24734
0.90	20912	23999	20877	23968	20919	23949	20918	23994	20878	23975
1.00	19058	23247	19019	23219	19060	23195	19065	23242	19021	23226
1.20	16044	21805	15995	21783	16035	21748	16049	21789	15999	21791
1.40	13707	20469	13651	20456	13685	20411	13711	20460	13657	20464
1.60	11853	19246	11791	19245	11817	19190	11855	19236	11799	19251
1.80	10353	18131	10288	18143	10304	18080	10353	18120	10298	18148
2.00	9121	17116	9056	17142	9060	17074	9119	17105	9067	17145
2.20	8094	16192	8033	16231	8023	16161	8090	16180	8045	16232
2.40	7230	15348	7175	15401	7150	15331	7223	15337	7188	15399
2.60	6493	14576	6449	14642	6408	14575	6484	14566	6461	14637
2.80	5860	13869	5828	13945	5773	13886	5849	13861	5840	13938
3.00	5311	13221	5294	13304	5227	13255	5298	13215	5305	13295
3.20	4831	12624	4832	12712	4753	12677	4817	12621	4840	12701
3.40	4409	12076	4428	12164	4341	12145	4394	12076	4434	12151
3.60	4036	11570	4073	11655	3981	11653	4020	11573	4076	11641
3.80	3704	11103	4073	11182	3981	11653	4020	11573	4076	11641
4.00	3407	10671	3478	10740	3388	10775	3393	10681	3475	10724
4.20	3441	10273	3226	10327	3144	10380	3129	10285	3220	10311
4.40	2903	9903	2999	9940	2927	10011	2893	9918	2990	9926
4.60	2688	9561	2792	9578	2734	9664	2682	9577	2780	9566
4.80	2495	9243	2603	9239	2562	9337	2492	9261	2588	9229
5.00	2322	8947	2423	8921	2408	9027	2322	8965	2412	8914
5.50	1963	8290	2049	8213	2083	8321	1973	8307	2030	8215





续附表 14

$u$	152.0		154.0		156.0		158.0		160.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
0.00	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0	100000	0
0.01	87582	10657	87579	10660	87577	10657	87581	10656	87580	10660
0.02	82584	14074	82580	14080	82577	14074	82583	14074	82581	14079
0.03	78837	16349	78833	16355	78829	16349	78836	16348	78834	16355
0.04	75748	18050	75743	18057	75738	18050	75747	18049	75744	18057
0.05	73083	19395	73077	19043	73072	19395	73082	19394	73079	19403
0.06	70722	20494	70717	20503	70711	20494	70721	20493	70718	20503
0.07	68594	20413	68588	21423	68582	21413	68593	21411	68590	21422
0.08	66651	22193	66645	22203	66638	22193	66650	22191	66647	22203
0.09	64860	22862	64853	22873	64846	22863	64859	22860	64855	22872
0.10	63179	23441	63190	23454	63182	23442	63195	23440	63192	23453
0.12	60185	24389	60177	24402	60168	24390	60183	24387	60180	24401
0.14	57509	25121	57501	25136	57491	25123	57507	25119	57504	25134
0.16	55101	25692	55093	25708	55082	25694	55098	25690	55095	25706
0.18	52911	26139	52902	26156	52891	26141	52908	26137	52905	26154
0.20	50904	26487	50895	26505	50883	26490	50901	26485	50898	26504
0.30	42840	27290	42832	27313	42815	27297	42837	27288	42835	27311
0.40	36925	27244	36918	27271	36897	27255	36921	27242	36922	27269
0.50	32336	26809	32332	26840	32306	26824	32331	26807	32335	26836
0.60	28649	26183	28648	26217	28618	26202	28644	26182	28652	26213
0.70	25615	25466	25618	25503	25584	25490	25609	25465	25621	25498
0.80	23073	24711	23080	24750	23042	24740	23066	24710	23083	24744
0.90	20911	23948	20923	23988	20882	23982	20904	23948	20925	23982
1.00	19053	23194	19069	23235	19025	23233	19045	23195	19071	23228
1.20	16026	21749	16052	21790	16005	21797	16018	21752	16053	21782
1.40	13676	20414	13713	20451	13664	20469	13669	20418	13712	20443
1.60	11808	19194	11855	19226	11808	19255	11802	19201	11852	19217
1.80	10296	18087	10351	18110	10308	18150	10290	18095	10346	18102
2.00	9052	17082	9114	17095	9078	17145	9048	17092	9107	17087
2.20	8017	16171	8083	16171	8056	16230	8015	16182	8074	16164
2.40	7146	15343	7214	15329	7198	15395	7146	15354	7204	15324
2.60	6407	14588	6473	14560	6471	14630	6409	14600	6462	14557
2.80	5775	13899	5836	13857	5849	13929	5779	13911	5824	13857
3.00	5231	13269	5284	13213	5312	13284	5238	13279	5272	13215
3.20	4760	12689	4803	12622	4845	12688	4769	12699	4791	12627
3.40	4351	12156	4380	12079	4436	12137	4362	12163	4369	12086
3.60	3993	11663	4007	11579	4076	11626	4006	11668	3997	11589
3.80	3680	11205	3677	11118	3755	11152	3694	11208	3669	11130
4.00	3404	10779	3383	10693	3469	10710	3418	10779	3377	10706
4.20	3160	10381	3122	10299	3211	10299	3175	10378	3118	10313
4.40	2943	10009	2888	9933	2978	9915	2958	10002	2888	9949
4.60	2750	9658	2680	9594	2766	9557	2763	9649	2683	9609
4.80	2577	9328	2494	9278	2573	9224	2589	9316	2500	9292
5.00	2421	8015	2328	8982	2395	8912	2430	9001	2336	8996
5.50	2089	8303	1986	8320	2013	8221	2090	8286	2001	8328



续附表 14

$u$	5.5		6.0		6.5		7.0		7.5		8.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	0	0	4088	1020	6820	3540	7879	6678	7361	9607	5679	11707
6.00			0	0	3766	942	6308	3287	7300	6231	6811	8999
6.50					0	0	3492	874	5867	3068	6801	5841
7.00							0	0	3255	816	5485	2876
7.50									0	0	3048	765
8.00											0	0
$u$	8.5		9.0		9.5		10.0		11.0		12.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	3419	12651	1188	12416	- 509	11243	- 1365	9539	- 465	6354	2298	5517
6.00	5211	10996	3049	11898	905	11672	- 732	10539	- 1502	7169	611	5019
6.50	6336	8463	4812	10366	2741	11229	680	11011	- 1704	3317	- 848	5298
7.00	6366	5496	5924	7987	4468	9803	2482	10631	- 1029	9364	- 1751	6188
7.50	5149	2707	5983	5190	5562	7562	4169	9299	350	9891	- 1881	7364
8.00	2866	720	4851	2557	5644	4916	5242	7180	2073	9607	- 1200	8422
8.50	0	0	2704	680	4587	2422	5341	4669	3675	8430	128	8976
9.00			0	0	2560	644	4349	2301	4700	6520	1766	8762
9.50					0	0	2430	612	4824	4243	3283	7710
10.00							0	0	3942	2092	4260	5971
11.00									0	0	3604	1917
12.00											0	0
$u$	13.0		14.0		15.0		16.0		17.0		18.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	4235	7171	3926	9418	2076	10275	521	9284	516	7606	1806	6772
6.00	3215	5564	4075	7779	2790	9490	869	9361	23	7825	789	6415
6.50	1803	4498	3677	6101	3374	8295	1555	9136	16	8155	11	6485
7.00	264	4140	2769	4667	3585	6817	2346	8488	457	8360	- 378	6841
7.50	- 1067	4504	1470	3740	3278	5287	2982	7420	1202	8241	- 310	7267
8.00	- 1878	5426	43	3477	2447	3985	3235	6064	2029	7690	180	7564
8.50	- 1966	6601	- 1191	3889	1235	3160	2975	4652	2688	6718	953	7518
9.00	- 1296	7651	- 1934	4820	- 103	2964	2204	3453	2964	5461	1792	7039
9.50	- 25	8216	- 1995	5978	- 1258	3403	1063	2707	2737	4143	2458	6044
10.00	1530	8054	- 1345	7008	- 1948	4327	- 200	2559	2014	3028	2746	4967
11.00	3895	5507	1343	7451	- 1365	6464	- 1935	3920	- 266	2232	1860	2684
12.00	3319	1770	3588	5110	1192	6933	- 1366	5998	- 1907	3579	- 310	1966
13.00	0	0	3077	1643	3326	4766	1069	6481	- 1355	5595	- 1870	3289
14.00			0	0	2867	1534	3099	4466	966	6085	- 1336	5242
15.00					0	0	2684	1438	2901	4201	879	5735
16.00							0	0	2523	1353	2727	3966
17.00									0	0	2380	1278
18.00											0	0





续附表 14

$u$	19.0		20.0		21.0		22.0		23.0		24.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	3093	7357	3280	8650	2364	9443	1282	9125	986	8114	1634	7369
6.00	2261	6306	3080	7398	2638	8584	1487	8834	709	8055	930	7048
6.50	1302	5651	2595	6240	2783	7543	1856	8347	757	8023	456	6993
7.00	383	5440	1852	5332	2672	6426	2228	7619	1066	7871	279	7082
7.50	- 315	5625	967	4799	2255	5385	2443	6689	1513	7495	407	7169
8.00	- 641	6070	111	4686	1569	4580	2385	5669	1941	6860	777	7112
8.50	- 528	6572	- 532	4949	735	4132	2011	4714	2197	6011	1269	6814
9.00	- 12	6915	- 816	5451	- 75	4089	1364	3985	2172	5064	1730	6247
9.50	770	6921	- 676	5996	- 679	4404	567	3601	1828	4176	2012	5460
10.00	1609	6497	- 148	6376	- 934	4943	- 207	3607	1210	3505	2008	4570
11.00	2566	4555	1463	6037	- 247	5919	- 1014	4520	- 301	3211	1092	3111
12.00	1732	2401	2413	4206	1344	5642	- 318	5527	- 1066	4162	- 369	2881
13.00	- 340	1745	1624	2164	2281	3908	1245	5299	- 371	5186	- 1100	3855
14.00	- 1827	3040	- 359	1560	1531	1965	2165	3649	1161	4998	- 411	4888
15.00	- 1312	4931	- 1781	2825	- 371	1404	1450	1794	2063	3423	1088	4730
16.00	806	5422	- 1286	4654	- 1734	2637	- 378	1271	1379	1648	1971	3224
17.00	2573	3756	742	5142	- 1257	4407	- 1687	2471	- 382	1156	1315	1520
18.00	2253	1211	2435	3567	687	4890	- 1228	4185	- 1641	2324	- 382	1057
19.00	0	0	2138	1150	2311	3396	639	4661	- 1199	3984	- 1596	2192
20.00			0	0	2035	1095	2200	3240	596	4452	- 1170	3801
22.00					0	0	0	0	1855	1000	2006	2969
24.00									0	0	0	0
$u$	25.0		26.0		27.0		28.0		29.0		30.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	2552	7503	2912	8289	2464	8990	1684	8987	1288	8363	1583	7726
6.00	1838	6711	2567	7260	2503	8119	1786	8506	1111	8133	1062	7402
6.50	1118	6232	2057	6370	2427	7186	1966	7898	1163	7894	753	7250
7.00	504	6060	1428	5718	2170	6278	2105	7155	1371	7552	678	7169
7.50	103	6129	773	5360	1725	5500	2101	6329	1631	7053	812	7050
8.00	- 13	6320	213	5291	1146	4946	1897	5512	1830	6401	1085	6803
8.50	163	6488	- 140	5445	532	4673	1492	4813	1870	5651	1396	6383
9.00	571	6498	- 218	5707	9	4677	944	4331	1699	4900	1632	5795
9.50	1090	6257	- 11	5932	- 314	4892	359	4119	1320	4261	1700	5101
10.00	1570	5742	419	5991	- 365	5203	- 139	4176	796	3831	1551	4401
11.00	1877	4161	1445	5318	305	5564	- 473	4783	- 248	3762	683	3418
12.00	998	2783	1770	3816	1344	4957	218	5200	- 553	4426	- 329	3414
13.00	- 418	2603	921	2508	1680	3523	1260	4646	149	4885	- 612	4120
14.00	- 1121	3590	- 454	2367	858	2273	1603	3270	1189	4374	95	4610
15.00	- 439	4623	- 1132	3358	- 479	2163	805	2072	1536	3049	1129	4135
16.00	1026	4492	- 460	4387	- 1135	3154	- 497	1986	760	1897	1476	2856
17.00	1889	3047	970	4277	- 475	4175	- 1133	2972	- 510	1832	721	1745
18.00	1258	1409	1813	2888	921	4083	- 486	3984	- 1127	2811	- 518	1696
19.00	- 380	970	1207	1311	1745	2746	877	3907	- 493	3810	- 1118	2665
20.00	- 1552	2075	- 377	894	1159	1224	1681	2617	838	3746	- 497	3651
22.00	525	4086	- 1113	3482	- 1469	1872	- 368	766	1077	1078	1569	2392
24.00	1705	920	1843	2739	468	3776	- 1060	3212	- 1392	1704	- 357	665
26.00	0	0	0	0	1577	852	1705	2542	422	3510	- 1010	2981
28.00					0	0	0	0	1467	793	1586	2372
30.00									0	0	0	0





续附表 14

$u$	31.0		32.0		33.0		34.0		35.0		36.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	2244	7635	2657	8119	2482	8700	1925	8859	1508	8492	1588	7967
6.00	1623	6987	2244	7223	2374	7843	1943	8268	1377	8141	1188	7619
6.50	1058	6592	1743	6497	2172	6999	1990	7602	1410	7768	976	7386
7.00	628	6418	1205	5991	1845	6234	1980	6874	1534	7314	949	7182
7.50	394	6392	706	5718	1408	5621	1848	6136	1661	6756	1064	6927
8.00	380	6414	330	5649	918	5213	1572	5462	1710	6117	1253	6567
8.50	566	6379	142	5711	459	5027	1173	4929	1621	5453	1431	6086
9.00	880	6201	168	5807	117	5033	714	4592	1377	4844	1517	5510
9.50	1223	5837	387	5833	- 41	5160	280	4468	1003	4369	1456	4900
10.00	1483	5298	729	5706	12	5310	- 39	4530	563	4085	1233	4340
11.00	1437	3986	1369	4883	614	5291	- 104	4894	- 156	4111	449	3665
12.00	596	3072	1346	3638	1278	4532	524	4939	- 193	4542	- 245	3759
13.00	- 391	3118	526	2779	1271	3342	1204	4231	453	4636	- 262	4240
14.00	- 656	3855	- 438	2864	471	2529	1209	3086	1142	3969	395	4372
15.00	51	4367	- 689	3622	- 473	2643	425	2312	1156	2864	1090	3740
16.00	1077	3922	16	4151	- 714	3417	- 501	2451	387	2123	1111	2670
17.00	1423	2685	1030	3732	- 13	3957	- 732	3234	- 521	2281	356	1958
18.00	687	1611	1375	2533	989	3561	- 37	3782	- 744	3070	- 537	2131
19.00	- 523	1576	656	1493	1331	2397	952	3406	- 56	3623	- 753	2922
20.00	- 1107	2534	- 525	1470	629	1388	1291	2275	919	3265	- 72	3478
22.00	769	3462	- 490	3372	- 1081	2306	- 524	1288	583	1211	1219	2063
24.00	1006	960	1471	2204	712	3219	- 496	3133	- 1051	2115	- 518	1141
26.00	- 1321	1563	- 345	583	944	862	1386	2043	663	3009	- 490	2927
28.00	383	3279	- 963	2781	- 1257	1443	- 333	516	891	781	1310	1905
30.00	1371	742	1482	2223	350	3076	- 920	2606	- 1198	1340	- 321	461
32.00	0	0	0	0	1287	697	1392	2092	322	2897	- 880	2451
34.00					0	0	0	0	1213	657	1311	1975
36.00									0	0	0	0



续附表 14

$u$	37.0		38.0		39.0		40.0		41.0		42.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	2054	7759	2464	8028	2459	8498	2075	8739	1680	8554	1625	8137
6.00	1511	7195	2020	7237	2252	7670	2021	8083	1566	8111	1307	7756
6.50	1060	6838	1546	6621	1974	6902	1969	7394	1567	7647	1154	7452
7.00	752	6641	1087	6202	1617	6245	1857	6696	1617	7125	1143	7154
7.50	617	6533	704	5968	1206	5744	1648	6034	1643	6544	1227	6805
8.00	653	6431	451	5876	796	5425	1340	5469	1588	5933	1340	6376
8.50	821	6260	364	5857	453	5279	967	5050	1420	5347	1415	5870
9.00	1052	5967	441	5829	236	5263	587	4803	1143	4848	1396	5323
9.50	1263	5542	644	5718	180	5309	270	4721	794	4488	1256	4791
10.00	1374	5013	904	5476	285	5336	76	4762	433	4294	998	4340
11.00	1123	3921	1265	4599	791	5066	166	4925	- 44	4345	316	3872
12.00	361	3311	1037	3569	1180	4249	703	4718	74	4576	- 137	3992
13.00	- 314	3458	292	3011	968	3268	1111	3950	633	4420	2	4277
14.00	- 316	3978	- 367	3198	237	2752	912	3009	1055	3691	577	4161
15.00	349	4139	- 359	3748	- 410	2972	192	2528	865	2785	1008	3464
16.00	1045	3537	310	3934	- 393	3545	- 443	2774	156	2332	826	2587
17.00	1071	2498	1006	3357	277	3749	- 419	3364	- 469	2598	125	2159
18.00	329	1812	1036	2346	971	3195	249	3584	- 441	3201	- 490	2442
19.00	- 548	1997	306	1682	1004	2210	940	3049	226	3434	- 458	3055
20.00	- 758	2788	- 556	1877	286	1567	975	2087	912	2917	206	3297
22.00	860	3018	- 98	3223	- 761	2555	- 565	1671	254	1369	925	1877
24.00	544	1067	1156	1887	810	2807	- 115	3006	- 757	2359	- 567	1501
26.00	- 1020	1953	- 509	1019	512	948	1100	1738	766	2626	- 128	2817
28.00	621	2826	- 481	2747	- 989	1814	- 498	918	484	849	1051	1610
30.00	843	713	1243	1784	584	2664	- 471	2588	- 958	1693	- 486	832
32.00	- 1144	1250	- 300	414	800	654	1182	1678	551	2520	- 460	2447
34.00	298	2737	- 843	2314	- 1094	1171	- 298	374	762	604	1127	1584
36.00	1147	621	1240	1871	277	2595	- 809	2192	- 1048	1101	- 287	340
38.00	0	0	0	0	1088	590	1176	1777	259	2466	- 777	2081
40.00					0	0	0	0	1034	561	1118	1692
42.00									0	0	0	0
44.00												
46.00												



续附表 14

$u$	43.0		44.0		45.0		46.0		47.0		48.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	1935	7875	2310	7990	2412	8355	2168	8628	1818	8573	1680	8258
6.00	1459	7361	1860	7279	2137	7562	2050	7935	1702	8060	1417	7841
6.50	1096	7015	1421	6740	1815	6860	1922	7244	1666	7532	1297	7474
7.00	873	6784	1032	6372	1451	6286	1739	6582	1649	6972	1284	7102
7.50	798	6603	738	6150	1076	5864	1485	5990	1596	6388	1329	6688
8.00	851	6406	573	6024	737	5598	1170	5509	1469	5816	1375	6219
8.50	988	6138	547	5931	485	5464	833	5170	1254	5300	1369	5711
9.00	1143	5776	642	5806	356	5415	525	4978	970	4887	1277	5201
9.50	1250	5324	814	5598	363	5386	300	4909	656	4608	1088	4741
10.00	1256	4823	998	5284	488	5315	196	4916	369	4470	822	4377
11.00	888	3918	1149	4407	887	4875	370	4906	74	4501	250	4048
12.00	226	3516	803	3563	1066	4056	802	4529	279	4560	- 20	4150
13.00	- 210	3691	155	3212	736	3259	1000	3756	734	4232	207	4264
14.00	- 55	4018	- 268	3431	99	2950	681	2998	947	3497	679	3975
15.00	530	3934	- 101	3791	- 314	3203	53	2722	636	2770	903	3271
16.00	968	3265	491	3734	- 139	3591	- 352	3004	15	2523	599	2570
17.00	792	2413	933	3088	459	3555	- 169	3413	- 382	2826	- 15	2346
18.00	100	2006	763	2259	903	2930	431	3394	- 195	3253	- 407	2668
19.00	- 507	2302	79	1870	737	2121	877	2787	407	3249	- 216	3108
20.00	- 471	2922	- 520	2177	61	1748	714	1997	853	1659	386	3118
22.00	863	2686	172	3058	- 490	2691	- 538	1959	33	1538	675	1783
24.00	228	1208	881	1702	821	2491	147	2854	- 501	2495	- 547	1779
26.00	- 749	2191	- 565	1359	208	1075	843	1555	784	2324	127	2678
28.00	728	2467	- 136	2653	- 738	2046	- 559	1239	192	963	810	1431
30.00	459	766	1006	1500	694	2328	- 142	2507	- 726	1919	- 552	1136
32.00	- 929	1587	- 474	758	437	695	965	1404	664	2204	- 146	2378
34.00	522	2391	- 449	2321	- 900	1494	- 462	695	418	634	928	1319
36.00	727	560	1078	1500	496	2275	- 438	2207	- 872	1410	- 449	640
38.00	- 1005	1039	- 277	310	696	522	1032	1424	473	2170	- 428	2104
40.00	243	2350	- 748	1982	- 966	984	- 268	285	667	488	990	1356
42.00	986	535	1066	1615	229	2244	- 720	1891	- 929	934	- 259	1262
44.00	0	0	0	0	942	511	1018	1544	216	2147	- 695	1808
46.00					0	0	0	0	901	489	974	1480
48.00									0	0	0	0
50.00												





续附表 14

$u$	49.0		50.0		52.0		54.0		56.0		58.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	1864	7981	2187	7986	2221	8527	1743	8344	2089	8005	2244	8437
6.00	1447	7494	1746	7337	2048	7815	1519	7887	1666	7403	2024	7721
6.50	1151	7142	1345	6850	1860	7136	1412	7466	1306	6951	1792	7062
7.00	987	6873	1018	6510	1630	6514	1385	7037	1032	6621	1530	6481
7.50	946	6627	794	6282	1351	5983	1389	6579	862	6377	1244	6002
8.00	997	6354	689	6117	1046	5569	1375	6091	797	6169	958	5639
8.50	1094	6020	698	5957	750	5286	1306	5595	821	5951	706	5393
9.00	1181	5616	792	5755	508	5123	1162	5218	900	5688	520	5241
9.50	1206	5162	923	5479	356	5049	948	4731	988	5365	425	5149
10.00	1136	4699	1037	5123	315	5015	692	4437	1040	4989	427	5071
11.00	711	3954	1029	4281	524	4857	228	4197	913	4203	638	4790
12.00	157	3692	624	3596	846	4366	99	4253	490	3655	851	4228
13.00	- 95	3851	84	3388	882	3626	364	4217	60	3538	765	3544
14.00	149	4007	- 155	3591	501	3028	727	3812	- 37	3697	364	3085
15.00	634	3750	102	3782	- 22	2896	788	3138	260	3739	- 49	3047
16.00	866	3072	597	3552	- 242	3156	420	2597	647	3390	- 126	3273
17.00	568	2394	835	2895	31	3408	- 93	2517	722	2761	190	3367
18.00	- 41	2190	541	2237	538	3218	- 302	2830	363	2260	591	3058
19.00	- 427	2527	- 62	2050	784	2596	- 18	3108	- 142	2217	675	2462
20.00	- 233	2977	- 443	2399	498	1971	495	2947	- 343	2560	321	1991
22.00	811	2435	351	2888	- 468	2177	464	1754	461	2722	- 372	2337
24.00	12	1366	642	1607	323	2693	- 483	1992	437	1574	433	2533
26.00	- 506	2327	- 552	1627	615	1458	300	2525	- 493	1835	415	1423
28.00	752	2179	110	2525	- 552	1497	590	1332	282	2380	- 499	1700
30.00	178	868	779	1323	97	2389	- 550	1385	569	1224	266	2252
32.00	- 712	1808	- 543	1047	751	1230	86	2269	- 545	1287	550	1130
34.00	636	2094	- 149	2261	- 533	970	726	1148	77	2161	- 540	1202
36.00	400	581	893	1244	- 150	2157	- 523	902	702	1076	69	2063
38.00	- 846	1336	- 437	592	861	1177	- 151	2061	- 513	842	681	1011
40.00	452	2074	- 417	2011	- 426	549	832	1116	- 151	1975	- 503	789
42.00	640	458	952	1294	- 406	1926	- 414	512	804	1062	- 150	1895
44.00	- 896	889	- 250	243	916	1237	- 396	1847	- 403	478	779	1012
46.00	204	2058	- 671	1733	- 242	225	883	1186	- 386	1775	- 393	448
48.00	864	469	934	1420	- 648	1663	- 234	210	852	1138	- 377	1708
50.00	0	0	0	0	897	1366	- 627	1599	- 227	196	824	1094
54.00					0	0	0	0	832	1268	- 589	1484
58.00									0	0	0	0
62.00												



续附表 14

$u$	60.0		62.0		64.0		66.0		68.0		70.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	1810	8400	2014	8039	2246	8359	1877	8433	1959	8083	2231	8294
6.00	1608	7905	1614	7472	1986	7649	1685	7902	1585	7540	1940	7597
6.50	1503	7437	1293	7039	1721	7015	1572	7396	1300	7115	1653	6990
7.00	1454	6966	1064	6709	1442	6473	1496	6895	1109	6774	1368	6485
7.50	1416	6480	934	6440	1161	6038	1419	6394	1007	6477	1099	6086
8.00	1351	5988	894	6190	901	5714	1311	5908	979	6188	868	5787
8.50	1233	5514	920	5922	690	5488	1158	5462	995	5878	697	5571
9.00	1056	5090	975	5614	554	5335	962	5081	1021	5537	600	5406
9.50	835	4749	1019	5261	502	5218	745	4784	1023	5169	579	5258
10.00	598	4509	1016	4880	529	5095	536	4587	975	4795	619	5094
11.00	239	4320	803	4162	717	4713	273	4419	705	4150	767	4633
12.00	213	4313	392	3728	828	4115	319	4340	327	3808	786	4026
13.00	481	4151	69	3665	653	3501	563	4073	102	3767	552	3488
14.00	734	3672	79	3760	263	3158	713	3557	187	3788	195	3239
15.00	670	3054	380	3673	- 41	3176	557	3008	465	3595	- 9	3281
16.00	281	2652	657	3250	- 10	3339	178	2724	637	3132	99	3369
17.00	- 122	2668	606	2675	311	3303	- 117	2798	492	2627	398	3225
18.00	- 188	2940	223	2313	603	2917	- 72	3007	118	2384	584	2798
19.00	140	3070	- 174	2367	560	2373	262	3007	- 170	2497	446	2324
20.00	550	2789	- 231	2671	181	2041	563	2649	- 117	2739	76	2111
22.00	290	1770	518	2567	- 263	2448	150	1818	533	2428	- 150	2518
24.00	- 392	2150	265	1588	492	2381	- 286	2262	126	1634	509	2243
26.00	411	2370	- 406	1992	246	1434	471	2221	- 303	2103	108	1478
28.00	396	1295	392	2230	- 416	1855	230	1303	453	2084	- 315	1967
30.00	- 501	1584	380	1185	376	2107	- 422	1737	217	1191	437	1964
32.00	252	2138	- 501	1481	366	1089	362	1998	- 426	1632	206	1093
34.00	532	1049	240	2036	- 500	1391	354	1006	349	1901	- 428	1540
36.00	- 533	1126	516	976	229	1945	- 497	1311	342	932	338	1813
38.00	62	1975	- 526	1059	501	913	220	1862	- 493	1240	332	867
40.00	660	954	56	1894	- 518	998	487	856	211	1786	- 488	- 1175
42.00	- 492	741	641	903	51	1820	- 510	944	474	805	203	1717
44.00	- 150	1822	- 482	698	623	856	47	1752	- 502	895	462	759
46.00	755	967	- 148	1754	- 472	660	606	814	43	1689	- 494	851
48.00	- 383	422	732	926	- 147	1692	- 462	625	590	776	40	1631
50.00	- 368	1646	- 373	397	711	888	- 145	1634	- 452	593	575	741
54.00	- 214	172	772	1016	- 350	1535	- 355	355	672	821	- 142	1529
58.00	775	1183	- 555	1385	- 202	152	727	948	- 334	1439	- 338	320
62.00	0	0	0	0	725	1109	- 525	1298	- 191	136	686	889
66.00					0	0	0	0	682	1044	- 498	1221
70.00									0	0	0	0





续附表 14

$u$	72.0		74.0		76.0		78.0		80.0		82.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	1938	8447	1922	8130	2205	8243	1994	8445	1901	8179	2171	8205
6.00	1749	7883	1576	7602	1891	7563	1798	7854	1581	7657	1841	7545
6.50	1621	7348	1322	7177	1591	6984	1652	7296	1354	7224	1536	6993
7.00	1517	6826	1160	6819	1308	6510	1519	6764	1213	6846	1263	6545
7.50	1403	6322	1076	6493	1058	6139	1375	6264	1137	6491	1034	6193
8.00	1261	5851	1049	6168	857	5856	1206	5813	1104	6136	862	5917
8.50	1084	5434	1049	5826	721	5638	1016	5427	1083	5770	755	5691
9.00	882	5092	1044	5463	655	5456	817	5119	1047	5396	712	5486
9.50	679	4836	1007	5092	653	5276	633	4893	976	5029	719	5275
10.00	501	4665	922	4733	694	5074	488	4738	864	4692	754	5040
11.00	321	4495	620	4162	791	4556	378	4548	551	4190	795	4484
12.00	413	4339	289	3889	732	3961	491	4319	274	3965	671	3917
13.00	616	3991	152	3846	464	3498	643	3910	210	3902	391	3527
14.00	670	3465	283	3789	155	3322	615	3397	365	3769	139	3401
15.00	454	2993	520	3512	41	3362	363	3003	548	3429	101	3420
16.00	107	2806	595	3038	197	3371	66	2890	539	2967	282	3351
17.00	- 85	2904	387	2611	455	3141	- 35	2988	295	2620	484	3057
18.00	38	3039	46	2466	543	2703	137	3042	3	2552	486	2630
19.00	351	2930	- 139	2605	341	2307	409	2845	- 90	2689	247	2315
20.00	546	2529	- 7	2772	2	2193	505	2433	94	2777	- 43	2279
22.00	44	1888	517	2308	- 40	2553	- 31	1969	477	2210	62	2558
24.00	- 174	2333	20	1701	494	2123	- 65	2369	- 56	1782	455	2025
26.00	489	2085	- 193	2175	1	1544	476	1966	- 84	2212	- 75	1623
28.00	93	1344	473	1949	- 207	2039	- 13	1409	460	1831	- 99	2076
30.00	- 324	1848	81	1230	459	1831	- 218	1920	- 25	1293	447	1713
32.00	424	1858	- 331	1743	72	1130	446	1727	- 226	1815	- 34	1191
34.00	196	1007	412	1764	- 335	1650	64	1043	435	1635	- 232	1723
36.00	- 428	1458	188	932	401	1680	- 338	1567	57	966	425	1553
38.00	327	1735	- 427	1384	181	866	390	1604	- 340	1492	51	897
40.00	323	810	318	1663	- 425	1317	174	806	381	1535	- 340	1424
42.00	- 483	1117	314	758	309	1598	- 423	1257	168	753	373	1473
44.00	196	1653	- 477	1064	306	711	301	1538	- 420	1202	163	705
46.00	451	717	190	1595	- 472	1016	299	669	293	1482	- 416	1152
48.00	- 486	810	440	680	184	1540	- 466	972	292	631	286	1431
50.00	37	1577	- 477	773	430	645	178	1490	- 459	931	285	597
54.00	- 434	537	547	679	32	1479	- 461	708	411	585	168	1398
58.00	637	763	- 138	1437	- 417	490	522	626	27	1393	- 446	652
62.00	- 320	1353	- 323	291	606	713	- 134	1356	- 400	450	499	581
66.00	- 182	123	650	837	- 306	1278	- 309	266	578	669	- 131	1283
70.00	643	985	- 473	1153	- 173	111	617	790	- 293	1210	- 295	244
74.00	0	0	0	0	609	934	- 451	1092	- 165	101	588	749
78.00					0	0	0	0	578	887	- 430	1037
82.00									0	0	0	0
86.00											0	0
90.00											0	0





续附表 14

$u$	84.0		86.0		88.0		90.0		92.0		94.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	2040	8431	1894	8225	2133	8180	2077	8408	1899	8267	2095	8167
6.00	1834	7818	1598	7703	1794	7541	1857	7779	1623	7738	1752	7549
6.50	1666	7245	1393	7258	1492	7013	1667	7198	1433	7278	1457	7040
7.00	1507	6710	1264	6858	1232	6585	1484	6667	1311	6856	1215	6627
7.50	1337	6222	1190	6476	1026	6245	1295	6193	1232	6451	1030	6291
8.00	1151	5793	1144	6096	880	5968	1099	5788	1169	6053	908	6008
8.50	956	5436	1099	5714	797	5728	907	5457	1101	5662	842	5751
9.00	768	5157	1034	5337	768	5499	733	5200	1010	5290	820	5497
9.50	607	4951	936	4983	776	5259	598	5007	891	4952	822	5232
10.00	493	4803	805	4670	797	4998	512	4859	749	4664	825	4951
11.00	439	4580	498	4229	783	4422	498	4595	461	4275	757	4371
12.00	554	4284	279	4034	609	3893	600	4240	299	4093	550	3886
13.00	647	3836	273	3936	335	3568	634	3770	336	3952	296	3616
14.00	552	3351	431	3734	143	3473	488	3325	479	3688	164	3534
15.00	288	3032	554	3352	166	3456	230	3074	541	3284	230	3473
16.00	49	2972	475	2920	349	3315	52	3045	409	2893	399	3268
17.00	26	3047	218	2649	491	2978	92	3085	158	2691	478	2908
18.00	223	3022	- 15	2634	422	2581	293	2986	- 12	2710	354	2553
19.00	440	2760	- 28	2751	168	2344	447	2680	39	2790	107	2386
20.00	449	2359	181	2758	- 61	2362	383	2308	252	2721	- 59	2439
22.00	- 76	2055	421	2136	150	2540	- 96	2139	355	2084	221	2503
24.00	37	2375	- 102	1867	399	1949	125	2357	- 123	1952	333	1897
26.00	437	1867	17	2219	- 122	1709	382	1791	107	2201	- 143	1794
28.00	- 90	1487	423	1732	2	2084	- 138	1572	368	1655	91	2067
30.00	- 111	1958	- 102	1370	411	1615	- 10	1967	- 150	1455	357	1538
32.00	436	1610	- 120	1854	- 111	1268	401	1512	- 20	1864	- 160	1352
34.00	- 41	1102	426	1519	- 128	1762	- 118	1178	392	1421	- 28	1772
36.00	- 237	1640	- 47	1024	417	1438	- 134	1679	- 124	1098	384	1340
38.00	416	1479	- 241	1565	- 52	954	409	1365	- 139	1605	- 129	1027
40.00	47	836	407	1412	- 243	1497	- 56	891	401	1300	- 143	1538
42.00	- 340	1363	42	782	399	1351	- 245	1436	- 60	835	394	1240
44.00	364	1416	- 339	1307	39	733	391	1296	- 246	1379	- 62	785
46.00	158	662	357	1363	- 338	1256	36	688	384	1245	- 247	1328
48.00	- 413	1105	154	623	350	1314	- 337	1208	33	647	378	1199
50.00	280	1384	- 409	1063	150	587	343	1269	- 334	1165	31	611
54.00	- 447	860	273	536	267	1298	- 400	987	142	525	330	1189
58.00	393	535	159	1318	- 434	798	262	485	256	1223	- 391	921
62.00	24	1317	- 431	604	378	491	152	1247	- 422	744	252	442
66.00	- 385	416	478	541	21	1249	- 417	562	363	454	145	1184
70.00	552	630	- 127	1218	- 371	386	459	506	19	1188	- 403	526
74.00	- 282	1149	- 283	225	528	595	- 123	1160	- 357	359	441	476
78.00	- 158	93	561	712	- 271	1094	- 272	209	507	564	- 120	1107
82.00	550	844	- 412	988	- 151	86	537	678	- 261	1044	- 262	195
86.00	0	0	0	0	525	806	- 395	943	- 145	79	514	647
90.00	0	0	0	0	0	0	0	0	501	771	- 379	902



续附表 14

$u$	96.0		98.0		100.0		102.0		104.0		106.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	2104	8380	1913	8302	2059	8165	2121	8349	1933	8329	2027	8171
6.00	1867	7739	1653	7764	1718	7556	1867	7703	1685	7779	1692	7587
6.50	1657	7157	1473	7286	1434	7072	1639	7123	1510	7284	1421	7105
7.00	1455	6634	1352	6843	1209	6668	1421	6613	1384	6823	1214	6705
7.50	1252	6179	1262	6420	1046	6331	1211	6176	1281	6385	1068	6362
8.00	1053	5796	1181	6009	941	6036	1014	5813	1182	5968	977	6053
8.50	869	5487	1090	5617	886	5760	842	5522	1070	5579	927	5757
9.00	714	5246	978	5254	864	5484	708	5291	941	5230	900	5461
9.50	603	5058	845	4935	855	5198	619	5102	800	4932	877	5160
10.00	542	4902	699	4672	838	4904	578	4933	657	4691	839	4859
11.00	553	4593	440	4324	723	4332	601	4579	433	4372	684	4307
12.00	630	4191	330	4139	497	3895	645	4141	368	4172	452	3915
13.00	608	3717	394	3951	274	3667	573	3676	444	3936	266	3717
14.00	427	3318	511	3637	196	3582	371	3326	526	3585	235	3617
15.00	189	3123	514	3228	290	3472	166	3176	477	3186	343	3457
16.00	73	3108	345	2885	432	3215	106	3159	288	2893	449	3161
17.00	158	3103	116	2742	451	2850	220	3102	91	2796	413	2806
18.00	344	2939	9	2774	289	2545	379	2885	42	2826	230	2553
19.00	435	2609	106	2808	63	2438	407	2549	170	2808	37	2494
20.00	315	2279	305	2673	- 38	2505	249	2270	340	2618	- 4	2559
22.00	- 94	2217	286	2054	276	2455	- 73	2284	218	2045	312	2399
24.00	198	2321	- 121	2031	264	1866	253	2272	- 101	2099	195	1856
26.00	317	1738	180	2166	- 142	1873	247	1707	236	2117	- 122	1942
28.00	- 160	1657	303	1601	166	2032	- 159	1737	233	1570	222	1983
30.00	79	1951	- 173	1539	292	1483	154	1916	- 172	1619	222	1451
32.00	347	1435	69	1848	- 183	1436	282	1380	144	1814	- 183	1516
34.00	- 168	1261	339	1344	61	1757	- 191	1345	275	1289	136	1723
36.00	- 35	1690	- 174	1180	332	1263	54	1676	- 198	1264	268	1208
38.00	376	1268	- 40	1616	- 179	1108	325	1191	48	1603	- 204	1192
40.00	- 133	963	369	1203	- 45	1550	- 183	1044	319	1126	43	1537
42.00	- 146	1477	- 136	906	363	1144	- 49	1489	- 186	985	314	1068
44.00	387	1186	- 148	1420	- 139	854	358	1091	- 52	1433	- 189	933
46.00	- 65	739	381	1137	- 150	1369	- 140	807	352	1042	- 55	1382
48.00	- 247	1280	- 66	697	375	1091	- 151	1321	- 142	764	347	998
50.00	371	1156	- 246	1236	- 68	659	369	1049	- 152	1278	- 143	725
54.00	- 330	1086	27	546	359	1078	- 245	1157	- 70	592	358	975
58.00	136	473	319	1118	- 324	1019	23	492	348	1012	- 243	1088
62.00	246	1157	- 382	864	130	428	308	1056	- 318	959	21	445
66.00	- 410	697	243	404	237	1098	- 373	813	125	390	298	1001
70.00	350	421	138	1127	- 399	655	234	372	229	1045	- 364	768
74.00	17	1132	- 390	493	337	392	133	1075	- 388	618	226	343
78.00	- 345	336	425	449	15	1082	- 378	465	326	367	127	1028
82.00	487	536	- 116	1058	- 333	316	410	424	13	1036	- 367	439
86.00	- 251	999	- 252	182	468	511	- 113	1014	- 322	297	395	402
90.00	- 139	73	494	619	- 243	957	- 243	170	451	488	- 110	973





续附表 14

$u$	108.0		110.0		112.0		114.0		116.0		118.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	2128	8318	1958	8348	2000	8185	2127	8288	1984	8360	1979	8204
6.00	1858	7670	1717	7784	1674	7613	1843	7644	1747	7781	1664	7641
6.50	1615	7098	1542	7273	1418	7138	1587	7082	1568	7255	1423	7168
7.00	1387	6602	1408	6797	1227	6736	1354	6601	1422	6768	1247	6761
7.50	1175	6183	1290	6349	1096	6384	1144	6198	1289	6316	1126	6397
8.00	985	5838	1172	5932	1013	6059	965	5867	1154	5902	1047	6056
8.50	828	5559	1043	5551	963	5745	824	5595	1013	5533	991	5726
9.00	713	5331	903	5218	926	5433	727	5366	867	5217	943	5401
9.50	643	5136	760	4940	886	5122	674	5160	726	4956	885	5085
10.00	617	4952	625	4718	828	4820	656	4959	603	4749	810	4787
11.00	640	4555	438	4415	643	4294	668	4525	453	4453	604	4292
12.00	645	4094	409	4192	418	3943	635	4052	450	4200	394	3976
13.00	532	3649	485	3911	271	3763	489	3634	515	3879	287	3803
14.00	324	3347	527	3535	279	3638	288	3376	516	3491	322	3647
15.00	157	3229	434	3157	386	3431	163	3277	390	3142	417	3398
16.00	146	3195	239	2914	450	3110	191	3217	201	2945	439	3064
17.00	274	3087	82	2850	369	2776	319	3061	87	2900	323	2760
18.00	396	2829	84	2864	179	2574	397	2776	130	2887	140	2605
19.00	369	2504	226	2793	23	2549	324	2473	271	2766	33	2601
20.00	188	2278	358	2562	38	2597	136	2300	360	2507	85	2622
22.00	- 39	2338	157	2052	330	2342	4	2378	104	2074	333	2286
24.00	290	2216	- 67	2154	133	1864	309	2158	- 23	2195	79	1885
26.00	178	1696	274	2061	- 88	1998	114	1703	293	2002	- 44	2039
28.00	- 139	1807	163	1559	260	1927	- 105	1863	99	1566	280	1867
30.00	211	1867	- 153	1689	152	1439	249	1811	- 119	1746	87	1446
32.00	212	1347	201	1765	- 164	1586	142	1335	241	1709	- 130	1644
34.00	- 192	1425	205	1256	194	1675	- 173	1495	135	1243	233	1618
36.00	129	1642	- 199	1344	198	1174	187	1595	- 181	1414	128	1162
38.00	262	1136	123	1570	- 205	1271	192	1102	181	1522	- 187	1342
40.00	- 208	1127	256	1071	118	1504	- 210	1206	187	1037	176	1457
42.00	39	1477	- 211	1068	251	1012	113	1444	- 214	1147	183	978
44.00	309	1015	35	1422	- 214	1014	247	959	109	1390	- 217	1093
46.00	- 191	885	304	966	31	1371	- 216	966	243	910	106	1340
48.00	- 57	1335	- 192	841	300	922	29	1324	- 218	921	239	866
50.00	342	957	- 59	1292	- 193	801	296	881	26	1281	- 219	880
54.00	- 153	1199	- 144	655	333	884	- 63	1213	- 194	729	288	809
58.00	- 71	535	438	910	- 154	1130	- 144	596	324	821	- 65	1145
62.00	338	953	- 240	1028	- 72	486	339	854	- 153	1069	- 144	546
66.00	- 312	906	19	405	328	901	- 236	974	- 72	444	330	805
70.00	121	356	289	952	- 306	859	17	370	319	854	- 233	926
74.00	221	997	- 355	728	116	327	280	907	- 300	817	15	340
78.00	- 377	585	219	318	214	954	- 347	692	113	302	272	867
82.00	315	344	123	986	- 367	556	212	296	207	914	- 338	659
86.00	12	994	- 356	416	305	324	118	946	- 357	529	206	277
90.00	- 312	281	382	382	11	955	- 346	395	295	306	114	910





续附表 14

$u$	120.0		122.0		124.0		126.0		128.0		130.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	2119	8263	2010	8363	1965	8225	2106	8242	2034	8360	1958	8248
6.00	1822	7624	1772	7771	1663	7667	1799	7612	1793	7756	1668	7692
6.50	1559	7074	1587	7233	1434	7193	1532	7074	1598	7209	1451	7213
7.00	1324	6608	1428	6739	1270	6778	1299	6622	1426	6711	1295	6788
7.50	1120	6219	1280	6287	1156	6401	1105	6244	1265	6263	1183	6397
8.00	954	5898	1132	5880	1075	6045	952	5928	1106	5866	1099	6028
8.50	829	5629	981	5524	1012	5702	842	5657	951	5524	1025	5675
9.00	748	5393	834	5224	949	5369	774	5413	807	5239	947	5339
9.50	706	5174	700	4979	875	5053	739	5179	683	5006	859	5027
10.00	692	4955	591	4783	785	4763	724	4943	588	4816	757	4748
11.00	686	4491	476	4482	560	4300	693	4456	504	4503	539	4316
12.00	615	4017	489	4196	381	4012	589	3991	523	4148	378	4047
13.00	447	3632	534	3843	311	3834	410	3641	542	3807	341	3856
14.00	263	3411	495	3454	363	3643	249	3449	468	3427	399	3630
15.00	179	3318	346	3140	437	3361	204	3351	307	3148	445	3322
16.00	237	3226	175	2981	417	3026	279	3223	160	3020	389	2997
17.00	351	3026	104	2944	278	2758	372	2987	130	2978	237	2767
18.00	386	2729	177	2897	113	2643	364	2689	221	2893	98	2683
19.00	276	2456	305	2731	50	2645	230	2454	327	2691	77	2681
20.00	96	2332	348	2458	133	2631	67	2370	326	2418	179	2628
22.00	52	2403	62	2107	321	2236	101	2413	33	2146	298	2195
24.00	312	2101	26	2220	37	1918	300	2050	76	2231	7	1958
26.00	60	1725	296	1944	5	2065	16	1758	284	1893	56	2076
28.00	- 61	1905	44	1588	283	1810	- 11	1932	0	1621	272	1757
30.00	270	1751	- 74	1789	32	1468	273	1692	- 24	1816	- 13	1502
32.00	78	1342	261	1649	- 85	1687	21	1364	265	1590	- 35	1714
34.00	- 139	1553	69	1250	254	1558	- 95	1597	13	1271	258	1499
36.00	227	1538	- 147	1473	63	1168	248	1478	- 102	1517	6	1189
38.00	122	1089	221	1466	- 153	1400	57	1095	243	1405	- 109	1444
40.00	- 192	1277	117	1023	216	1404	- 159	1335	52	1029	238	1340
42.00	172	1398	- 196	1217	113	964	212	1342	- 163	1276	47	969
44.00	179	924	168	1344	- 200	1164	109	911	208	1288	- 167	1222
46.00	- 219	1044	175	876	164	1294	- 203	1114	106	862	205	1239
48.00	102	1294	- 221	999	172	831	161	1248	- 205	1069	103	817
50.00	236	826	100	1251	- 223	958	169	791	158	1206	- 207	1028
54.00	22	1204	- 221	808	229	754	95	1175	- 225	884	164	719
58.00	- 194	669	281	747	18	1137	- 221	745	224	692	90	1109
62.00	316	766	- 66	1085	- 194	616	274	694	15	1077	- 220	691
66.00	- 152	1015	- 143	502	309	718	- 67	1031	- 192	570	268	647
70.00	- 72	408	322	761	- 151	967	- 142	463	302	676	- 68	983
74.00	310	813	- 229	882	- 72	376	314	721	- 149	923	- 140	429
78.00	- 294	779	14	313	302	775	- 225	843	- 71	347	307	686
82.00	109	279	264	830	- 288	744	13	289	295	741	- 221	808
86.00	200	878	- 330	629	106	259	257	797	- 282	713	12	268
90.00	- 348	504	200	259	194	844	- 323	602	103	241	250	766



续附表 14

$u$	1320.0		134.0		136.0		138.0		140.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	2088	8226	2055	8351	1958	8270	2069	8217	2071	8337
6.00	1776	7606	1807	7737	1678	7712	1753	7608	1816	7717
6.50	1507	7081	1602	7185	1471	7226	1487	7093	2599	7162
7.00	1281	6640	1418	6687	1320	6790	1268	6661	1404	6668
7.50	1097	6270	1245	6245	1207	6387	1096	6295	1223	6234
8.00	957	5956	1079	5859	1115	6007	969	5979	1054	5861
8.50	861	5679	924	5532	1029	5647	883	5694	901	5545
9.00	802	5423	786	5259	938	5312	829	5426	772	5283
9.50	769	5175	674	5035	837	5007	795	5163	673	5063
10.00	749	4925	594	4846	728	4741	767	4902	607	4871
11.00	691	4423	534	4515	516	4337	681	4394	563	4518
12.00	559	3974	550	4164	385	4079	527	3967	569	4139
13.00	378	3658	540	3772	372	3869	354	3681	529	3741
14.00	246	3486	436	3409	427	3609	253	3520	403	3401
15.00	235	3375	274	3166	444	3286	268	3388	249	3190
16.00	316	3209	157	3059	356	2978	346	3188	164	3094
17.00	381	2948	162	3002	203	2785	379	2910	196	3016
18.00	334	2659	259	2879	94	2723	300	2640	291	2857
19.00	187	2462	336	2650	109	2706	152	2481	334	2610
20.00	52	2412	296	2387	218	2614	48	2453	261	2367
22.00	147	2410	17	2188	267	2163	188	2396	13	2230
24.00	277	2008	123	2228	- 10	2001	246	1975	165	2213
26.00	- 14	1799	261	1849	104	2073	- 31	1842	229	1816
28.00	40	1943	- 31	1662	248	1713	89	1940	- 48	1706
30.00	262	1639	28	1828	- 44	1543	238	1595	77	1825
32.00	- 24	1397	254	1536	17	1726	- 55	1438	230	1491
34.00	- 44	1625	- 33	1305	247	1445	8	1637	- 65	1346
36.00	252	1418	- 52	1545	- 40	1223	241	1364	1	1557
38.00	0	1116	247	1346	- 58	1473	- 46	1149	236	1291
40.00	- 114	1379	- 6	1050	243	1281	- 63	1408	- 52	1083
42.00	234	1281	- 119	1321	- 10	990	239	1222	- 68	1349
44.00	44	916	231	1228	- 123	1267	- 14	936	236	1168
46.00	- 170	1173	41	866	227	1179	- 126	1218	- 17	887
48.00	202	1193	- 173	1128	38	822	224	1134	- 129	1173
50.00	100	776	199	1152	- 175	1086	35	780	222	1092
54.00	152	1131	- 209	953	96	704	193	1077	- 178	1012
58.00	- 226	821	159	657	148	1066	- 211	890	92	642
62.00	218	639	87	1050	- 225	766	155	604	144	1008
66.00	13	1025	- 219	644	214	593	83	999	- 225	717
70.00	- 191	530	262	605	11	977	- 218	603	209	552
74.00	295	638	- 68	940	- 189	495	257	569	10	935
78.00	- 148	884	- 139	399	288	604	- 68	901	- 187	463
82.00	- 70	322	300	654	- 146	848	- 137	373	282	574
86.00	287	710	- 217	775	- 70	300	293	625	- 144	815
90.00	- 276	684	11	250	280	682	- 213	745	- 69	280





续附表 14

$u$	142.0		144.0		146.0		148.0		150.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	1963	8290	2049	8213	2083	8321	1973	8307	2030	8215
6.00	1693	7728	1733	7614	1818	7696	1710	7738	1717	7625
6.50	1493	7233	1472	7110	1591	7142	1514	7234	1463	7128
7.00	1343	6786	1263	6683	1387	6654	1362	6776	1263	6705
7.50	1226	6372	1102	6318	1200	6230	1239	6353	1113	6337
8.00	1125	5984	986	5997	1031	5868	1127	5961	1005	6009
8.50	1026	5622	907	5702	884	5563	1017	5600	931	5703
9.00	923	5290	855	5421	766	5307	904	5275	877	5411
9.50	813	4995	816	5147	680	5088	788	4990	830	5126
10.00	700	4742	777	4877	626	4891	675	4750	780	4851
11.00	502	4363	665	4371	591	4513	495	4389	644	4354
12.00	399	4106	498	3968	581	4112	418	4128	471	3976
13.00	404	3872	338	3707	512	3716	433	3867	331	3736
14.00	448	3584	267	3549	372	3402	460	3555	287	3571
15.00	433	3253	301	3391	232	3218	414	3227	332	3386
16.00	322	2970	368	3161	179	3124	289	2971	381	3131
17.00	176	2810	368	2876	231	3020	159	2839	349	2848
18.00	101	2760	265	2631	313	2829	116	2791	231	2632
19.00	145	2720	124	2507	323	2575	181	2724	106	2537
20.00	251	2591	55	2491	224	2357	274	2562	71	2523
22.00	232	2142	221	2373	20	2269	194	2132	245	2343
24.00	- 14	2044	209	1954	199	2190	- 7	2084	171	1944
26.00	147	2059	- 36	1886	192	1794	181	2035	- 28	1927
28.00	216	1679	132	1926	- 53	1750	179	1657	168	1901
30.00	- 62	1588	206	1560	121	1810	- 67	1633	168	1538
32.00	67	1724	- 74	1484	197	1456	111	1709	- 79	1529
34.00	223	1399	59	1634	- 83	1392	190	1364	103	1620
36.00	- 73	1265	218	1318	52	1555	- 92	1310	185	1282
38.00	- 5	1485	- 79	1191	213	1245	46	1483	- 98	1237
40.00	232	1226	- 10	1421	- 85	1125	209	1179	41	1419
42.00	- 56	1024	229	1167	- 15	1362	- 90	1066	205	1120
44.00	- 72	1296	- 60	970	225	1113	- 19	1309	- 94	1012
46.00	233	1119	- 75	1247	- 64	920	222	1064	- 22	1260
48.00	- 20	842	230	1074	- 78	1202	- 67	875	220	1019
50.00	- 132	1131	- 22	801	227	1033	- 81	1160	- 69	834
54.00	31	708	217	1018	- 135	1057	- 26	727	223	959
58.00	189	1012	- 180	948	28	645	212	954	- 138	993
62.00	- 211	834	89	589	185	956	- 182	892	25	591
66.00	151	558	140	957	- 211	785	86	542	181	906
70.00	80	952	- 224	675	147	517	137	912	- 211	741
74.00	- 216	566	205	516	78	910	- 222	637	144	481
78.00	251	536	8	896	- 214	533	200	483	76	872
82.00	- 68	865	- 184	435	246	506	7	861	- 211	503
86.00	- 135	349	276	546	- 67	832	- 182	410	241	480
90.00	286	598	- 142	784	- 133	327	270	521	- 67	802





续附表 14

$u$	152.0		154.0		156.0		158.0		160.0	
$u_0$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$	$R$	$I$
5.50	2089	8303	1986	8320	2013	8221	2090	8286	2001	8328
6.00	1815	7677	1729	7744	1705	7639	1807	7660	1747	7743
6.50	1578	7126	1533	7230	1459	7147	1563	7115	1549	7221
7.00	1367	6645	1378	6763	1269	6724	1348	6643	1388	6746
7.50	1178	6232	1246	6333	1128	6352	1159	6239	1247	6313
8.00	1012	5880	1124	5939	1026	6014	999	5897	1115	5920
8.50	874	5584	1003	5582	952	5698	869	5605	986	5569
9.00	766	5331	882	5265	894	5396	773	5352	861	5262
9.50	692	5109	764	4992	838	5104	708	5125	743	5000
10.00	647	4904	655	4763	777	4828	670	4910	639	4781
11.00	615	4501	495	4415	621	4344	633	4485	502	4438
12.00	584	4085	441	4142	449	3991	580	4060	465	4149
13.00	490	3698	459	3855	331	3763	465	3687	478	3838
14.00	344	3411	463	3526	312	3586	320	3426	459	3499
15.00	224	3248	391	3208	358	3373	224	3276	365	3196
16.00	200	3148	259	2980	385	3101	225	3164	234	2996
17.00	263	3014	150	2870	325	2828	291	3001	150	2900
18.00	326	2799	139	2816	200	2641	330	2767	165	2832
19.00	303	2547	214	2719	97	2569	279	2526	243	2705
20.00	189	2358	288	2531	94	2549	157	2368	292	2498
22.00	36	2303	158	2133	259	2310	60	2329	125	2143
24.00	223	2160	9	2118	134	1945	238	2126	33	2145
26.00	153	1784	207	2004	- 12	1962	115	1784	222	1970
28.00	- 46	1792	139	1646	193	1870	- 29	1827	100	1647
30.00	157	1786	- 60	1674	128	1527	183	1754	- 43	1711
32.00	159	1433	148	1684	- 72	1572	118	1422	174	1653
34.00	- 89	1438	152	1341	140	1595	- 82	1481	111	1329
36.00	97	1540	- 97	1357	146	1259	134	1515	- 90	1400
38.00	180	1209	91	1469	- 104	1284	140	1185	129	1444
40.00	- 104	1172	175	1143	86	1404	- 110	1218	136	1119
42.00	36	1361	- 109	1112	172	1084	82	1346	- 115	1159
44.00	202	1066	33	1308	- 114	1058	169	1029	79	1293
46.00	- 97	962	199	1017	29	1259	- 117	1009	166	980
48.00	- 25	1216	- 101	917	196	972	26	1214	- 121	963
50.00	217	977	- 28	1174	- 103	875	194	930	24	1173
54.00	- 85	1086	- 73	760	213	904	- 32	1100	- 107	801
58.00	- 29	665	218	895	- 88	1022	- 76	697	209	840
62.00	208	898	- 140	936	- 32	610	215	840	- 91	966
66.00	- 182	842	23	544	204	848	- 141	887	- 34	563
70.00	83	501	177	861	- 182	798	21	503	201	805
74.00	134	871	- 210	702	81	465	174	821	- 182	759
78.00	- 220	602	141	449	131	834	- 208	667	79	433
82.00	197	455	73	838	- 218	572	138	420	128	800
86.00	6	828	- 209	476	193	429	71	806	- 216	544
90.00	- 179	387	237	456	5	799	- 206	452	189	405



附表 15  $R_L(u_0, u) \times 10^5 = 10^5 \int_{u_0}^u \frac{B_I(y, u)}{2y} dy$

$u_0 \backslash u$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.00	6656	13253	19729	26026	32095	37880	43342	48443	53149	57437
0.01	3114	7907	13029	18228	23379	28393	33205	37762	42020	45947
0.02	2129	6204	10777	15527	20302	24998	29542	33875	37947	41723
0.03	1532	5077	9236	13646	18136	22589	26927	31087	35017	38677
0.04	1124	4239	8058	12185	16436	20685	24854	28866	32675	36237
0.05	833	3584	7108	10989	15031	19102	23117	27004	30707	34182
0.06	615	3051	6315	9977	13831	17743	21621	25393	29000	32396
0.07	455	2613	5642	9105	12788	16553	20306	23972	27490	30815
0.08	329	2241	5058	8338	11864	15494	19131	22698	26135	29391
0.09	237	1928	4549	7660	11039	14543	18071	21546	24905	28098
0.10	169	1661	4101	7054	10296	13681	17107	20495	23780	26913
0.12	78	1230	3346	6012	9003	12169	15405	18632	21781	24801
0.14	30	906	2738	5149	7913	10881	13945	17023	20047	22963
0.16	8	661	2243	4423	6982	9767	12672	15613	18520	21340
0.18	2	475	1837	3808	6177	8793	11550	14363	17161	19889
0.20	0	335	1500	3280	5473	7933	10551	13243	15938	18579
0.30		32	501	1535	3046	4821	6851	9023	11268	13527
0.40		0	124	665	1628	2932	4497	6249	8121	10056
0.50			13	243	827	1741	2928	4327	5880	7532
0.60			0	63	378	988	1865	2965	4240	5641
0.70				6	144	521	1145	1992	3025	4201
0.80				0	39	246	667	1300	2121	3096
0.90					4	95	358	813	1451	2247
1.00					0	27	172	482	961	1598
1.20						0	19	127	364	740
1.40							0	14	98	286
1.60								0	12	78
1.80									0	9
2.00										0



续附表 15

$u_0 \backslash u$	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0	61290	64701	67666	70192	72290	73978	75286	76239	76872	77221
0.01	49515	52711	55524	57952	60000	61681	63013	64019	64726	65164
0.02	45173	48278	51027	53414	55441	57117	58460	59487	60224	60698
0.03	42035	45071	47770	50125	52135	53807	55157	56199	56959	57461
0.04	39518	42495	45152	47479	49474	51142	52497	53553	54331	54856
0.05	37394	40319	42938	45239	47221	48885	50245	51312	52106	52651
0.06	35546	38423	41007	43286	45255	46915	48278	49355	50163	50726
0.07	33907	36739	39291	41548	43505	45162	46528	47613	48435	49014
0.08	32429	35220	37741	39978	41924	43576	44945	46038	46871	47465
0.09	31085	33836	36329	38546	40481	42129	43500	44600	45444	46052
0.10	29852	32566	35031	37229	39153	40797	42170	43276	44131	44751
0.12	27649	30292	32705	34868	36770	38407	39781	40899	41772	42416
0.14	25727	28035	30668	32797	34679	36307	37683	38810	39699	40364
0.16	24024	26540	28857	30953	32815	34434	35810	36945	37848	38533
0.18	22499	24955	27228	29293	31135	32744	34120	35262	36178	36880
0.20	21118	23518	25747	27782	29604	31204	32578	33726	34654	35372
0.30	15748	17893	19925	21815	23541	25088	26447	27612	28582	29364
0.40	12004	13922	15775	17529	19160	20648	21980	23145	24140	24966
0.50	9236	10948	12634	14257	15792	17215	18511	19666	20672	21527
0.60	7123	8646	10172	11668	13106	14460	15714	16849	17856	18729
0.70	5481	6826	8202	9573	10913	12195	13400	14508	15507	16388
0.80	4191	5371	6603	7854	9096	10303	11453	12527	13511	14393
0.90	3172	4198	5293	6427	7571	8701	9794	10829	11790	12666
1.00	2370	3252	4218	5238	6286	7337	8369	9360	10294	11158
1.20	1249	1877	2605	3410	4271	5163	6067	6960	7825	8647
1.40	588	1005	1526	2137	2821	3557	4328	5113	5895	6658
1.60	230	479	827	1267	1787	2375	3013	3685	4374	5066
1.80	63	189	398	692	1068	1518	2028	2586	3178	3790
2.00	7	52	158	335	588	914	1306	1753	2246	2772
2.20	0	6	44	134	287	507	791	1135	1532	1971
2.40		0	5	37	115	249	411	691	997	1350
2.60			0	4	33	101	217	387	610	883
2.80				0	4	29	88	192	343	542
3.00					0	4	25	78	170	306
3.20						0	3	22	69	152
3.40							0	3	20	63
3.60								0	3	18
3.80									0	2
4.00										0





续附表 15

$u_0 \backslash u$	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
0	77328	77228	76967	76582	76111	74789	73615	72900	72774	73209
0.01	65369	65372	65213	64926	64545	63402	62320	61612	61423	61754
0.02	60943	60988	60872	60625	60282	59212	58170	57465	57251	57539
0.03	57737	57814	57730	57514	57200	56188	55176	54474	54241	54496
0.04	55158	55262	55204	55015	54725	53762	52776	52078	51828	52057
0.05	52975	53103	53070	52903	52635	51715	50752	50057	49794	49999
0.06	51071	51220	51208	51062	50814	49932	48991	48299	48024	48208
0.07	49376	49546	49553	49427	49196	48351	47430	46741	46455	46619
0.08	47845	48032	48058	47949	47735	46924	46022	45336	45041	45187
0.09	46448	46652	46695	46603	46405	45625	44741	44059	43754	43884
0.10	45162	45382	45441	45365	45181	44432	43565	42886	42574	42687
0.12	42854	43103	43192	43145	42990	42297	41463	40791	40464	40549
0.14	40826	41102	41219	41199	41069	40429	39626	38961	38621	38680
0.16	39018	39318	39459	39465	39358	38768	37994	37338	36986	37021
0.18	37385	37708	37873	37902	37818	37274	36529	35880	35519	35532
0.20	35896	36241	36428	36478	36415	35916	35198	34558	34188	34180
0.30	29966	30400	30681	30827	30856	30555	29966	29370	28970	28879
0.40	25626	26129	26484	26708	26814	26685	26214	25668	25255	25102
0.50	22231	22788	23205	23494	23667	23691	23332	22842	22427	22227
0.60	19465	20065	20533	20878	21109	21272	21020	20589	20182	19948
0.70	17147	17781	18291	18684	18966	19255	19107	18739	18348	18090
0.80	15166	15826	16370	16804	17131	17537	17488	17185	16817	16543
0.90	13446	14124	14696	15165	15531	16043	16090	15853	15515	15233
1.00	11938	12628	13221	13718	14119	14727	14866	14697	14393	14110
1.20	9411	10108	10726	11265	11719	12493	12803	12771	12546	12280
1.40	7387	8069	8694	9254	9744	10647	11110	11213	11080	10850
1.60	5744	6396	7009	7574	8083	9081	9675	9907	9873	9696
1.80	4405	5013	5599	6153	6666	7727	8429	8781	8849	8737
2.00	3317	3870	4417	4948	5451	6542	7328	7787	7957	7919
2.20	2440	2931	3429	3924	4407	5498	6344	6895	7162	7203
2.40	1743	2166	2609	3061	3512	4576	5458	6084	6441	6563
2.60	1199	1554	1936	2338	2750	3764	4657	5340	5777	5979
2.80	787	1073	1394	1742	2108	3052	3934	4656	5160	5438
3.00	485	706	966	1257	1575	2432	3284	4024	4582	4929
3.20	274	436	637	873	1140	1899	2702	3442	4039	4447
3.40	137	247	395	578	794	1448	2188	2911	3531	3989
3.60	56	124	224	359	527	1072	1737	2427	3056	3552
3.80	16	50	112	204	328	766	1348	1992	2613	3136
4.00	2	14	47	103	187	524	1018	1605	2206	2742
4.20	0	1	14	42	94	338	744	1266	1833	2369
4.40		0	2	13	39	204	523	974	1498	2022
4.60			0	1	11	110	349	727	1198	1700
4.80				0	1	51	219	523	937	1406
5.00					0	18	126	360	713	1141
5.50						0	15	106	306	610



续附表 15

$u_0 \backslash u$	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0
0	74050	75088	76091	76878	77330	77214	76357	75786	76041	76860
0.01	62482	63423	64365	65136	65614	65620	64873	64310	64489	65225
0.02	58220	59121	60038	60802	61290	61347	60645	60086	60233	60936
0.03	55141	56011	56909	57667	58163	58258	57591	57036	57158	57835
0.04	52671	53515	54396	55149	55651	55779	55141	54589	54692	55346
0.05	50586	51407	52273	53021	53529	53685	53073	52525	52609	53244
0.06	48771	49571	50423	51167	51679	51861	51273	50727	50796	51413
0.07	47160	47940	48780	49520	50036	50241	49675	49133	49187	49788
0.08	45708	46469	47279	48033	48553	48779	48234	47694	47736	48321
0.09	44385	45130	45946	46678	47201	47448	46921	46385	46414	46985
0.10	43170	43899	44705	45433	45959	46224	45716	45183	45200	45758
0.12	40998	41696	42482	43202	43733	44033	43560	43033	43029	43561
0.14	39098	39768	40535	41247	41783	42115	41673	41152	41129	41637
0.16	37411	38055	38803	39508	40048	40408	39996	39482	39441	39928
0.18	35895	36514	37245	37943	38485	38872	38489	37981	37924	38390
0.20	34518	35114	35828	36519	37064	37476	37119	36618	36546	36992
0.30	29109	29601	30238	30892	31443	31958	31721	31255	31123	31482
0.40	25245	25648	26216	26832	27382	27975	27842	27413	27236	27521
0.50	22298	22623	23127	23704	24246	24900	24858	24470	24261	24481
0.60	19958	20213	20657	21194	21724	22425	22466	22121	21887	22050
0.70	18048	18241	18627	19124	19637	20373	20490	20190	19940	20051
0.80	16458	16594	16926	17382	17876	18637	18823	18568	18309	18374
0.90	15112	15197	15477	15893	16364	17142	17389	17182	16919	16943
1.00	13960	14000	14231	14606	15053	15838	16143	15983	15721	15703
1.20	12091	12055	12197	12492	12884	13665	14066	14002	13756	13682
1.40	10645	10553	10617	10835	11169	11921	12397	12426	12211	12092
1.60	9494	9364	9365	9511	9784	10487	11017	11134	10962	10814
1.80	8556	8404	8355	8437	8648	9287	9851	10050	9929	9767
2.00	7773	7617	7530	7557	7709	8272	8850	9121	9059	8895
2.20	7104	6958	6848	6028	6025	7405	7980	8313	8312	8158
2.40	6520	6396	6276	6221	6269	6661	7217	7599	7661	7529
2.60	5999	5909	5791	5711	5716	6020	6543	6962	7085	6983
2.80	5523	5476	5371	5277	5249	5466	5946	6389	6569	6503
3.00	5081	5083	5002	4905	4851	4989	5415	5868	6101	6077
3.20	4664	4720	4671	4581	4510	4577	4943	5394	5671	5693
3.40	4267	4379	4369	4295	4216	4222	4524	4961	5276	5345
3.60	3885	4052	4086	4036	3959	3916	4053	4566	4908	5023
3.80	3515	3736	3817	3798	3730	3652	3825	4204	4565	4724
4.00	3158	3428	3557	3574	3524	3424	3537	3876	4244	4444
4.20	2813	3127	3302	3359	3333	3225	3285	3577	3944	4179
4.40	2482	2833	3022	3150	3153	3052	3065	3308	3663	3928
4.60	2166	2544	2804	2943	2979	2897	2872	3065	3401	3687
4.80	1867	2264	2558	2737	2809	2758	2705	2848	3158	3459
5.00	1586	1993	2316	2532	2639	2630	2560	2655	2933	3240
5.50	981	1371	1730	2018	2211	2333	2269	2269	2450	2740





续附表 15

$u_0 \backslash u$	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0	21.0	22.0	23.0	24.0	25.0
0	77551	77644	77236	76823	76820	77224	77687	77848	77649	77343
0.01	65899	66042	65699	65307	65271	65624	66063	66245	66088	65807
0.02	61602	61766	61449	61067	61016	61348	91778	61969	61829	61557
0.03	58496	58675	58379	58003	57943	58258	58680	58878	58751	58487
0.04	56002	56194	55915	55546	55477	55778	56193	56396	56281	56024
0.05	53895	54099	53835	53471	53395	53684	54094	54301	54196	53945
0.06	52060	52273	52024	51665	51582	51860	52264	52476	52380	52134
0.07	50430	50653	50416	50062	49973	50241	50640	50856	50768	50527
0.08	48959	49190	48965	48616	48522	48780	49175	49394	49313	49077
0.09	47619	47858	47644	47300	47200	47450	47840	48062	47988	47757
0.10	46383	46634	46431	46091	45986	46228	46613	46838	46772	46544
0.12	44183	44443	44260	43927	43814	44040	44417	44648	44594	44374
0.14	42253	42525	42359	42035	41914	42126	42495	42730	42687	42476
0.16	40535	40819	40670	40353	40226	40424	40786	41025	40992	40788
0.18	38990	39284	39151	38841	38708	38894	39248	39491	39468	49271
0.20	37586	37888	37770	37468	37329	37503	37850	38096	38083	37892
0.30	32040	32379	32327	32059	31898	32021	32336	32593	32620	32460
0.40	28044	28409	28412	28177	28002	28084	28368	28631	28690	28558
0.50	24968	25350	25400	25198	25015	25061	25316	25581	25667	25562
0.60	22500	22893	22986	22816	22629	22644	22870	23134	23244	23163
0.70	20464	20863	20992	20854	20667	20655	20855	21114	21243	21186
0.80	18749	19150	19312	19204	19021	18986	19159	19412	19558	19523
0.90	17280	17678	17869	17792	17615	17560	17708	17953	18112	18099
1.00	16009	16401	16616	16569	16401	16329	16452	16687	16858	16865
1.20	13910	14281	14536	14546	14401	14303	14381	14592	14778	14822
1.40	12251	12591	12873	12936	12821	12708	12745	12927	13121	13198
1.60	10010	11212	11509	11619	11538	11419	11420	11572	11766	11869
1.80	9806	10064	10365	10516	10472	10356	10327	10447	10634	10760
2.00	8885	9097	9393	9577	9572	9465	9412	9500	9676	9817
2.20	8109	8273	8555	8765	8798	8707	8637	8694	8853	9006
2.40	7448	7565	7826	8055	8124	8054	7974	8001	8141	8299
2.60	6881	6954	7188	7428	7530	7485	7400	7402	7519	7677
2.80	6391	6423	6625	6868	7001	6983	6900	6879	6973	7126
3.00	5964	5960	6127	6366	6524	6535	6459	6421	6490	6634
3.20	5588	5554	5686	5914	6092	6132	6068	6016	6062	6193
3.40	5255	5198	5294	5506	5698	5766	5719	5658	5681	5797
3.60	4956	4884	4945	5135	5336	5431	5403	5339	5341	5439
3.80	4686	4605	4634	4800	5003	5121	5115	5052	5037	5116
4.00	4438	4357	4357	4496	4696	4834	4851	4794	4765	4824
4.20	4206	4133	4110	4220	4412	4566	4606	4559	4519	4559
4.40	3995	3932	3890	3971	4150	4315	4379	4345	4298	4319
4.60	3792	3747	3692	3745	3907	4079	4164	4146	4097	4101
4.80	3599	3577	3515	3542	3683	3858	3963	3693	3914	3904
5.00	3413	3418	3356	3359	3478	3649	3771	3790	3747	3724
5.50	2975	3054	3015	2977	3036	3183	3331	3399	3381	3342





续附表 15

$u_0 \backslash u$	26.0	27.0	28.0	29.0	30.0	31.0	32.0	33.0	34.0	35.0
0	77246	77451	77779	77959	77876	77652	77524	77612	77849	77994
0.01	65696	65867	66172	66358	66304	66102	65972	66037	66252	66397
0.02	61442	61598	61893	62082	62039	61848	61716	61772	61978	62122
0.03	58368	58513	58801	58991	58958	58773	58641	58690	58889	59032
0.04	55901	56038	56319	56511	56485	56306	56174	56217	56410	56553
0.05	53819	53948	54223	54416	54396	54224	54091	54129	54316	54459
0.06	52006	52127	52397	52592	52578	52410	52277	52311	52493	52635
0.07	50397	50511	50776	50972	50963	50800	50667	50697	50874	51016
0.08	48945	49053	49313	49510	49507	49348	49215	49240	49414	49555
0.09	47623	47726	47981	48179	48180	48025	47892	47914	48083	48224
0.10	46409	46506	46758	46956	46961	46811	46678	46696	46861	47002
0.12	44236	44323	44567	44766	44780	44637	44504	44515	44674	44814
0.14	42335	42413	42649	42850	42870	42734	42602	42607	42760	42898
0.16	40645	40715	40945	41145	41173	41043	40911	40911	41057	41195
0.18	39126	39188	39411	39612	39646	39522	39391	39386	39527	39664
0.20	37746	37800	38017	38219	38258	38141	38010	38001	38135	38271
0.30	32310	32332	32521	32721	32786	32694	32568	32540	32650	32780
0.40	28408	28405	28568	28765	38849	28780	28660	28617	28706	28831
0.50	25413	25390	25529	25721	25821	25773	25660	25606	25676	25794
0.60	23019	22978	23096	23281	23393	23365	23260	23197	23250	23361
0.70	21049	20994	21091	21269	21390	21380	21283	21214	21252	21355
0.80	19394	19328	19406	19574	19703	19709	19622	19548	19572	19667
0.90	17980	17903	17963	18122	18257	18278	18201	18124	18135	18222
1.00	16756	19672	16716	16863	17003	17038	16971	16893	16892	16971
1.20	14738	14645	14658	14783	14926	14985	14941	14863	14842	14904
1.40	13139	13045	13032	13133	13273	13353	13331	13258	13221	13268
1.60	11838	11748	11715	11791	11924	12019	12019	11955	11907	11938
1.80	10756	10675	10626	10678	10801	10907	10927	10875	10820	10836
2.00	9841	9773	9713	9742	9852	9964	10003	9965	9907	9911
2.20	9055	9003	8937	8946	9039	9154	9210	9187	9130	9122
2.40	8371	8338	8271	8261	8337	8451	8521	8513	8460	8443
2.60	7769	7756	7692	7667	7725	7834	7915	7924	7877	7853
2.80	7234	7242	7184	7147	7188	7288	7378	7402	7365	7337
3.00	6755	6784	6736	6690	6713	6803	6898	6937	6910	6880
3.20	6322	6371	6336	6285	6292	6370	6466	6519	6504	6474
3.40	5930	5997	5977	5925	5918	5982	6077	6141	6139	6111
3.60	5573	5655	5651	5602	5582	5632	5723	5796	5808	5784
3.80	5246	5341	5354	5310	5281	5315	5401	5480	5505	5486
4.00	4946	5052	5081	5046	5010	5030	5107	5190	5227	5216
4.20	4671	4783	4829	4804	4764	4771	4837	4922	4970	4967
4.40	4419	4534	4595	4582	4541	4536	4591	4675	4733	4738
4.60	4186	4301	4375	4376	4337	4321	4365	4445	4511	4524
4.80	3972	4085	4170	4184	4150	4126	4157	4232	4303	4326
5.00	3776	3883	3976	4005	3977	3948	3967	4034	4109	4140
5.50	3354	3435	3537	3598	3596	3563	3556	3599	3673	3721



续附表 15

$u_0 \backslash u$	36.0	37.0	38.0	39.0	40.0	41.0	42.0	43.0	44.0	45.0
0	78013	77856	77719	77738	77899	78063	78097	78106	77866	77841
0.01	66433	66297	66163	66168	66311	66469	66513	66539	66308	66274
0.02	62166	62038	61906	61906	62040	62195	62244	62277	62049	62013
0.03	59082	58960	58831	58825	58954	59107	59159	59198	58972	58933
0.04	56607	56491	56363	56354	56477	56628	56683	56726	56503	56462
0.05	54518	54406	54279	54267	54386	54535	54593	54640	54419	54376
0.06	52698	52591	52464	52449	52565	52712	52772	52822	52603	52559
0.07	51082	50979	50854	50836	50948	51094	51156	51209	50992	50946
0.08	49624	49525	49401	49381	49489	49633	49697	49753	49538	49491
0.09	48296	48201	48078	48055	48160	48303	48369	48428	48215	48166
0.10	47076	46984	46862	46838	46939	47081	47148	47210	46999	46949
0.12	44893	44807	44687	44659	44755	44894	44964	45030	44822	44771
0.14	42982	42902	42784	42752	42843	42980	43052	43123	42918	42865
0.16	41283	41208	41092	41057	41143	41278	41352	41427	41225	41171
0.18	39755	39685	39571	39533	39614	39747	39824	39901	39703	39647
0.20	38366	38301	38189	38148	38225	38355	38434	38515	38320	38263
0.30	32888	32845	32742	32691	32748	32868	32954	33048	32868	32807
0.40	28948	28923	28829	28771	28812	28922	29013	29115	28951	28887
0.50	25917	25909	25824	25761	25788	25888	25982	26090	25942	25877
0.60	23488	23494	23419	23353	23367	23458	23553	23665	23533	23469
0.70	21485	21504	21439	21370	21374	21454	21550	21665	21548	21485
0.80	19798	19829	19773	19704	19698	19769	19863	19979	19879	19818
0.90	18352	18393	18347	18279	18264	18326	18419	18534	18450	18392
1.00	17099	17149	17113	17046	17024	17077	17167	17281	17212	17158
1.20	15025	15091	15074	15013	14979	15014	15097	15204	15166	15121
1.40	13377	13454	13456	13403	13361	13380	13453	13551	13543	13507
1.60	12034	12118	12137	12095	12048	12052	12115	12200	12219	12194
1.80	10917	11005	11039	11009	10961	10952	11003	11074	11117	11104
2.00	9974	10063	10111	10093	10046	10027	10066	10122	10185	10183
2.20	9168	9255	9313	9309	9266	9239	9265	9305	9385	9395
2.40	8473	8555	8621	8630	8593	8560	8575	8599	8691	8711
2.60	7867	7942	8013	8035	8005	7970	7973	7983	8084	8113
2.80	7336	7401	7476	7509	7489	7452	7445	7441	7546	7584
3.00	6866	6921	6997	7040	7029	6994	6979	6963	7068	7112
3.20	6449	6493	6566	6618	6618	6586	6565	6538	6640	6688
3.40	6078	6110	6179	6237	6248	6221	6195	6160	6255	6370
3.60	5744	5765	5829	5891	5912	5891	5862	5822	5907	5960
3.80	5444	5454	5510	5575	5605	5592	5562	5519	5591	5644
4.00	5173	5172	5220	5285	5324	5319	5290	5247	5305	5356
4.20	4926	4917	4955	5019	5065	5068	5042	5000	5043	5091
4.40	4702	4685	4713	4773	4825	4838	4815	4777	4804	4847
4.60	4495	4472	4490	4546	4602	4623	4606	4574	4585	4622
4.80	4305	4278	4287	4336	4394	4423	4413	4388	4384	4415
5.00	4128	4100	4100	4142	4200	4236	4233	4217	4200	4223
5.50	3736	3712	3695	3716	3768	3817	3833	3842	3798	3805





续附表 15

$u_0 \backslash u$	46.0	47.0	48.0	49.0	50.0	52.0	54.0	56.0	58.0	60.0
0	77945	78089	78152	78092	77981	77988	78187	78071	78029	78207
0.01	66363	66498	66566	66520	66419	66411	66601	66506	66455	66621
0.02	62095	62226	62297	62256	62159	62145	62331	62244	62190	62352
0.03	59011	59139	59211	59175	59081	59062	59245	59165	59109	59266
0.04	56536	56661	56735	56703	56611	56588	56769	56694	56636	56790
0.05	54446	54569	54644	54615	54525	54499	54677	54608	54548	54699
0.06	52626	52747	52822	52797	52709	52680	52856	52791	52729	52877
0.07	51010	51129	51206	51183	51097	51065	51239	51178	51115	51261
0.08	49552	49669	49747	49726	49642	49608	49780	49723	49659	49802
0.09	48224	48340	48418	48400	48318	48281	48452	48398	48332	48473
0.10	47005	47119	47197	47182	47101	47062	47231	47181	47114	47253
0.12	44822	44933	45013	45001	44924	44881	45046	45022	44933	45068
0.14	42911	43020	43100	43092	43018	42972	43134	43096	43025	43156
0.16	41213	41319	41400	41396	41324	41275	41434	41401	41329	41456
0.18	39686	39789	39871	39870	39801	39749	39905	39877	39803	39927
0.20	38298	38398	38481	38483	38417	38362	38515	38492	38417	38538
0.30	32827	32916	33001	33016	32961	32895	33035	33032	32954	33059
0.40	28896	28974	29059	29084	29039	28967	29093	29107	29027	29119
0.50	25875	25944	26028	26062	26027	25949	26063	26091	26011	26091
0.60	23458	23517	23599	23640	23614	23534	23636	23676	23598	23665
0.70	21468	21517	21597	21644	21626	21545	21635	21686	21610	21666
0.80	19794	19836	19912	19964	19954	19873	19951	20011	19938	19984
0.90	18363	18396	18469	18524	18522	18443	18510	18577	18508	18543
1.00	17124	17149	17128	17277	17282	17205	17261	17334	17271	17296
1.20	15081	15092	15152	15214	15231	15163	15198	15280	15228	15237
1.40	13464	13463	13512	13576	13604	13546	13562	13650	13610	13604
1.60	12151	12140	12178	12240	12277	12232	12231	12320	12295	12276
1.80	11063	11043	11071	11129	11172	11142	11127	11214	11203	11175
2.00	10147	10120	10138	10191	10238	10223	10197	10279	10282	10247
2.20	9364	9334	9341	9387	9438	9438	9403	9478	9494	9455
2.40	8688	8655	8654	8693	8744	8759	8718	8785	8813	8772
2.60	8097	8065	8055	8086	8136	8165	8121	8178	8217	8177
2.80	7577	7546	7530	7552	7600	7642	7598	7643	7691	7654
3.00	7114	7087	7066	7080	7124	7176	7134	7168	7223	7191
3.20	6700	6677	6652	6658	6697	6759	6722	6743	6804	6778
3.40	6327	6310	6284	6282	6315	6383	6353	6363	6427	6409
3.60	5987	5977	5951	5943	5969	6042	6020	6019	6084	6075
3.80	5678	5675	5650	5637	5656	5731	5718	5709	5772	5772
4.00	5395	5399	5377	5360	5372	5447	5444	5427	5487	5496
4.20	5134	5146	5128	5107	5113	5185	5193	5169	5225	5244
4.40	4893	4912	4899	4877	4877	4944	4963	4935	4985	5011
4.60	4669	4695	4687	4665	4659	4721	4749	4719	4762	4796
4.80	4462	4493	4492	4471	4461	4514	4551	4521	4556	4597
5.00	4269	4304	4310	4291	4277	4322	4367	4339	4365	4411
5.50	3841	3883	3904	3896	3878	3898	3957	3940	3945	3998





续附表 15

$u_0 \backslash u$	62.0	64.0	66.0	68.0	70.0	72.0	74.0	76.0	78.0	80.0
0	78144	78069	78221	78201	78108	78229	78243	78146	78234	78277
0.01	66575	66498	66636	66629	66538	66645	66669	66577	66652	66701
0.02	62312	62234	62367	62365	62275	62376	62403	62314	62384	62435
0.03	50232	59153	59282	59284	59194	59291	59321	59234	59300	59352
0.04	56760	56680	56805	56811	56722	56816	56848	56762	56825	56878
0.05	54673	54593	54715	54723	54635	54725	54760	54675	54735	54789
0.06	52855	52775	52894	52905	52818	52905	52941	52857	52915	52970
0.07	51242	51161	51277	51291	51204	51288	51326	51244	51299	51355
0.08	49786	49705	49819	49835	49748	49830	49870	49788	49841	49898
0.09	48460	48379	48490	48508	48422	48502	48543	48462	48513	48571
0.10	47242	47161	47270	47290	47205	47282	47324	47245	47293	47352
0.12	45063	44981	45086	45110	45025	45098	45143	45065	45110	45170
0.14	43155	43073	43174	43201	43118	43187	43234	43158	43200	43261
0.16	41459	41377	41474	41505	41422	41488	41537	41463	41501	41563
0.18	39934	39853	39946	39979	39898	39960	40011	39938	39974	40036
0.20	38548	38467	38557	38592	38512	38571	38623	38553	38585	38649
0.30	33085	33005	33079	33126	33051	33096	33155	33092	33112	33178
0.40	29157	29080	29141	29195	29126	29159	29223	29167	29177	29244
0.50	26139	26065	26114	26175	26111	26134	26201	26152	25154	26221
0.60	23721	23651	23690	23755	23698	23712	23780	23739	23733	23799
0.70	21728	21664	21692	21761	21710	21716	21785	21750	21739	21803
0.80	20052	19992	20012	20083	20039	20037	20106	20078	20061	20124
0.90	18616	18562	18573	18646	18608	18599	18668	18647	18625	18685
1.00	17372	17324	17327	17401	17370	17355	17422	17408	17382	17439
1.20	15315	15281	15270	15342	15325	15301	15263	15361	15330	15380
1.40	13683	13661	13640	13709	13704	13673	13729	13738	13704	13746
1.60	12352	12344	12315	12378	12385	12350	12399	12418	12382	12416
1.80	11246	11251	11216	11271	11289	11253	11293	11320	11286	11311
2.00	10311	10328	10290	10337	10364	10328	10359	10393	10362	10378
2.20	9510	9538	9500	9537	9573	9539	9560	9600	9573	9581
2.40	8817	8855	8818	8845	8887	8857	8870	8913	8891	8891
2.60	8212	8257	8223	8241	8288	8263	8267	8312	8297	8290
2.80	7678	7729	7700	7709	7758	7740	7737	7782	7773	7761
3.00	7205	7260	7237	7237	7288	7276	7266	7310	7309	7292
3.20	6782	6839	6824	7816	6866	6862	6847	6888	6894	6873
3.40	6404	6461	6454	6439	6487	6491	6471	6509	6521	6499
3.60	6063	6118	6119	6100	6144	6155	6133	6166	6184	6161
3.80	5754	5805	5815	5792	5831	5850	5826	5853	5877	5855
4.00	5473	5520	5538	5513	5547	5572	5548	5569	5598	5578
4.20	5218	5258	5284	5258	5286	5316	5294	5309	5341	5324
4.40	4984	5018	5050	5026	5046	5081	5061	5070	5105	5092
4.60	4769	4796	4833	4811	4825	4863	4847	4850	4886	4877
4.80	4572	4591	4633	4614	4621	4661	4650	4647	4684	4680
5.00	4390	4402	4446	4432	4433	4473	4467	4460	4495	4497
5.50	3990	3985	4030	4031	4019	4056	4064	4049	4078	4092



续附表 15

$u_0 \backslash u$	82.0	84.0	86.0	88.0	90.0	92.0	94.0	96.0	98.0	100.0
0	78183	78240	78301	78217	78245	78319	78249	78252	78330	78279
0.01	66614	66660	66723	66648	66667	66740	66679	66675	66750	66708
0.02	62351	62392	62456	62385	62401	62473	62416	62410	62483	62444
0.03	59271	59309	59373	59304	59318	59389	59335	59327	59399	59363
0.04	56799	56834	56899	56832	56843	56915	56863	56853	56925	56891
0.05	54712	54744	54810	54745	54754	54825	54776	54765	54835	54803
0.06	52894	52925	52990	52928	52935	53005	52958	52945	53015	52985
0.07	51281	51309	51375	51314	51320	51390	51344	51331	51400	51371
0.08	49825	49851	49917	49858	49862	49932	59888	49874	49942	49915
0.09	48500	48524	48590	48533	48535	48605	48562	48547	48614	48589
0.10	47282	47305	47371	47315	47316	47386	47344	47328	47395	47371
0.12	45102	45122	45189	45135	45134	45203	45165	45147	45212	45191
0.14	43195	43212	43278	43228	43225	43293	43257	43237	43302	43283
0.16	41500	41514	41580	41532	41527	41594	41561	41540	41603	41587
0.18	39975	39987	40053	40007	40001	40067	40036	40014	40076	40062
0.20	38589	38599	38665	38622	38613	38679	38650	38627	38688	38675
0.30	33128	33127	33194	33160	33144	33206	33187	33159	33215	33211
0.40	29203	29195	29259	29234	29213	29271	29260	29229	29280	29283
0.50	26187	26173	26235	26217	26192	26247	26243	26210	26255	26264
0.60	23773	23753	23813	23802	23774	23825	23827	23793	23833	23847
0.70	21784	21760	21817	21812	21782	21828	21836	21801	21837	21856
0.80	20111	20083	20137	20138	20106	20149	20161	20127	20158	20180
0.90	18679	18648	18698	18705	18672	18710	18727	18693	18720	18745
1.00	17439	17406	17452	17464	17431	17465	17485	17452	17474	17503
1.20	15391	15356	15394	15414	15381	15406	15434	15404	15417	15450
1.40	13766	13731	13761	13788	13758	13774	13806	13780	13786	13821
1.60	12443	12411	12431	12464	12437	12446	12481	12460	12459	12494
1.80	11344	11315	11327	11364	11341	11342	11379	11364	11357	11392
2.00	10416	10391	10396	10434	10417	10412	10449	10440	10428	10461
2.20	9621	9602	9600	9639	9628	9617	9653	9650	9634	9664
2.40	8933	8920	8912	8950	8945	8930	8963	8967	8948	8975
2.60	8332	8325	8312	8348	8349	8331	8361	8370	8350	8372
2.80	7801	7801	7784	7816	7824	7804	7830	7844	7824	7841
3.00	7329	7336	7316	7345	7358	7337	7358	7377	7358	7370
3.20	6907	6920	6898	6922	6941	6921	6936	6959	6941	6949
3.40	6528	6546	6525	6544	6566	6547	6558	6583	6568	6571
3.60	6184	6208	6188	6201	6227	6211	6216	6243	6231	6230
3.80	5873	5900	5882	5890	5918	5905	5906	5934	5926	5921
4.00	5589	5620	5605	5608	5637	5628	5624	5652	5648	5639
4.20	5330	5362	5351	5349	5379	5373	5366	5393	5393	5382
4.40	5092	5126	5118	5112	5141	5141	5130	5155	5160	5147
4.60	4873	4906	4903	4894	4921	4925	4912	4935	4944	4930
4.80	4671	4703	4705	4693	4718	4727	4712	4732	4745	4731
5.00	4485	4514	4521	4507	4530	4542	4527	4544	4560	4546
5.50	4076	4097	4115	4100	4113	4134	4121	4127	4149	4140





续附表 15

$u_0 \backslash u$	100.0	102.0	104.0	106.0	108.0	110.0	112.0	114.0	116.0
0	78279	78261	78337	78305	78272	78340	78329	78284	78342
0.01	66708	66686	66757	66733	66698	66760	66755	66711	66763
0.02	62444	62421	62490	62468	62433	62493	62490	62447	62496
0.03	59363	59339	59406	59387	59351	59409	59409	59365	59413
0.04	56891	56865	56931	56914	56878	56934	56936	56892	56938
0.05	54803	54777	54842	54827	54790	54845	54847	54805	54849
0.06	52985	52958	53022	53008	52972	53025	53029	52986	53029
0.07	51371	51344	51406	51394	51358	51409	51414	51372	51413
0.08	49915	49887	49949	49938	49901	49952	49958	49916	49956
0.09	48589	48560	48621	48612	48575	48624	48631	48589	48629
0.10	47371	47342	47402	47393	47356	47405	47413	47371	47409
0.12	45191	45161	45219	45213	45176	45222	45232	45191	45227
0.14	43283	43252	43308	43304	43267	43312	43323	43282	43317
0.16	41587	41555	41610	41608	41571	41614	41626	41586	41619
0.18	40062	40029	40083	40082	40045	40086	40100	40061	40091
0.20	38675	38642	38695	38696	38659	38698	38714	38674	38704
0.30	33211	33176	33222	33230	33193	33226	33247	33210	33232
0.40	29283	29247	29287	29301	29265	29292	29316	29282	29299
0.50	26264	26229	26263	26282	26247	26269	26296	26264	26276
0.60	23847	23812	23841	23864	23831	23848	23877	23848	23855
0.70	21856	21821	21846	21871	21841	21853	21883	21858	21861
0.80	20180	20147	20167	20195	20167	20174	20206	20184	20183
0.90	18745	18714	18729	18759	18734	18737	18770	18751	18747
1.00	17503	17473	17484	17516	17493	17493	17526	17510	17504
1.20	15450	15425	15428	15462	15445	15439	15471	15461	15450
1.40	13821	13801	13798	13832	13821	13810	13841	13837	13822
1.60	12494	12481	12472	12505	12500	12485	12513	12515	12498
1.80	11392	11384	11371	11402	11402	11385	11410	11417	11399
2.00	10461	10460	10443	10471	10477	10458	10479	10491	10472
2.20	9664	9669	9650	9674	9685	9666	9682	9698	9681
2.40	8975	8985	8965	8985	9000	8982	8993	9012	8996
2.60	8372	8387	8368	8383	8401	8385	8392	8413	8399
2.80	7841	7860	7842	7852	7873	7859	7862	7884	7874
3.00	7370	7392	7376	7381	7404	7393	7392	7415	7408
3.20	6949	6973	6959	6961	6985	6977	6972	6995	6991
3.40	6571	6597	6587	6584	6608	6604	6596	6618	6618
3.60	6230	6256	6250	6243	6267	6266	6256	6276	6280
3.80	5921	5946	5944	5935	5956	5960	5948	5966	5973
4.00	5639	5664	5665	5654	5674	5681	5668	5683	5694
4.20	5382	5405	5410	5398	5415	5425	5412	5424	5434
4.40	5147	5167	5176	5163	5177	5190	5178	5187	5202
4.60	4930	4947	4960	4946	4957	4973	4962	4967	4984
4.80	4731	4744	4760	4747	4755	4772	4763	4765	4783
5.00	4546	4556	4574	4563	4567	4586	4579	4578	4596
5.50	4140	4141	4162	4157	4154	4173	4172	4166	4183





续附表 15

$u_0 \backslash u$	118.0	120.0	122.0	124.0	126.0	128.0	130.0	132.0	134.0
0	78348	78298	78343	78365	78313	78343	78375	78329	78344
0.01	66773	66726	66764	66789	66741	66765	66798	66756	66767
0.02	62508	62461	62497	62523	62477	62499	62532	62492	62501
0.03	59426	59380	59414	59440	59396	59416	59449	59411	59419
0.04	56953	56907	56940	56967	56923	56942	56975	56939	56945
0.05	54864	54820	54851	54878	54835	54853	54886	54851	54856
0.06	53045	53001	53031	53059	53017	53033	53067	53033	53037
0.07	51431	51387	51416	51444	51403	51418	51452	51419	51422
0.08	49974	49931	49958	49987	49947	49961	49995	49962	49965
0.09	48647	48605	48631	48660	48621	48634	48668	48636	48638
0.10	47429	47387	47412	47441	47402	47415	47449	47418	47419
0.12	45248	45207	45230	45260	45222	45233	45267	45238	45237
0.14	43338	43298	43320	43350	43314	43323	43357	43330	43328
0.16	41641	41602	41622	41653	41618	41626	41660	41633	41630
0.18	40115	40077	40095	40126	40092	40099	40133	40108	40104
0.20	38728	38690	38707	38739	38706	38711	38746	38722	38717
0.30	33260	33226	33237	33270	33242	33242	33276	33257	33248
0.40	29329	29299	29304	29338	29314	29310	29343	29329	29317
0.50	26307	26281	26282	26316	26296	26289	26321	26311	26297
0.60	23888	23865	23862	23895	23880	23870	23900	23894	23878
0.70	21894	21874	21869	21901	21889	21877	21906	21903	21886
0.80	20216	20200	20192	20223	20214	20200	20228	20228	20210
0.90	18779	18767	18756	18786	18781	18765	18791	18794	18775
1.00	17535	17526	17513	17541	17539	17523	17546	17552	17533
1.20	15479	15477	15460	15485	15489	15471	15490	15501	15482
1.40	13849	13851	13834	13854	13863	13845	13860	13874	13856
1.60	12521	12529	12510	12527	12540	12522	12533	12550	12534
1.80	11418	11430	11412	11424	11440	11424	11430	11449	11436
2.00	10487	10503	10486	10493	10512	10499	10501	10521	10511
2.20	9690	9709	9694	9697	9718	9707	9705	9726	9719
2.40	9002	9023	9010	9010	9031	9023	9018	9038	9035
2.60	8401	8423	8413	8409	8430	8426	8418	8437	8437
2.80	7871	7894	7888	7881	7901	7900	7891	7907	7911
3.00	7402	7424	7421	7412	7431	7433	7422	7437	7444
3.20	6983	7003	7004	6993	7010	7016	7004	7016	7026
3.40	6607	6626	6630	6618	6633	6641	6630	6639	6651
3.60	6268	6284	6292	6280	6292	6303	6291	6298	6311
3.80	5960	5974	5985	5973	5982	5995	5984	5988	6003
4.00	5681	5691	5705	5694	5699	5714	5706	5706	5722
4.20	5425	5433	5448	5438	5441	5457	5450	5448	5464
4.40	5192	5196	5212	5205	5204	5221	5216	5212	5228
4.60	4975	4976	4994	4989	4986	5002	5000	4994	5009
4.80	4777	4775	4792	4790	4784	4800	4801	4793	4807
5.00	4592	4588	4605	4605	4598	4613	4616	4607	4619
5.50	4186	4177	4191	4198	4188	4198	4207	4199	4205



续附表 15

$u_0 \backslash u$	136.0	138.0	140.0	142.0	144.0	146.0	148.0	150.0
0	78384	78345	78346	78390	78359	78348	78392	78374
0.01	66806	66772	66770	66812	66786	66773	66814	66800
0.02	62540	62508	62504	62545	62522	62508	62548	62535
0.03	59457	59426	59422	59462	59440	59426	59464	59454
0.04	56983	56954	56948	56988	56967	56952	56990	56981
0.05	54894	54866	54859	54899	54879	54864	54901	54892
0.06	53074	53047	53040	53079	53061	53045	53082	53074
0.07	51459	51433	51426	51464	41447	51430	51466	51460
0.08	50002	49977	49969	50007	49990	49974	50009	50003
0.09	48675	48651	48642	48680	48664	48647	48682	48677
0.10	47456	47432	47423	47460	47446	47428	47463	47458
0.12	45274	45252	45242	45278	45265	45247	45281	45277
0.14	43364	43344	43333	43368	43356	43338	43371	43369
0.16	41666	41647	41635	41671	41660	41641	41673	41672
0.18	40140	40122	40109	40144	40134	40115	40146	40146
0.20	38752	38735	38722	38756	38748	38728	38758	38759
0.30	33281	33270	33255	33285	33282	33262	33288	33293
0.40	29348	29341	29324	29352	29352	29332	29355	29363
0.50	26326	26323	26305	26330	26333	26313	26332	26343
0.60	23905	23906	23887	23909	23916	23895	23912	23925
0.70	21910	21914	21895	21914	21923	21903	21917	21932
0.80	20232	20238	20219	20236	20248	20223	20239	20256
0.90	18795	18804	18785	18799	18813	19794	18803	18820
1.00	17551	17562	17543	17555	17570	17553	17559	17577
1.20	15495	15510	15493	15500	15517	15503	15504	15524
1.40	13865	13882	13868	13870	13889	13878	13875	13895
1.60	12538	12557	12546	12544	12563	12555	12550	12569
1.80	11437	11456	11448	11443	11462	11457	11450	11467
2.00	10507	10527	10522	10514	10532	10531	10522	10537
2.20	9713	9732	9730	9720	9737	9739	9728	9742
2.40	9026	9044	9045	9034	9049	9054	9043	9053
2.60	8427	8443	8447	8436	8448	8456	8444	8452
2.80	7900	7913	7920	7909	7918	7929	7918	7923
3.00	7432	7443	7453	7441	7448	7460	7451	7453
3.20	7014	7022	7034	7024	7028	7041	7033	7033
3.40	6640	6645	6659	6650	6651	6666	6659	6657
3.60	6302	6305	6319	6312	6311	6325	6321	6317
3.80	5995	5995	6010	6005	6002	6016	6014	6008
4.00	5716	5714	5729	5726	5721	5735	5735	5728
4.20	5461	5456	5470	5470	5464	5476	5479	5471
4.40	5227	5221	5234	5236	5229	5240	5244	5236
4.60	5010	5003	5015	5019	5011	5020	5027	5019
4.80	4811	4802	4813	4819	4811	4818	4827	4819
5.00	4626	4617	4625	4634	4626	4631	4641	4624
5.50	4216	4209	4212	4224	4218	4218	4230	4226



续附表 15

$u_0 \backslash u$	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
5.50	0	15	106	306	610	981	1371	1730	2018	2211
6.00		0	13	91	264	527	853	1198	1517	1774
6.50			0	11	78	229	461	748	1055	1341
7.00				0	10	69	201	406	662	937
7.50					0	9	60	178	360	590
8.00						0	7	54	158	322
8.50							0	7	48	142
9.00								0	6	43
9.50									0	5
10.00										0

$u_0 \backslash u$	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0	16.0	17.0	18.0	19.0	20.0
5.50	2333	2269	2269	2450	2740	2975	3054	3015	2977	3036
6.00	2042	2043	1993	2075	2308	2569	2720	2730	2681	2687
6.50	1732	1839	1794	1797	1951	2197	2400	2473	2443	2414
7.00	1404	1628	1636	1599	1670	1869	2093	2227	2239	2201
7.50	1070	1395	1489	1455	1461	1594	1806	1983	2049	2027
8.00	753	1139	1330	1340	1312	1375	1547	1743	1861	1875
8.50	477	874	1148	1231	1205	1213	1328	1513	1669	1730
9.00	262	618	943	1107	1119	1097	1153	1304	1476	1581
9.50	116	394	727	961	1035	1015	1023	1125	1288	1426
10.00	35	217	517	794	937	949	932	982	1115	1268
11.00	0	30	183	439	678	803	816	802	847	965
12.00		0	25	156	377	586	696	708	697	738
13.00			0	21	135	328	511	609	621	612
14.00				0	18	118	287	450	537	549
15.00					0	16	104	254	399	478
16.00						0	14	92	226	356
17.00							0	13	82	203
18.00								0	11	74
19.00									0	10
20.00										0





续附表 15

$u_0 \backslash u$	21.0	22.0	23.0	24.0	25.0	26.0	27.0	28.0	29.0	30.0
5.50	3183	3331	3399	3381	3342	3354	3435	3537	3598	3596
6.00	2790	2940	3048	3069	3034	3016	3062	3157	3240	3268
6.50	2466	2595	2726	2788	2776	2744	2755	2827	2919	2975
7.00	2208	2298	2431	2528	2549	2521	2506	2548	2633	2708
7.50	2004	2051	2165	2282	2339	2330	2303	2315	2380	2463
8.00	1844	1851	1933	2050	2138	2159	2135	2124	2162	2239
8.50	1713	1694	1737	1839	1944	1997	1991	1968	1980	2038
9.00	1596	1571	1578	1651	1758	1837	1857	1838	1829	1864
9.50	1482	1469	1454	1493	1585	1680	1729	1724	1705	1716
10.00	1363	1378	1356	1364	1430	1527	1600	1619	1602	1595
11.00	1101	1188	1202	1184	1192	1253	1340	1407	1425	1411
12.00	844	966	1045	1059	1044	1052	1107	1187	1248	1266
13.00	649	744	856	927	941	927	935	986	1060	1117
14.00	542	575	662	763	828	841	830	838	885	953
15.00	489	483	514	593	685	745	758	748	755	799
16.00	428	439	438	462	534	619	674	686	678	685
17.00	320	385	395	391	417	483	561	613	624	616
18.00	183	289	348	358	354	379	440	512	559	570
19.00	66	165	263	317	326	323	345	402	468	513
20.00	9	60	151	239	290	298	295	316	369	431
22.00		0	8	50	126	201	244	252	250	268
24.00				0	6	43	107	172	209	216
26.00						0	5	37	93	149
28.00								0	5	
30.00										0



续附表 15

$u_0 \backslash u$	31.0	32.0	33.0	34.0	35.0	36.0	37.0	38.0	39.0	40.0
5.50	3563	3556	3599	3673	3721	3736	3712	3695	3716	3763
6.00	3247	3223	3239	3300	3357	3398	3388	3364	3365	3403
6.50	2975	2948	2942	2981	3039	3098	3108	3087	3073	3093
7.00	2735	2718	2697	2713	2761	2828	2858	2850	2830	2832
7.50	2514	2516	2493	2488	2521	2585	2631	2641	2624	2612
8.00	2308	2333	2319	2300	2317	2366	2421	2450	2444	2426
8.50	2114	2161	2164	2144	2146	2174	2229	2272	2282	2267
9.00	1933	1996	2021	2008	2001	2008	2053	2105	2131	2126
9.50	1770	1839	1883	1887	1877	1867	1898	1948	1988	1998
10.00	1627	1691	1749	1772	1768	1749	1762	1805	1852	1877
11.00	1405	1435	1494	1549	1570	1561	1500	1563	1602	1646
12.00	1254	1249	1277	1332	1376	1402	1395	1385	1397	1434
13.00	1133	1123	1119	1145	1190	1242	1262	1256	1247	1259
14.00	1005	1021	1012	1008	1033	1081	1124	1143	1138	1130
15.00	862	910	926	918	920	938	982	1023	1041	1036
16.00	725	783	829	844	842	835	856	897	936	952
17.00	624	661	716	759	774	766	764	785	823	859
18.00	564	571	606	657	693	710	705	703	722	759
19.00	523	518	524	557	599	642	655	650	649	667
20.00	472	482	477	483	512	559	594	606	602	601
22.00	314	367	404	413	414	415	442	482	513	524
24.00	214	231	270	318	348	358	355	360	385	420
26.00	181	187	186	200	232	277	306	314	311	316
28.00	81	129	158	163	167	175	207	244	270	277
30.00	4	28	71	115	139	144	144	155	183	217
32.00		0	4	24	59	101	124	128	128	138
34.00				0	7	22	56	91	111	115
36.00						0	3	20	50	81
38.00								0	3	18
40.00										0



续附表 15

$u_0 \backslash u$	41.0	42.0	43.0	44.0	45.0	46.0	47.0	48.0	49.0	50.0
5.50	3817	3833	3842	3798	3805	3841	3883	3904	3896	3878
6.00	3455	3488	3521	3467	3459	3481	3521	3554	3560	3545
6.50	3139	3184	3234	3187	3170	3177	3209	3248	3268	3261
7.00	2866	2914	2972	2945	2927	2921	2940	2978	3008	3014
7.50	2629	2673	2727	2729	2718	2704	2710	2739	2775	2794
8.00	2428	2460	2501	2533	2533	2518	2513	2531	2566	2594
8.50	2257	2274	2297	2351	2366	2357	2344	2350	2378	2411
9.00	2111	2113	2116	2183	2210	2212	2199	2194	2211	2243
9.50	1985	1977	1964	2029	2064	2078	2071	2060	2065	2091
10.00	1873	1860	1838	1889	1927	1953	1955	1943	1939	1955
11.00	1669	1666	1654	1657	1683	1718	1742	1744	1734	1730
12.00	1475	1497	1516	1484	1487	1511	1544	1567	1569	1560
13.00	1293	1331	1375	1351	1341	1344	1366	1398	1419	1422
14.00	1141	1173	1214	1229	1228	1220	1222	1243	1273	1293
15.00	1029	1040	1054	1104	1123	1123	1115	1118	1138	1166
16.00	949	943	931	981	1013	1031	1031	1024	1027	1046
17.00	876	872	860	876	903	934	951	951	944	947
18.00	793	808	819	800	810	835	864	880	880	875
19.00	702	734	769	746	741	750	774	802	818	818
20.00	619	651	690	695	693	689	698	721	747	762
22.00	521	520	517	565	593	605	604	600	608	629
24.00	448	458	463	455	470	496	521	532	531	528
26.00	338	370	407	405	402	402	415	439	462	472
28.00	274	279	283	328	351	359	358	358	370	391
30.00	240	246	247	249	267	293	314	322	320	321
32.00	163	194	228	221	219	223	239	263	283	290
34.00	115	124	134	174	193	199	198	201	216	238
36.00	99	103	101	112	132	157	175	180	179	182
38.00	45	73	104	93	93	101	120	143	159	164
40.00	2	16	32	66	82	85	85	92	110	130
42.00		0	3	15	37	61	75	78	77	84
44.00				0	2	13	34	55	68	71
46.00						0	2	12	31	51
48.00								0	2	11
50.00										0





续附表 15

$u_0 \backslash u$	52.0	54.0	56.0	58.0	60.0	62.0	64.0	66.0	68.0	70.0
5.50	3898	3957	3940	3945	3998	3990	3985	4030	4031	4019
6.00	3542	3605	3606	3594	3644	3654	3637	3675	3692	3674
6.50	3244	3297	3319	3298	3336	3363	3343	3369	3399	3382
7.00	2991	3028	3068	3048	3070	3109	3094	3104	3142	3133
7.50	2776	2793	2844	2832	2837	2882	2878	2874	2913	2916
8.00	2589	2588	2641	2644	2636	2678	2688	2676	2708	2724
8.50	2425	2411	2457	2477	2461	2494	2519	2503	2525	2552
9.00	2276	2257	2290	2325	2310	2329	2364	2352	2362	2395
9.50	2138	2124	2141	2185	2177	2182	2221	2219	2217	2251
10.00	2010	2007	2008	2054	2058	2052	2090	2100	2089	2118
11.00	1773	1804	1789	1818	1849	1837	1855	1886	1877	1886
12.00	1572	1620	1619	1621	1662	1667	1662	1695	1705	1697
13.00	1411	1450	1477	1465	1491	1520	1510	1526	1555	1547
14.00	1289	1299	1343	1344	1365	1382	1387	1384	1414	1423
15.00	1188	1179	1214	1239	1229	1253	1279	1271	1285	1311
16.00	1091	1087	1098	1137	1138	1140	1174	1179	1176	1204
17.00	990	1011	1004	1035	1058	1050	1072	1096	1089	1103
18.00	895	936	933	943	979	980	983	1014	1019	1017
19.00	816	855	874	868	897	918	911	931	954	948
20.00	758	776	813	812	821	854	855	858	886	892
22.00	666	663	680	714	713	722	752	754	757	783
24.00	555	589	586	602	634	633	641	669	672	674
26.00	469	494	525	523	538	567	566	574	600	603
28.00	422	419	442	471	469	483	510	510	517	542
30.00	351	380	377	398	425	424	437	462	462	469
32.00	289	317	344	342	361	386	385	397	421	421
34.00	263	262	288	312	311	329	352	351	363	385
36.00	216	239	238	263	285	284	301	323	322	333
38.00	166	197	218	218	241	262	261	277	297	297
40.00	150	152	181	200	200	221	241	240	255	274
42.00	119	137	139	166	184	184	204	223	222	236
44.00	77	110	126	129	153	171	171	189	206	206
46.00	65	71	101	117	119	142	158	158	175	192
48.00	47	60	65	94	108	110	132	147	147	163
50.00	11	44	56	61	87	101	102	123	137	137
54.00		0	9	37	48	53	76	87	89	107
58.00				0	8	33	42	46	66	77
62.00						0	7	29	37	41
66.00								0	6	26
70.00										0



续附表 15

$u_0 \backslash u$	72.0	74.0	76.0	78.0	80.0	82.0	84.0	86.0	88.0	90.0
5.50	4056	4064	4049	4078	4092	4076	4097	4115	4100	4113
6.00	3701	3723	3706	3724	3748	3734	3743	3769	3758	3761
6.50	3396	3427	3415	3420	3451	3443	3442	3470	3467	3462
7.00	3134	3168	3166	3160	3190	3193	3183	3208	3216	3205
7.50	2907	2939	2947	2935	2960	2973	2960	2978	2995	2983
8.00	2710	2734	2754	2740	2756	2777	2766	2775	2797	2790
8.50	2539	2552	2579	2570	2575	2602	2596	2596	2620	2619
9.00	2389	2390	2420	2419	2415	2441	2445	2438	2459	2467
9.50	2255	2248	2275	2284	2274	2296	2308	2298	2314	2329
10.00	2133	2122	2143	2161	2150	2164	2184	2175	2182	2202
11.00	1916	1911	1913	1940	1939	1936	1960	1963	1958	1977
12.00	1723	1737	1727	1746	1763	1754	1767	1784	1777	1784
13.00	1555	1582	1579	1581	1606	1606	1603	1625	1629	1624
14.00	1417	1440	1453	1445	1463	1478	1470	1482	1499	1493
15.00	1306	1314	1338	1336	1338	1360	1361	1359	1379	1383
16.00	1213	1208	1229	1241	1234	1250	1265	1258	1269	1284
17.00	1127	1122	1129	1152	1150	1153	1174	1174	1173	1191
18.00	1042	1050	1046	1066	1077	1072	1086	1099	1094	1104
19.00	960	983	979	986	1007	1005	1008	1027	1028	1027
20.00	890	913	922	918	936	947	942	956	968	964
22.00	788	787	809	817	813	830	841	836	949	861
24.00	699	704	703	723	730	728	744	753	749	762
26.00	605	628	633	632	651	659	656	671	680	677
28.00	544	547	568	573	572	590	597	595	609	618
30.00	492	494	497	517	521	521	538	544	543	556
32.00	428	449	451	454	473	477	477	493	499	498
34.00	385	392	412	414	417	434	439	439	454	460
36.00	353	354	360	379	381	384	400	404	405	419
38.00	307	326	327	333	350	353	355	371	375	375
40.00	274	283	301	302	308	324	327	329	344	348
42.00	254	254	263	280	281	286	302	304	307	320
44.00	219	236	236	244	261	262	267	281	284	286
46.00	191	204	220	220	228	243	244	249	263	265
48.00	179	178	190	205	205	213	228	228	233	246
50.00	153	167	167	178	192	192	200	214	215	219
54.00	120	120	134	147	147	157	170	170	176	189
58.00	78	94	106	106	118	130	130	139	151	151
62.00	59	68	69	84	94	94	106	116	116	124
66.00	33	36	52	61	62	75	84	85	95	104
70.00	5	23	29	32	47	54	56	67	76	76
74.00		0	5	20	26	29	42	49	50	61
78.00				0	4	18	24	26	38	44
82.00						0	4	17	22	24
90.00										0
100.00										



续附表 15

$u_0 \backslash u$	92.0	94.0	96.0	98.0	100.0	102.0	104.0	106.0	108.0	110.0
5.50	4034	4121	4127	4149	4140	4141	4162	4157	4154	4173
6.00	3786	3780	3777	3801	3799	3792	3813	3815	3807	3823
6.50	3486	3488	3479	3499	3506	3496	3511	3522	3511	3522
7.00	3224	3236	3224	3238	3252	3242	3250	3266	3258	3262
7.50	2994	3013	3003	3009	3028	3021	3022	3041	3037	3035
8.00	2792	2814	2810	2808	2828	2827	2823	2840	2843	2836
8.50	2615	2636	2639	2632	2649	2656	2647	2661	2671	2662
9.00	2457	2475	2485	2476	2488	2501	2492	2500	2514	2508
9.50	2319	2329	2346	2338	2343	2361	2355	2356	2373	2371
10.00	2196	2199	2219	2215	2214	2232	2232	2228	2244	2247
11.00	1984	1977	1992	2002	1994	2005	2017	2010	2017	2030
12.00	1803	1798	1800	1818	1816	1815	1831	1832	1829	1843
13.00	1642	1648	1642	1656	1665	1659	1669	1680	1674	1682
14.00	1500	1516	1512	1515	1531	1529	1529	1544	1545	1540
15.00	1379	1395	1402	1396	1409	1418	1412	1422	1432	1427
16.00	1279	1286	1301	1298	1300	1316	1314	1314	1328	1329
17.00	1195	1191	1207	1213	1208	1220	1228	1223	1232	1242
18.00	1119	1114	1120	1135	1132	1134	1148	1147	1147	1160
19.00	1044	1048	1045	1059	1065	1061	1072	1080	1076	1084
20.00	973	986	982	988	1002	999	1002	1015	1015	1015
22.00	857	866	878	875	880	893	891	894	906	906
24.00	773	769	777	789	786	792	804	802	804	816
26.00	689	699	695	704	715	712	717	729	727	730
28.00	615	626	635	632	640	651	648	653	664	663
30.00	564	561	572	581	578	586	596	594	598	609
32.00	510	518	516	525	534	532	539	549	547	551
34.00	458	470	478	476	485	493	491	498	507	505
36.00	424	423	435	442	440	449	457	455	461	470
38.00	388	394	393	404	411	409	417	425	423	429
40.00	348	361	366	365	376	382	381	389	396	395
42.00	324	325	337	342	341	351	357	356	363	370
44.00	300	303	303	315	320	319	329	335	333	341
46.00	268	280	284	284	295	300	299	308	314	313
48.00	249	251	263	266	267	277	282	281	290	295
50.00	232	234	236	248	251	251	261	266	265	273
54.00	190	194	206	208	210	220	223	224	233	237
58.00	157	169	169	173	184	186	188	197	200	201
62.00	135	135	141	151	152	156	165	167	169	178
66.00	104	112	122	122	127	137	137	141	150	151
70.00	85	94	94	101	110	110	115	124	125	128
74.00	69	69	77	85	86	92	100	100	105	113
78.00	45	65	62	63	70	78	78	84	91	92
82.00	35	40	41	51	57	57	64	71	72	77
90.00	3	14	18	20	29	34	35	43	48	48
100.00					0	3	11	15	19	24





续附表 15

$u_0 \backslash u$	112.0	114.0	116.0	118.0	120.0	122.0	124.0	126.0	128.0	130.0
5.50	4172	4166	4183	4186	4177	4191	4198	4188	4198	4207
6.00	3830	3820	3833	3842	3832	3841	3853	3844	3849	3861
6.50	3535	3525	3532	3546	3539	3541	3556	3550	3549	3563
7.00	3278	3272	3272	3288	3286	3282	3297	3297	3292	3304
7.50	3052	3052	3046	3061	3064	3057	3069	3075	3068	3077
8.00	2850	2857	2849	2860	2869	2861	2868	2878	2872	2876
8.50	2671	2683	2676	2681	2694	2688	2690	2703	0699	2699
9.00	2511	2526	2521	2521	2536	2534	2531	2544	2545	2541
9.50	2368	2384	2384	2379	2393	2396	2390	2401	2407	2401
10.00	2241	2254	2260	2253	2263	2271	2265	2272	2281	2276
11.00	2024	2028	2041	2037	2038	2050	2049	2047	2059	2060
12.00	1846	1841	1853	1859	1853	1862	1869	1864	1870	1879
13.00	1692	1688	1691	1703	1700	1701	1713	1712	1710	1721
14.00	1553	1558	1554	1565	1570	1566	1574	1581	1576	1582
15.00	1433	1444	1440	1443	1454	1452	1452	1463	1463	1461
16.00	1327	1339	1342	1338	1348	1353	1349	1357	1363	1359
17.00	1237	1243	1253	1250	1253	1263	1262	1262	1272	1272
18.00	1162	1160	1171	1174	1171	1180	1185	1181	1188	1195
19.00	1093	1089	1094	1104	1101	1104	1114	1112	1113	1122
20.00	1027	1028	1027	1037	1040	1037	1046	1051	1048	1054
22.00	906	917	918	917	927	930	927	936	940	937
24.00	816	816	827	828	827	836	840	837	845	849
26.00	741	741	741	751	753	752	761	763	761	769
28.00	665	676	676	676	686	687	686	695	698	696
30.00	608	610	620	620	621	630	631	630	638	641
32.00	561	560	563	572	572	573	581	583	582	590
34.00	510	519	518	520	529	530	530	539	540	540
36.00	468	473	481	481	483	492	492	493	501	502
38.00	438	436	440	449	448	450	459	459	460	467
40.00	400	408	407	411	419	419	421	429	429	430
42.00	369	375	382	381	385	393	392	394	402	402
44.00	348	346	352	359	358	362	369	369	371	378
46.00	320	327	325	331	338	337	340	347	347	349
48.00	294	301	307	306	311	318	317	321	328	327
50.00	279	278	284	291	289	294	301	300	303	310
54.00	237	244	249	248	254	260	259	264	270	269
58.00	209	213	213	220	224	224	229	235	234	238
62.00	181	181	189	193	192	199	203	203	208	213
66.00	153	161	164	164	172	175	175	181	185	185
70.00	136	138	140	147	149	150	157	160	160	165
74.00	114	117	124	126	127	134	137	137	144	146
78.00	96	103	104	107	114	116	117	124	126	126
82.00	84	84	88	95	96	98	105	106	108	114
90.00	55	60	61	65	71	72	75	81	82	84
100.00	28	29	35	40	40	45	50	50	54	59



续附表 15

$u_0 \backslash u$	132.0	134.0	136.0	138.0	140.0	142.0	144.0	146.0	148.0	150.0
5.50	4199	4205	4216	4209	4212	4224	4218	4218	4230	4226
6.00	3855	3856	3869	3865	3863	3876	3874	3870	3882	3883
6.50	3562	3558	3570	3571	3566	3577	3580	3573	3582	3588
7.00	3308	3301	3311	3317	3310	3317	3325	3318	3323	3332
7.50	3085	3078	3084	3093	3088	3090	3100	3096	3096	3107
8.00	2888	2882	2883	2895	2892	2890	2902	2901	2897	2907
8.50	2711	2710	2707	2718	2719	2715	2724	2728	2722	2730
9.00	2552	2555	2550	2559	2564	2558	2565	2572	2566	2570
9.50	2408	2416	2410	2415	2424	2419	2422	2431	2428	2428
10.00	2279	2289	2285	2287	2297	2295	2294	2303	2303	2300
11.00	2056	2066	2070	2065	2073	2078	2073	2079	2085	2081
12.00	1874	1878	1887	1884	1885	1894	1892	1891	1900	1900
13.00	1722	1719	1728	1731	1727	1735	1739	1735	1741	1747
14.00	1590	1586	1589	1598	1595	1596	1605	1604	1603	1611
15.00	1471	1473	1470	1478	1482	1478	1485	1490	1486	1491
16.00	1365	1372	1369	1372	1380	1378	1379	1387	1386	1385
17.00	1271	1280	1282	1279	1287	1290	1287	1293	1298	1294
18.00	1191	1196	1203	1200	1203	1211	1209	1210	1218	1217
19.00	1122	1122	1130	1132	1130	1137	1140	1137	1143	1147
20.00	1060	1057	1062	1069	1066	1069	1076	1074	1075	1083
22.00	944	949	947	951	958	955	958	965	963	964
24.00	847	853	858	856	860	866	864	866	873	872
26.00	773	771	776	782	779	783	789	787	790	796
28.00	703	707	705	710	715	713	717	723	721	723
30.00	640	646	650	648	653	658	656	660	666	664
32.00	593	591	598	601	600	605	609	607	611	616
34.00	547	550	548	554	558	556	561	566	564	568
36.00	501	509	511	510	516	519	518	523	527	525
38.00	469	468	475	478	477	482	486	484	489	493
40.00	437	439	438	445	447	446	452	455	454	458
42.00	403	410	412	411	417	420	419	424	427	426
44.00	378	379	386	387	387	393	395	395	400	403
46.00	356	357	357	364	365	365	371	373	372	377
48.00	329	336	336	337	343	345	345	350	352	352
50.00	310	312	318	319	319	325	327	327	332	334
54.00	272	278	278	280	286	287	287	293	294	294
58.00	244	243	246	252	252	253	259	260	260	266
62.00	212	216	221	221	223	229	229	230	236	236
66.00	189	194	193	197	202	202	204	209	209	211
70.00	169	169	173	178	177	181	185	185	187	192
74.00	146	152	155	155	159	163	163	166	170	170
78.00	132	135	135	140	143	143	147	151	150	153
82.00	116	117	122	125	125	129	132	132	136	140
90.00	90	91	92	98	100	100	105	107	107	112
100.00	60	63	68	68	70	75	76	77	82	84



附表 16  $\phi_g^*(u_0, u) \times 10^3 = \frac{10^3}{2} \int_{u_0}^u \frac{1}{y} [1 - B_R(y, u)] dy$

$\sqrt{\frac{u_0}{2\pi}}$	$\sqrt{u/(2\pi)}$														
	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0.00	1010	1021	1039	1065	1102	1152	1215	1291	1377	1472	1568	1664	1749	1821	1878
0.05	826	846	883	920	964	1015	1076	1149	1231	1320	1412	1504	1588	1660	1719
0.10	602	673	729	779	828	882	942	1011	1088	1172	1260	1347	1430	1502	1563
0.15	400	502	578	641	697	754	814	879	952	1031	1114	1198	1279	1351	1413
0.20	200	334	431	507	572	632	692	756	825	899	977	1057	1136	1208	1271
0.25		167	286	378	452	517	579	641	706	776	850	926	1002	1073	1138
0.30			143	251	336	408	472	534	597	663	732	804	877	948	1012
0.35				125	223	303	372	435	496	559	624	692	762	830	895
0.40					111	201	275	341	403	463	525	589	655	722	786
0.45						100	182	253	316	375	434	495	558	621	684
0.50							91	167	234	294	352	409	468	529	590
0.55								83	154	217	275	331	387	444	502
0.60									77	143	203	258	312	366	422
0.65										71	134	190	243	296	348
0.70											67	126	179	230	281
0.75												63	118	169	218
0.80													59	112	161
0.85														56	106
0.90															53





续附表 16

$\sqrt{\frac{u_0}{2\pi}}$	$\sqrt{u/(2\pi)}$														
	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70
0.00	1922	1956	1988	2024	2067	2116	2166	2210	2246	2274	2301	2331	2367	2404	2437
0.05	1765	1801	1834	1870	1912	1960	2008	2053	2090	2119	2146	2176	2211	2247	2280
0.10	1611	1650	1684	1720	1761	1806	1854	1899	1936	1967	1994	2024	2058	2094	2127
0.15	1464	1505	1541	1576	1616	1660	1707	1751	1789	1821	1849	1879	1912	1947	1980
0.20	1324	1368	1405	1441	1479	1520	1567	1611	1651	1683	1713	1741	1773	1808	1841
0.25	1193	1238	1277	1314	1351	1392	1436	1480	1520	1554	1584	1612	1644	1678	1711
0.30	1069	1117	1158	1195	1232	1271	1314	1357	1398	1433	1463	1492	1523	1556	1589
0.35	953	1004	1046	1084	1121	1159	1201	1243	1284	1320	1351	1380	1410	1442	1475
0.40	845	897	942	981	1018	1056	1095	1137	1177	1214	1247	1276	1306	1337	1370
0.45	743	797	844	885	923	959	998	1038	1078	1116	1150	1180	1209	1239	1271
0.50	649	703	752	795	834	870	907	946	986	1024	1059	1090	1119	1148	1179
0.55	560	615	666	711	750	787	823	861	899	938	973	1005	1035	1064	1094
0.60	478	533	584	631	672	710	745	781	819	857	893	926	956	985	1014
0.65	402	455	507	555	598	637	673	708	744	781	818	852	882	911	940
0.70	332	383	434	483	528	568	604	639	674	710	747	781	813	842	870
0.75	267	316	366	414	460	502	540	575	609	644	680	715	747	777	805
0.80	208	255	302	350	396	439	479	514	548	582	617	652	685	715	744
0.85	153	198	244	290	335	379	420	457	491	524	558	592	625	657	686
0.90	101	146	189	233	278	321	363	401	437	470	502	535	569	601	631
0.95	50	96	139	181	224	267	308	348	384	418	450	482	515	547	578
1.00		48	92	133	174	215	256	296	334	369	401	432	464	496	527
1.05			45	88	128	167	207	246	285	321	354	385	416	447	478
1.10				44	84	123	161	199	238	274	308	340	371	401	432
1.15					42	81	118	155	192	229	264	297	328	357	387
1.20						39	78	114	150	186	221	255	286	316	345
1.25							38	75	110	145	180	214	246	276	305
1.30								37	72	106	140	174	207	238	267
1.35									36	70	102	135	168	200	230
1.40										35	67	99	131	163	194
1.45											33	65	96	127	158
1.50												32	63	93	123
1.55													31	61	91
1.60														30	59
1.65															29



续附表 16

$\sqrt{\frac{u_0}{2\pi}}$	$\sqrt{u/(2\pi)}$																	
	1.75	1.80	1.85	1.90	1.95	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00	3.50	4.00
0.00	2463	2486	2512	2542	2572	2596	2640	2692	2732	2778	2816	2858	2893	2932	2964	3000	3153	3287
0.05	2307	2330	2356	2385	2415	2440	2484	2535	2576	2621	2660	2701	2737	2775	2808	2844	2997	3120
0.10	2154	2178	2203	2232	2262	2288	2331	2382	2423	2468	2507	2548	2584	2622	2656	2691	2844	2979
0.15	2008	2033	2058	2086	2115	2141	2186	2236	2278	2322	2362	2402	2439	2476	2510	2545	2699	2833
0.20	1870	1895	1920	1948	1977	2003	2048	2097	2140	2184	2224	2264	2301	2338	2372	2407	2560	2694
0.25	1741	1766	1791	1818	1846	1873	1918	1967	2011	2054	2094	2134	2171	2208	2242	2277	2431	2565
0.30	1619	1645	1670	1697	1725	1752	1798	1864	1890	1932	1973	2012	2050	2087	2121	2156	2310	2444
0.35	1506	1533	1558	1584	1611	1639	1685	1732	1777	1819	1861	1899	1937	1974	2008	2043	2197	2331
0.40	1401	1428	1453	1479	1506	1533	1580	1627	1672	1714	1756	1794	1833	1868	1904	1938	2092	2226
0.45	1302	1331	1356	1381	1408	1435	1483	1529	1575	1616	1658	1696	1735	1771	1806	1840	1994	2128
0.50	1211	1240	1266	1291	1316	1343	1392	1438	1484	1525	1567	1605	1644	1679	1715	1749	1903	2037
0.55	1125	1155	1181	1206	1231	1258	1308	1353	1399	1440	1482	1520	1559	1594	1630	1664	1818	1952
0.60	1045	1075	1102	1127	1152	1178	1229	1273	1319	1360	1402	1441	1479	1515	1551	1584	1739	1872
0.65	970	1000	1028	1053	1078	1103	1154	1199	1245	1286	1328	1366	1405	1440	1476	1510	1664	1798
0.70	899	929	958	984	1009	1033	1084	1129	1174	1217	1258	1297	1335	1371	1406	1440	1594	1728
0.75	833	863	891	918	943	968	1018	1061	1108	1151	1192	1231	1269	1305	1340	1374	1528	1662
0.80	772	800	829	856	882	906	955	1002	1046	1089	1129	1169	1206	1243	1278	1312	1466	1600
0.85	713	741	769	797	823	848	896	944	987	1031	1070	1111	1148	1184	1219	1253	1407	1541
0.90	658	686	713	742	768	792	840	888	931	975	1015	1055	1092	1129	1163	1198	1352	1485
0.95	606	633	660	688	714	740	787	835	878	922	962	1002	1039	1076	1110	1145	1299	1432
1.00	556	583	610	637	664	689	737	784	828	871	912	951	989	1025	1060	1094	1248	1382
1.05	508	536	562	588	615	641	689	736	781	823	864	903	941	977	1012	1046	1200	1334
1.10	462	490	517	543	569	595	644	690	735	777	818	857	895	931	966	1000	1155	1288
1.15	417	446	473	499	525	550	600	646	691	733	774	813	851	887	923	956	1111	1244
1.20	374	403	431	458	483	508	558	603	649	691	732	771	809	845	880	914	1068	1202
1.25	334	362	391	417	443	467	517	563	608	651	691	731	768	805	840	873	1028	1161
1.30	295	323	351	378	404	429	478	525	569	612	652	692	729	766	801	835	989	1122
1.35	258	285	313	340	367	392	440	487	531	574	614	654	692	728	763	797	951	1085
1.40	222	250	277	304	330	356	404	451	495	538	579	618	655	692	727	761	915	1049
1.45	188	216	242	268	295	321	369	416	460	503	544	583	621	657	692	726	880	1014
1.50	153	182	209	235	261	287	336	382	427	469	510	549	587	623	658	692	847	980
1.55	120	149	177	203	228	254	303	349	394	436	477	516	554	590	626	659	814	947
1.60	83	117	145	172	197	222	271	318	362	405	445	485	523	559	594	628	782	916
1.65	58	86	114	141	167	192	240	287	331	374	415	454	492	528	563	597	751	885
1.70	29	56	83	110	137	162	210	258	301	344	385	424	462	499	533	568	722	855



续附表 16

$\sqrt{\frac{u_0}{2\pi}}$	$\sqrt{u/(2\pi)}$																	
	1.75	1.80	1.85	1.90	1.95	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00	3.50	4.00
1.75		28	55	81	108	133	182	228	273	315	356	395	433	470	505	539	693	826
1.80			27	53	79	105	154	200	245	287	328	367	405	441	477	510	665	798
1.85				26	52	77	127	173	217	260	301	340	378	414	449	483	637	771
1.90					26	51	100	146	191	233	274	313	351	387	423	456	611	744
1.95						25	73	121	164	208	248	288	325	362	396	430	585	718
2.00							48	95	139	182	223	262	300	336	371	405	559	693
2.05							24	70	115	157	198	237	275	311	347	381	535	668
2.10								46	91	133	174	213	251	287	323	356	511	644
2.15								23	67	110	150	190	227	264	299	333	487	621
2.20									44	87	127	167	204	241	276	310	464	598
2.25									21	64	105	144	182	219	254	288	442	575
2.30										42	83	122	160	196	232	266	420	553
2.35										21	62	101	139	175	210	244	398	532
2.40											40	80	117	154	189	223	377	511
2.45											20	59	97	133	168	202	357	490
2.50												39	77	113	148	182	336	470





附表 17  $S_C(c, v_0, \theta_0)$

km

$\theta_0 = 5^\circ$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.04	0.18	0.71	1.6	2.8	4.4	6.4	8.7
0.2	0.04	0.18	0.70	1.6	2.7	4.0	5.6	7.4
0.4	0.04	0.18	0.70	1.5	2.5	3.7	5.0	6.5
0.6	0.04	0.18	0.69	1.5	2.4	3.4	4.6	5.8
0.8	0.04	0.18	0.69	1.5	2.3	3.2	4.2	5.3
1.0	0.04	0.18	0.68	1.5	2.2	3.0	3.9	4.8
1.2	0.04	0.18	0.68	1.4	2.1	2.9	3.6	4.4
1.4	0.04	0.17	0.67	1.4	2.1	2.7	3.4	4.2
1.6	0.04	0.17	0.67	1.4	2.0	2.6	3.3	3.9
1.8	0.04	0.17	0.66	1.4	2.0	2.5	3.1	3.7
2.0	0.04	0.17	0.65	1.4	1.9	2.4	3.0	3.5
3.0	0.04	0.17	0.64	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9
4.0	0.04	0.17	0.62	1.2	1.6	1.9	2.2	2.5
5.0	0.04	0.17	0.60	1.2	1.5	1.8	2.0	2.3
6.0	0.04	0.17	0.59	1.1	1.4	1.6	1.8	2.1

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	8.7	11.4	14.4	17.7	25.5	34.8	45.4	57.5	70.9
0.1	8.0	10.3	12.8	15.4	21.4	27.6	34.2	40.9	47.6
0.2	7.4	9.4	11.5	13.8	18.4	23.1	27.9	32.4	36.8
0.3	6.9	8.7	10.5	12.4	16.2	20.0	23.7	27.1	30.3
0.4	6.5	8.1	9.7	11.3	14.5	17.7	20.6	23.4	25.9
0.5	6.1	7.6	9.0	10.4	13.2	15.9	18.3	20.6	22.7
0.6	5.8	7.1	8.4	9.6	12.1	14.4	16.5	18.4	20.2
0.7	5.5	6.7	7.8	9.0	11.2	13.2	15.0	16.7	18.2
0.8	5.3	6.3	7.4	8.4	10.4	12.2	13.7	15.3	16.6
0.9	5.0	6.0	7.0	7.9	9.7	11.3	12.7	14.1	15.3
1.0	4.8	5.7	6.6	7.5	9.1	10.6	12.0	13.1	14.2
1.2	4.4	5.3	6.0	6.8	8.1	9.4	10.6	11.5	12.4
1.4	4.2	4.9	5.6	6.2	7.4	8.5	9.5	10.3	11.1
1.6	3.9	4.6	5.2	5.7	6.8	7.8	8.7	9.4	10.1
1.8	3.7	4.3	4.8	5.4	6.3	7.2	8.0	8.7	9.3
2.0	3.5	4.1	4.6	5.0	5.9	6.7	7.5	8.0	8.6
3.0	2.9	3.3	3.6	4.0	4.6	5.1	5.5	6.0	6.4
4.0	2.5	2.8	3.1	3.3	3.8	4.2	4.5	4.9	4.3
5.0	2.3	2.5	2.7	2.9	3.3	3.6	3.9	4.1	4.3
6.0	2.1	2.3	2.4	2.6	2.9	3.2	3.4	3.6	3.8



续附表 17

$$\theta_0 = 10^\circ$$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.09	0.35	1.4	3.1	5.6	8.8	12.6	17.2
0.2	0.09	0.35	1.4	3.0	5.0	7.4	10.1	13.0
0.4	0.09	0.35	1.4	2.9	4.6	6.4	8.5	10.6
0.6	0.09	0.35	1.3	2.8	4.2	5.7	7.3	9.0
0.8	0.09	0.34	1.3	2.8	4.0	5.2	6.6	7.9
1.0	0.09	0.34	1.3	2.7	3.8	4.9	6.0	7.2
1.2	0.09	0.34	1.3	2.6	3.7	4.6	5.6	6.6
1.4	0.09	0.34	1.3	2.6	3.5	4.4	5.2	6.1
1.6	0.09	0.34	1.3	2.5	3.4	4.2	4.9	5.7
1.8	0.09	0.34	1.2	2.5	3.3	4.0	4.7	5.4
2.0	0.09	0.34	1.2	2.5	3.2	3.8	4.5	5.1
3.0	0.09	0.33	1.2	2.2	2.8	3.3	3.7	4.2
4.0	0.09	0.33	1.1	2.0	2.5	2.9	3.2	3.6
5.0	0.09	0.32	1.1	1.9	2.3	2.6	2.9	3.1
6.0	0.09	0.32	1.0	1.7	2.1	2.4	2.6	2.8

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	17.2	22.4	28.4	35.1	50.5	68.7	89.8	113.6	140.3
0.1	14.2	18.8	23.1	27.6	37.4	47.5	57.9	68.5	79.4
0.2	13.0	16.2	19.6	22.9	29.9	36.8	43.5	50.0	56.5
0.3	11.7	14.3	17.0	19.6	25.0	30.1	35.0	39.6	44.1
0.4	10.6	12.8	15.0	17.2	21.5	25.5	29.3	32.8	36.1
0.5	9.7	11.6	13.5	15.3	18.9	22.2	25.3	28.0	30.7
0.6	9.0	10.7	12.3	13.9	16.9	19.7	22.3	24.5	26.7
0.7	8.4	9.9	11.3	12.7	15.4	17.8	19.9	21.9	23.8
0.8	7.9	9.2	10.5	11.8	14.1	16.2	18.0	19.9	21.5
0.9	7.5	8.7	9.9	11.0	13.0	14.9	16.6	18.2	19.6
1.0	7.2	8.2	9.3	10.3	12.2	13.9	15.5	16.9	18.1
1.2	6.6	7.5	8.4	9.3	10.8	12.3	13.6	14.7	15.7
1.4	6.1	6.9	7.7	8.5	9.8	11.1	12.2	13.1	14.0
1.6	5.7	6.4	7.1	7.8	9.0	10.1	11.1	11.9	12.7
1.8	5.4	6.0	6.7	7.3	8.3	9.3	10.2	10.9	11.6
2.0	5.1	5.7	6.3	6.8	7.8	8.7	9.4	10.1	10.7
3.0	4.2	4.6	5.0	5.3	6.0	6.6	7.1	7.5	8.0
4.0	3.6	3.9	4.2	4.4	4.9	5.4	5.8	6.1	6.4
5.0	3.1	3.4	3.6	3.9	4.2	4.6	4.9	5.2	5.4
6.0	2.8	3.0	3.2	3.4	3.7	4.0	4.3	4.5	4.7



续附表 17

$$\theta_0 = 15^\circ$$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.13	0.52	2.1	4.6	8.3	12.9	18.6	25.3
0.2	0.13	0.52	2.0	4.5	7.1	10.2	13.7	17.5
0.4	0.13	0.52	2.0	4.3	6.4	8.6	11.0	13.6
0.6	0.13	0.51	2.0	4.1	5.9	7.6	9.4	11.3
0.8	0.13	0.51	1.9	4.0	5.5	7.0	8.4	9.9
1.0	0.13	0.51	1.9	3.8	5.2	6.4	7.7	9.0
1.2	0.13	0.51	1.9	3.7	5.0	6.0	7.1	8.2
1.4	0.13	0.50	1.8	3.6	4.8	5.7	6.7	7.6
1.6	0.13	0.50	1.8	3.5	4.6	5.4	6.3	7.1
1.8	0.13	0.50	1.8	3.4	4.4	5.2	6.0	6.7
2.0	0.13	0.50	1.7	3.3	4.2	5.0	5.7	6.3
3.0	0.12	0.49	1.6	2.9	3.6	4.2	4.6	5.1
4.0	0.12	0.48	1.5	2.6	3.2	3.6	4.0	4.3
5.0	0.12	0.47	1.4	2.4	2.9	3.2	3.5	3.8
6.0	0.12	0.46	1.3	2.2	2.6	2.9	3.1	3.4

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	25.3	33.0	41.8	51.6	74.3	101.1	132.1	167.1	206.3
0.1	20.6	26.0	31.9	38.0	51.2	65.1	79.9	95.5	112.1
0.2	17.5	21.7	25.8	30.3	39.2	48.2	57.4	66.5	75.7
0.3	15.3	18.6	21.8	25.2	31.7	38.3	44.6	50.7	56.9
0.4	13.6	16.3	18.9	21.6	26.6	31.7	36.5	40.9	45.4
0.5	12.3	14.6	16.8	18.9	23.1	27.1	31.0	34.3	37.7
0.6	11.3	13.4	15.2	17.0	20.5	23.8	27.0	29.7	32.3
0.7	10.5	12.4	13.9	15.5	18.6	21.3	24.0	26.3	28.4
0.8	9.9	11.5	12.9	14.4	17.1	19.4	21.7	23.7	25.6
0.9	9.4	10.8	12.1	13.3	15.7	17.9	19.8	21.7	23.3
1.0	9.0	10.2	11.4	12.5	14.6	16.6	18.3	20.0	21.4
1.2	8.2	9.2	10.2	11.2	13.0	14.6	16.0	17.3	18.5
1.4	7.6	8.5	9.4	10.2	11.7	13.1	14.3	15.4	16.4
1.6	7.1	7.9	8.6	9.4	10.7	11.6	13.0	14.0	14.8
1.8	6.7	7.4	8.1	8.7	9.9	11.0	11.9	12.8	13.5
2.0	6.3	7.0	7.6	8.1	9.2	10.2	10.9	11.8	12.4
3.0	5.1	5.5	5.9	6.2	7.0	7.6	8.1	8.7	9.2
4.0	4.3	4.7	4.9	5.2	5.8	6.2	6.6	7.0	7.4
5.0	3.8	4.1	4.3	4.5	4.9	5.3	5.6	5.6	6.2
6.0	3.4	3.6	3.8	4.0	4.3	4.7	4.8	5.1	5.4





续附表 17

$$\theta_0 = 20^\circ$$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.16	0.68	2.7	6.0	10.7	16.8	24.1	32.8
0.2	0.16	0.67	2.6	5.8	8.9	12.6	16.7	21.3
0.4	0.16	0.67	2.6	5.5	8.0	10.5	13.2	16.0
0.6	0.16	0.66	2.5	5.2	7.3	9.2	11.3	13.6
0.8	0.16	0.66	2.4	5.0	6.8	8.5	10.1	11.7
1.0	0.16	0.66	2.4	4.8	6.4	7.8	9.2	10.6
1.2	0.16	0.65	2.3	4.6	6.1	7.2	8.4	9.6
1.4	0.16	0.65	2.3	4.4	5.8	6.8	7.9	8.9
1.6	0.16	0.64	2.2	4.3	5.5	6.4	7.4	8.3
1.8	0.16	0.64	2.2	4.1	5.3	6.1	7.0	7.8
2.0	0.16	0.63	2.2	4.0	5.0	5.8	6.6	7.3
3.0	0.16	0.62	2.0	3.5	4.2	4.8	5.3	5.8
4.0	0.16	0.60	1.8	3.1	3.7	4.1	4.5	4.9
5.0	0.16	0.59	1.7	2.8	3.3	3.6	4.0	4.3
6.0	0.16	0.57	1.6	2.6	3.0	3.3	3.6	3.8

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	32.8	42.8	54.2	66.9	69.4	131.2	171.3	216.9	267.7
0.1	25.8	32.6	39.9	47.6	64.5	83.3	104.0	127.1	153.0
0.2	21.3	26.4	31.6	36.9	48.2	60.1	72.6	85.8	99.9
0.3	18.3	22.1	26.0	30.1	38.1	46.6	55.1	63.6	72.4
0.4	16.0	19.3	22.3	25.4	31.6	37.9	44.0	49.9	56.1
0.5	14.6	17.1	19.7	22.2	27.1	32.0	36.7	41.0	45.5
0.6	13.6	15.6	17.7	19.8	23.9	27.8	31.6	35.0	38.4
0.7	12.5	14.4	16.3	18.0	21.5	24.7	27.9	30.7	33.5
0.8	11.7	13.4	15.0	16.6	19.7	22.4	25.1	27.5	29.8
0.9	11.1	12.6	13.9	15.4	18.1	20.6	22.9	25.0	27.0
1.0	10.6	11.9	13.1	14.4	16.9	19.0	21.1	22.9	24.7
1.2	9.6	10.7	11.8	12.9	14.9	16.7	18.3	19.8	21.2
1.4	8.9	9.9	10.8	11.7	13.4	14.9	16.3	17.6	18.7
1.6	8.3	9.2	9.9	10.7	12.2	13.5	14.7	15.8	16.8
1.8	7.8	8.5	9.3	10.7	11.3	12.4	13.4	14.4	15.3
2.0	7.3	8.0	8.7	9.3	9.8	11.5	12.4	13.3	14.0
3.0	5.8	6.3	6.8	7.1	7.8	8.6	9.2	9.7	10.2
4.0	4.9	5.2	5.6	5.8	6.4	6.9	7.4	7.7	8.1
5.0	4.3	4.5	4.8	5.1	5.5	5.9	6.2	6.5	6.8
6.0	3.8	4.0	4.3	4.5	4.8	5.2	5.4	5.7	5.9



续附表 17

$\theta_0 = 25^\circ$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.20	0.81	3.2	7.3	12.9	20.2	29.1	29.6
0.2	0.20	0.81	3.1	6.9	10.6	14.7	19.5	24.6
0.4	0.20	0.81	3.0	6.5	9.4	12.2	15.3	19.5
0.6	0.20	0.80	3.0	6.2	8.6	10.8	13.0	15.4
0.8	0.20	0.80	2.9	5.8	7.9	9.7	11.5	13.1
1.0	0.20	0.79	2.8	5.6	7.4	9.0	10.5	11.9
1.2	0.20	0.78	2.8	5.3	7.0	8.3	19.6	10.8
1.4	0.20	0.77	2.7	5.1	6.6	7.8	8.9	10.0
1.6	0.20	0.77	2.6	4.9	6.3	7.3	8.3	9.3
1.8	0.20	0.76	2.6	4.7	6.0	6.9	7.8	8.7
2.0	0.20	0.75	2.5	4.6	5.7	6.6	7.4	8.2
3.0	0.20	0.73	2.3	4.0	4.8	5.5	5.9	6.5
4.0	0.20	0.71	2.1	3.5	4.1	4.6	5.1	5.4
5.0	0.20	0.69	1.9	3.1	3.7	4.0	4.5	4.7
6.0	0.19	0.67	1.8	2.8	3.3	3.6	3.9	4.1

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	39.6	51.8	65.5	80.8	116.3	158.4	206.9	261.9	328.3
0.1	30.4	38.5	47.4	56.9	78.5	103.3	131.9	164.5	201.5
0.2	24.6	30.7	36.8	43.3	57.7	73.5	91.0	110.3	132.0
0.3	21.1	25.5	30.0	34.8	44.9	55.7	67.2	79.5	92.8
0.4	18.5	22.0	25.5	29.1	36.6	44.4	52.5	60.8	69.7
0.5	16.7	19.6	22.4	25.2	31.1	36.9	42.9	48.9	55.0
0.6	15.4	17.8	20.1	22.4	27.3	31.8	36.4	40.9	45.4
0.7	14.2	16.4	18.4	20.4	24.5	28.2	31.8	35.4	38.9
0.8	13.1	15.2	17.0	18.8	22.3	25.5	28.5	31.5	34.3
0.9	12.5	14.2	15.8	17.4	20.5	23.2	25.9	28.5	30.9
1.0	11.9	13.4	14.8	16.2	19.0	21.4	23.8	26.0	28.1
1.2	10.8	12.1	13.3	14.5	16.6	18.6	20.6	22.3	24.0
1.4	10.0	11.0	12.1	13.0	14.9	16.6	18.2	19.6	20.9
1.6	9.3	10.2	11.1	11.9	13.6	15.0	16.3	17.6	18.6
1.8	8.7	9.5	10.2	11.0	12.5	13.7	14.8	16.0	16.9
2.0	8.2	9.0	9.6	10.3	11.6	12.7	13.7	14.8	15.5
3.0	6.5	7.0	7.4	7.8	8.6	9.4	10.1	10.5	11.2
4.0	5.4	5.8	6.1	6.4	7.0	7.5	8.1	8.4	8.8
5.0	4.7	5.0	5.2	5.5	6.0	6.4	6.8	7.1	7.4
6.0	4.1	4.4	4.6	4.9	5.2	5.6	5.9	6.2	6.4



续附表 17  
 $\theta_0 = 30^\circ$

<div><div><math>v_0</math></div><div><math>c</math></div></div>	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.23	0.93	3.7	8.4	14.9	23.2	33.5	45.6
0.2	0.23	0.93	3.6	7.8	12.2	16.6	21.9	27.9
0.4	0.23	0.92	3.5	7.4	10.7	13.9	17.2	20.8
0.6	0.23	0.92	3.4	7.0	9.7	12.1	14.6	17.2
0.8	0.23	0.91	3.3	6.6	8.9	10.8	12.8	14.8
1.0	0.23	0.90	3.2	6.3	8.3	10.0	11.6	13.2
1.2	0.23	0.89	3.1	6.0	7.8	9.3	10.6	12.0
1.4	0.23	0.88	3.0	5.7	7.4	8.6	9.9	11.0
1.6	0.23	0.87	3.0	5.5	7.0	8.1	9.2	10.2
1.8	0.23	0.86	2.9	5.3	6.6	7.7	8.6	9.5
2.0	0.23	0.85	2.8	5.1	6.3	7.3	8.1	8.9
3.0	0.22	0.83	2.6	4.4	5.2	6.0	6.5	7.0
4.0	0.22	0.80	2.3	3.9	4.5	5.0	5.5	5.9
5.0	0.22	0.77	2.2	3.5	4.0	4.3	4.8	5.1
6.0	0.22	0.75	2.0	3.2	3.6	3.9	4.2	4.4

<div><div><math>v_0</math></div><div><math>c</math></div></div>	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	45.6	59.5	75.3	93.0	133.8	182.2	238.0	301.2	371.8
0.1	34.7	44.0	54.4	66.1	92.8	124.4	160.9	202.6	249.3
0.2	27.9	34.7	41.9	49.9	67.8	88.6	112.4	139.4	169.7
0.3	23.6	28.6	38.9	39.7	52.1	66.2	82.0	99.7	119.5
0.4	20.8	24.6	28.6	32.9	41.9	51.8	62.7	74.7	87.9
0.5	18.8	21.8	25.0	28.3	35.1	42.4	50.1	58.6	67.6
0.6	17.2	19.8	22.4	25.1	30.5	36.1	41.8	47.9	54.3
0.7	15.9	18.2	20.4	22.7	27.3	31.7	36.2	40.6	45.4
0.8	14.8	16.9	18.8	20.8	24.8	28.5	32.2	35.6	36.3
0.9	13.9	15.8	17.5	19.3	22.7	26.0	29.1	32.0	34.9
1.0	13.2	14.8	16.4	18.0	21.1	23.8	26.6	29.2	31.7
1.2	12.0	13.4	14.6	15.9	18.3	20.7	22.9	24.8	26.8
1.4	11.0	12.3	13.2	14.3	16.4	18.3	20.1	21.7	23.3
1.6	10.2	11.3	12.1	13.1	14.9	16.4	18.0	19.4	20.6
1.8	9.5	10.4	11.2	12.1	13.6	15.0	16.4	17.5	18.5
2.0	8.9	9.8	10.4	11.2	12.6	13.9	15.0	16.0	16.9
3.0	7.0	7.6	8.0	8.5	9.4	10.2	10.9	11.4	12.0
4.0	5.9	6.3	6.6	6.9	7.6	8.1	8.7	9.1	9.5
5.0	5.1	5.4	5.6	5.9	6.4	6.8	7.3	7.7	8.0
6.0	4.4	4.7	4.9	5.2	5.6	5.9	6.3	6.6	6.9





续附表 17

$$\theta_0 = 35^\circ$$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.26	1.0	4.1	9.2	16.5	25.8	37.1	50.5
0.2	0.26	1.0	4.0	8.6	13.4	18.4	24.2	31.0
0.4	0.26	1.0	3.9	8.1	11.8	15.2	18.9	22.8
0.6	0.26	1.0	3.7	7.6	10.6	13.3	16.0	18.8
0.8	0.26	1.0	3.6	7.2	9.7	11.8	14.0	16.2
1.0	0.26	1.0	3.5	6.8	9.1	10.8	12.6	14.4
1.2	0.26	1.0	3.4	6.5	8.5	10.1	11.6	13.0
1.4	0.26	1.0	3.3	6.2	7.9	9.4	10.7	11.9
1.6	0.26	1.0	3.2	6.0	7.5	8.8	9.9	11.0
1.8	0.26	1.0	3.2	5.8	7.1	8.3	9.3	10.2
2.0	0.25	1.0	3.1	5.5	6.7	7.9	8.8	9.6
3.0	0.25	0.9	2.8	4.8	5.5	6.4	6.9	7.5
4.0	0.25	0.9	2.5	4.1	4.7	5.3	5.8	6.2
5.0	0.24	0.9	2.3	3.6	4.2	4.6	5.1	5.4
6.0	0.24	0.8	2.2	3.3	3.8	4.2	4.5	4.8

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	50.5	66.6	83.5	103.2	148.5	202.2	264.0	334.2	412.6
0.1	38.5	49.1	61.2	74.9	106.8	144.6	188.0	236.9	291.5
0.2	31.0	38.5	47.0	56.5	78.7	104.9	135.1	169.3	207.3
0.3	26.1	31.6	37.6	44.3	60.0	78.1	99.1	123.0	149.6
0.4	22.8	27.1	31.4	36.4	47.6	60.3	75.0	91.7	110.2
0.5	20.5	24.0	27.4	31.2	39.3	48.5	59.0	70.7	83.6
0.6	18.8	21.7	24.6	27.7	33.8	40.7	48.2	56.5	65.6
0.7	17.4	19.9	22.4	25.0	30.1	35.4	40.9	46.9	53.5
0.8	16.2	18.4	20.6	22.8	27.3	31.6	35.9	40.4	45.1
0.9	15.2	17.1	19.1	21.0	25.0	28.7	32.3	35.9	39.3
1.0	14.4	16.1	17.9	19.6	22.9	26.2	29.4	32.6	35.5
1.2	13.0	14.4	15.9	17.2	20.0	22.7	25.1	27.4	29.6
1.4	11.9	13.1	14.3	15.5	17.8	19.9	21.9	23.8	25.5
1.6	11.0	12.1	13.0	14.2	16.1	17.8	19.5	21.1	22.5
1.8	10.2	11.2	12.0	13.0	14.7	16.2	17.7	19.0	20.2
2.0	9.6	10.5	11.2	12.1	13.6	15.0	16.3	17.3	18.3
3.0	7.5	8.2	8.6	9.1	10.0	10.9	11.6	12.2	12.9
4.0	6.2	6.7	7.1	7.4	8.1	8.7	9.1	9.7	10.2
5.0	5.4	5.7	6.1	6.3	6.8	7.2	7.7	8.1	8.5
6.0	4.8	5.1	5.2	5.5	5.9	6.3	6.6	7.0	7.3



续附表 17

$$\theta_0 = 40^\circ$$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.28	1.1	4.4	10.0	17.8	27.8	40.0	54.5
0.2	0.28	1.1	4.2	9.3	14.6	20.0	26.1	33.3
0.4	0.28	1.1	4.1	8.7	12.8	16.5	20.4	24.7
0.6	0.28	1.1	4.0	8.1	11.3	14.3	17.2	20.3
0.8	0.28	1.1	3.8	7.7	10.3	12.7	15.0	17.4
1.0	0.28	1.1	3.7	7.3	9.6	11.6	13.5	15.4
1.2	0.28	1.1	3.6	7.0	9.0	10.7	12.3	13.9
1.4	0.28	1.0	3.5	6.7	8.4	9.9	11.4	12.7
1.6	0.28	1.0	3.4	6.3	7.9	9.3	10.6	11.7
1.8	0.28	1.0	3.3	6.1	7.5	8.8	9.9	10.8
2.0	0.27	1.0	3.2	5.8	7.2	8.3	9.3	10.1
3.0	0.27	1.0	2.9	5.0	5.9	6.6	7.3	7.9
4.0	0.27	0.9	2.7	4.3	5.0	5.6	6.1	6.6
5.0	0.27	0.9	2.5	3.8	4.4	4.9	5.3	5.7
6.0	0.27	0.9	2.3	3.5	4.0	4.4	4.7	5.0

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	54.5	71.1	90.1	111.2	160.2	218.0	284.7	360.3	444.8
0.1	41.7	53.5	67.3	82.8	119.1	161.7	210.6	265.7	327.5
0.2	33.3	42.0	51.8	62.9	89.3	120.6	156.4	196.9	241.8
0.3	28.2	34.3	41.2	49.2	68.2	91.0	116.9	146.3	179.3
0.4	24.7	29.3	34.3	40.1	53.6	70.0	88.8	110.2	134.1
0.5	22.2	25.9	29.8	34.1	43.8	55.5	69.2	84.7	101.9
0.6	20.3	23.4	26.7	30.1	37.3	45.7	55.7	66.9	79.2
0.7	18.7	21.4	24.2	27.1	32.9	39.2	46.4	54.4	63.4
0.8	17.4	19.8	22.2	24.7	29.7	34.8	40.0	45.8	52.3
0.9	16.2	18.4	20.5	22.7	27.1	31.5	35.5	39.9	44.6
1.0	15.4	17.3	19.2	21.1	24.8	28.5	32.2	35.9	39.5
1.2	13.9	15.4	17.0	18.6	21.6	24.6	27.4	30.0	32.6
1.4	12.7	14.0	15.4	16.7	19.1	21.6	23.8	25.9	27.8
1.6	11.7	12.9	14.1	15.2	17.2	19.3	21.1	22.8	24.4
1.8	10.8	11.9	13.0	13.9	15.7	17.5	19.0	20.4	21.9
2.0	10.1	11.1	12.0	12.9	14.5	16.0	17.4	18.6	19.8
3.0	7.9	8.6	9.1	9.6	10.6	11.6	12.3	13.0	13.5
4.0	6.6	7.0	7.4	7.9	8.5	9.1	9.7	10.2	10.7
5.0	5.7	6.0	6.3	6.6	7.2	7.7	8.1	8.5	8.9
6.0	5.0	5.3	5.5	5.7	6.2	6.7	7.1	7.4	7.7



续附表 17

$\theta_0 = 45^\circ$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.30	1.2	4.7	10.6	18.7	29.3	42.1	57.3
0.2	0.30	1.2	4.5	9.8	15.4	21.3	27.8	35.6
0.4	0.29	1.1	4.3	9.2	13.5	17.4	21.7	26.4
0.6	0.29	1.1	4.2	8.6	12.0	15.1	18.2	21.5
0.8	0.29	1.1	4.1	8.1	10.9	13.4	15.8	18.4
1.0	0.29	1.1	4.0	7.6	10.1	12.2	14.2	16.2
1.2	0.29	1.1	3.8	7.3	9.4	11.3	12.9	14.6
1.4	0.29	1.1	3.6	6.9	8.9	10.5	11.9	13.4
1.6	0.29	1.1	3.5	6.5	8.4	9.8	11.0	12.4
1.8	0.29	1.1	3.5	6.2	8.0	9.2	10.3	11.5
2.0	0.29	1.1	3.3	6.0	7.6	8.6	9.7	10.7
3.0	0.29	1.0	3.0	5.1	6.2	6.8	7.6	8.2
4.0	0.29	1.0	2.8	4.5	5.3	5.8	6.4	6.8
5.0	0.28	0.9	2.6	4.0	4.6	5.1	5.6	5.9
6.0	0.28	0.9	2.4	3.6	4.1	4.6	5.0	5.2

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	57.3	74.9	94.8	117.0	168.5	229.4	299.7	379.2	468.1
0.1	44.2	57.3	72.2	89.2	128.6	174.9	227.9	287.9	354.6
0.2	35.6	45.1	56.0	68.7	98.4	133.8	174.0	219.0	269.1
0.3	30.1	36.8	44.7	54.0	76.0	102.6	133.0	166.9	204.7
0.4	26.4	31.4	36.9	43.7	59.8	79.5	102.4	127.9	156.5
0.5	23.6	27.7	32.0	36.9	48.5	62.9	79.9	99.1	120.6
0.6	21.5	24.9	28.6	32.4	40.9	51.3	63.8	78.1	94.0
0.7	19.8	22.7	25.8	29.1	35.8	43.4	52.5	62.9	74.6
0.8	18.4	21.0	23.6	26.4	32.1	38.0	44.6	52.1	60.7
0.9	17.2	19.5	21.8	24.2	29.1	34.1	39.0	44.6	50.9
1.0	16.2	18.2	20.4	22.4	26.6	30.8	35.1	39.5	44.0
1.2	14.6	16.3	17.9	19.6	23.0	26.4	29.5	32.6	35.6
1.4	13.4	14.8	16.1	17.6	20.3	23.0	25.4	27.9	30.1
1.6	12.4	13.5	14.7	16.0	18.2	20.4	22.4	24.4	26.2
1.8	11.5	12.5	13.6	14.7	16.5	18.4	20.1	21.8	23.3
2.0	10.7	11.6	12.6	13.5	15.3	16.9	18.4	19.8	21.1
3.0	8.2	8.9	9.5	10.1	11.2	12.0	13.0	13.6	14.4
4.0	6.8	7.3	7.8	8.2	9.0	9.6	10.2	10.8	11.2
5.0	5.9	6.3	6.6	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.3
6.0	5.2	5.5	5.8	6.0	6.5	6.9	7.3	7.7	8.1





续附表 17

$\theta_0 = 50^\circ$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.30	1.2	4.8	10.8	19.3	30.2	43.4	59.1
0.2	0.30	1.2	4.6	10.1	16.0	22.1	29.1	37.4
0.4	0.30	1.2	4.4	9.5	14.0	18.1	22.6	27.7
0.6	0.30	1.2	4.3	8.8	12.4	15.7	19.0	22.6
0.8	0.30	1.2	4.2	8.4	11.3	13.9	16.5	19.2
1.0	0.30	1.1	4.1	7.9	10.5	12.7	14.8	16.9
1.2	0.30	1.1	4.0	7.5	9.8	11.7	13.5	15.2
1.4	0.29	1.1	3.8	7.1	9.2	10.9	12.4	13.9
1.6	0.29	1.1	3.7	6.7	8.7	10.2	11.5	12.8
1.8	0.29	1.1	3.6	6.4	8.3	9.6	10.7	11.9
2.0	0.29	1.1	3.5	6.2	7.9	9.0	10.1	11.2
3.0	0.29	1.1	3.1	5.3	6.5	7.2	7.9	8.6
4.0	0.29	1.0	2.8	4.6	5.5	6.1	6.6	7.2
5.0	0.28	1.0	2.6	4.1	4.8	5.3	5.7	6.2
6.0	0.28	0.9	2.4	3.7	4.3	4.7	5.1	5.5

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	59.1	77.2	97.7	120.7	173.8	236.6	308.9	391.0	482.8
0.1	46.2	60.1	75.9	93.8	135.2	184.1	240.1	303.3	373.5
0.2	37.4	47.5	59.5	73.2	105.6	143.8	187.1	235.6	289.3
0.3	31.6	38.8	47.6	57.9	82.9	112.4	146.0	183.6	224.7
0.4	27.7	33.1	39.4	47.0	65.6	88.2	114.2	143.2	175.2
0.5	24.9	29.2	33.9	39.5	53.0	70.0	90.0	112.5	137.3
0.6	22.6	26.2	30.2	34.5	44.3	56.8	71.9	89.2	108.2
0.7	20.7	23.9	27.3	30.8	38.4	47.6	58.7	71.7	86.1
0.8	19.2	22.0	24.9	27.9	34.3	41.3	49.3	58.8	69.6
0.9	17.9	20.4	22.9	25.5	30.9	36.8	42.8	49.6	57.7
1.0	16.9	19.1	21.4	23.6	28.2	33.0	38.0	43.3	49.2
1.2	15.2	17.0	18.7	20.6	24.2	27.7	31.4	35.0	38.8
1.4	13.9	15.4	16.8	18.9	21.2	24.0	26.9	29.7	32.4
1.6	12.8	14.1	15.3	16.6	18.9	21.3	23.7	25.9	28.0
1.8	11.9	13.0	14.1	15.3	17.2	19.3	21.3	23.1	24.8
2.0	11.2	12.2	13.2	14.1	16.0	17.7	19.4	20.9	22.3
3.0	8.6	9.3	9.9	10.5	11.7	12.7	13.5	14.3	15.0
4.0	7.2	7.6	8.1	8.5	9.3	10.0	10.7	11.3	11.7
5.0	6.2	6.5	6.9	7.2	7.8	8.3	8.9	9.5	9.8
6.0	5.5	5.7	6.0	6.2	6.7	7.1	7.7	8.1	8.4



续附表 17

$$\theta_0 = 55^\circ$$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.3	1.2	4.9	10.9	19.8	30.6	43.9	59.5
0.2	0.3	1.2	4.7	10.2	16.3	22.6	29.9	38.6
0.4	0.3	1.2	4.5	9.5	14.2	18.5	23.3	28.5
0.6	0.3	1.2	4.3	8.9	12.7	16.1	19.4	23.2
0.8	0.3	1.2	4.2	8.4	11.5	14.2	16.9	19.8
1.0	0.3	1.1	4.1	8.0	10.7	12.9	15.1	17.4
1.2	0.3	1.1	4.0	7.6	10.1	11.9	13.7	15.6
1.4	0.3	1.1	3.9	7.3	9.4	11.1	12.6	14.2
1.6	0.3	1.1	3.8	6.9	8.9	10.4	11.7	13.1
1.8	0.29	1.1	3.6	6.6	8.4	9.6	10.9	12.2
2.0	0.29	1.1	3.6	8.3	8.0	9.2	10.3	11.4
3.0	0.29	1.0	3.2	5.4	8.6	7.4	8.0	8.8
4.0	0.29	1.0	2.9	4.7	5.6	6.2	6.7	7.3
5.0	0.29	1.0	2.6	4.1	4.9	5.4	5.8	6.4
6.0	0.29	1.0	2.5	3.9	4.4	4.8	5.2	5.6

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	59.9	78.3	99.0	122.2	176.6	239.5	312.8	396.6	489.0
0.1	47.2	61.4	78.0	96.2	139.0	189.0	245.8	310.1	382.0
0.2	38.6	48.4	62.0	76.3	110.1	149.5	194.0	244.0	300.0
0.3	32.5	40.4	49.7	60.7	87.2	118.5	154.0	193.2	236.5
0.4	28.5	34.5	41.4	49.5	69.9	94.3	122.6	153.5	187.8
0.5	25.5	30.3	35.6	41.7	56.9	75.8	97.8	122.4	149.6
0.6	23.2	27.1	31.5	36.3	47.5	61.5	78.7	98.1	119.5
0.7	21.3	24.8	28.5	32.3	40.8	51.4	64.5	79.7	96.8
0.8	19.8	22.7	25.8	29.0	36.2	44.3	53.9	65.1	78.0
0.9	18.5	21.1	23.7	26.5	32.5	39.0	46.4	54.7	64.3
1.0	17.4	19.7	22.1	24.8	29.5	34.9	40.8	47.3	54.4
1.2	15.6	17.5	19.4	21.3	25.3	29.2	33.2	37.5	41.9
1.4	14.2	15.8	17.4	19.0	22.1	25.3	28.3	31.4	34.6
1.6	13.1	14.5	15.8	17.2	19.8	22.4	24.8	27.2	29.6
1.8	12.2	13.4	14.6	15.8	18.0	20.0	22.2	24.1	26.0
2.0	11.4	12.5	13.5	14.5	16.4	18.4	20.1	21.8	23.3
3.0	8.8	9.5	10.1	10.8	12.0	13.1	14.1	14.9	15.8
4.0	7.3	7.8	8.2	8.8	9.6	10.4	11.1	11.7	12.2
5.0	6.4	6.6	7.0	7.3	8.1	8.6	9.2	9.8	10.2
6.0	5.6	5.8	6.1	6.4	6.9	7.4	7.9	8.4	8.8



续附表 17

$$\theta_0 = 60^\circ$$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.30	1.2	4.9	10.9	19.6	30.5	43.9	59.7
0.2	0.30	1.2	4.7	10.2	16.2	22.8	30.3	39.3
0.4	0.30	1.2	4.5	9.5	14.2	18.7	23.6	29.1
0.6	0.30	1.2	4.3	9.0	12.8	16.2	19.8	23.7
0.8	0.30	1.1	4.2	8.4	11.7	14.4	17.2	20.2
1.0	0.30	1.1	4.1	8.0	10.8	13.1	15.4	17.7
1.2	0.30	1.1	4.0	7.6	10.2	12.1	14.0	15.9
1.4	0.30	1.1	3.9	7.3	9.6	11.3	12.9	14.5
1.6	0.30	1.1	3.8	7.1	9.1	10.6	11.9	13.4
1.8	0.30	1.1	3.6	6.8	8.6	10.0	11.1	12.5
2.0	0.29	1.1	3.6	6.5	8.1	9.4	10.5	11.7
3.0	0.29	1.0	3.2	5.5	6.7	7.6	8.2	9.0
4.0	0.29	1.0	2.9	4.8	5.7	6.4	6.9	7.5
5.0	0.29	1.0	2.6	4.2	5.0	5.6	6.0	6.5
6.0	0.29	1.0	2.5	3.9	4.5	5.0	5.3	5.7

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000	1200	1400	1600	1800	2000
0	59.7	78.0	98.7	121.9	175.4	238.8	311.9	394.8	487.4
0.1	47.7	62.2	78.7	97.4	140.5	191.0	249.1	314.2	387.1
0.2	39.3	50.2	63.1	77.9	112.9	153.3	199.3	250.7	307.8
0.3	33.4	41.6	51.4	62.9	90.8	123.4	160.0	200.8	245.8
0.4	29.1	35.5	42.9	51.7	73.4	99.4	128.9	161.5	197.4
0.5	26.0	31.1	36.9	43.5	60.1	80.4	104.1	130.5	159.3
0.6	23.7	27.8	32.5	37.6	50.2	65.8	84.5	105.7	128.9
0.7	21.8	25.3	29.2	33.3	43.0	54.9	69.3	86.1	104.6
0.8	20.2	23.2	26.5	30.0	37.8	46.9	57.9	70.8	85.4
0.9	18.9	21.6	24.4	27.3	33.8	41.0	49.7	59.2	70.5
1.0	17.7	20.1	22.6	25.6	30.6	36.6	43.3	51.0	59.4
1.2	15.9	17.8	19.8	21.9	26.1	30.4	34.9	39.6	44.9
1.4	14.5	16.2	17.7	19.5	22.9	26.2	29.5	32.8	36.4
1.6	13.4	15.0	16.2	17.7	20.5	23.1	25.8	28.3	30.9
1.8	12.5	14.0	14.9	16.2	18.5	20.7	23.0	25.0	27.1
2.0	11.7	12.8	13.8	14.9	16.9	18.9	20.7	22.4	24.1
3.0	9.0	9.8	10.4	11.1	12.3	13.5	14.3	15.1	16.0
4.0	7.5	8.0	8.4	8.9	9.8	10.6	11.3	12.0	12.5
5.0	6.5	6.8	7.1	7.5	8.2	8.8	9.4	10.0	10.4
6.0	5.7	6.0	6.3	6.6	7.1	7.5	8.0	8.5	9.1





续附表 17

$$\theta_0 = 65^\circ$$

$c \backslash v_0$	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.30	1.2	4.8	10.8	19.2	29.9	43.1	58.8
0.2	0.30	1.2	4.6	10.0	16.0	22.5	30.2	39.5
0.4	0.30	1.2	4.5	9.4	14.0	18.6	23.5	29.2
0.6	0.29	1.2	4.3	8.9	12.7	16.1	19.8	23.8
0.8	0.29	1.1	4.2	8.4	11.6	14.4	17.3	20.3
1.0	0.29	1.1	4.0	7.9	10.7	13.1	15.5	17.8
1.2	0.29	1.1	4.0	7.6	10.1	12.1	14.1	16.0
1.4	0.29	1.1	3.9	7.3	9.5	11.3	13.0	14.6
1.6	0.29	1.1	3.8	7.0	9.0	10.6	12.1	13.5
1.8	0.29	1.1	3.6	6.7	8.6	10.0	11.3	12.6
2.0	0.29	1.1	3.6	6.4	8.2	9.5	10.6	11.8
3.0	0.29	1.0	3.2	5.5	6.7	7.6	8.4	9.0
4.0	0.28	1.0	2.9	4.8	5.7	6.4	7.0	7.5
5.0	0.28	1.0	2.6	4.3	5.0	5.5	6.1	6.5
6.0	0.28	0.9	2.5	3.9	4.5	4.9	5.4	5.7

$c \backslash v_0$	700	800	900	1000
0	58.8	76.7	97.1	119.8
0.1	47.6	61.6	78.0	96.7
0.2	39.5	50.3	63.2	78.2
0.3	33.5	42.0	52.0	63.8
0.4	29.2	35.9	43.7	52.8
0.5	26.1	31.4	37.6	44.6
0.6	23.8	28.1	33.0	38.5
0.7	21.9	25.6	30.5	34.0
0.8	20.8	23.5	26.8	30.5
0.9	18.9	21.7	24.6	27.8
1.0	17.8	20.4	22.9	25.6
1.2	16.0	18.1	20.0	22.2
1.4	14.6	16.3	17.9	19.8
1.6	13.5	14.9	16.3	17.9
1.8	12.6	13.8	15.0	16.3
2.0	11.8	13.0	14.0	15.0
3.0	9.0	9.9	10.5	11.1
4.0	7.5	8.1	8.6	9.0
5.0	6.5	6.9	7.4	7.7
6.0	5.7	6.0	6.4	6.7



续附表 17  
 $\theta_0 = 70^\circ$

<div><div><math>v_0</math></div><div><math>c</math></div></div>	50	100	200	300	400	500	600	700
0	0.29	1.2	4.7	10.5	18.6	29.1	42.0	57.1
0.2	0.29	1.1	4.5	9.7	15.6	22.0	29.6	38.8
0.4	0.29	1.1	4.3	9.0	13.8	18.3	23.3	29.1
0.6	0.29	1.1	4.2	8.6	12.4	15.9	19.6	23.6
0.8	0.29	1.1	4.0	8.2	11.4	14.3	17.2	20.2
1.0	0.29	1.1	3.9	7.8	10.6	12.9	15.3	17.7
1.2	0.29	1.0	3.9	7.5	10.0	12.0	14.0	15.9
1.4	0.29	1.0	3.8	7.2	9.4	11.2	12.9	14.5
1.6	0.29	1.0	3.7	6.9	8.9	10.5	12.0	13.4
1.8	0.29	1.0	3.6	6.7	8.4	9.9	11.2	12.6
2.0	0.29	1.0	3.5	6.3	8.0	9.4	10.6	11.8
3.0	0.29	1.0	3.2	5.5	6.7	7.6	8.3	9.1
4.0	0.28	1.0	2.9	4.8	5.7	6.4	6.9	7.5
5.0	0.28	0.9	2.6	4.3	5.0	5.5	6.0	6.5
6.0	0.28	0.9	2.5	3.9	4.5	4.9	5.4	5.8

<div><div><math>v_0</math></div><div><math>c</math></div></div>	700	800	900	1000
0	57.1	74.5	94.4	116.5
0.1	46.6	60.5	76.5	94.7
0.2	38.8	49.7	62.5	77.2
0.3	33.2	41.7	51.8	63.5
0.4	29.1	35.8	43.7	52.9
0.5	26.0	31.4	37.6	44.9
0.6	23.6	28.1	33.1	38.8
0.7	21.7	25.5	29.6	34.2
0.8	20.2	23.4	26.9	30.7
0.9	18.9	21.6	24.6	27.9
1.0	17.7	20.2	22.9	25.7
1.2	15.9	18.0	20.1	22.3
1.4	14.5	16.3	18.0	19.8
1.6	13.4	14.9	16.3	17.9
1.8	12.6	13.8	15.0	16.4
2.0	11.8	13.0	14.1	15.2
3.0	9.1	9.8	10.7	11.2
4.0	7.5	8.1	8.7	9.1
5.0	6.5	7.0	7.4	7.8
6.0	5.8	6.1	6.4	6.7



续附表 17

$\theta_0 = 75^\circ$

$v_0$ $c$	50	100	200	300	400
0	0.28	1.1	4.5	10.1	18.0
0.2	0.28	1.1	4.4	9.3	15.1
0.4	0.28	1.1	4.2	8.7	13.4
0.6	0.28	1.0	4.1	8.3	12.1
0.8	0.28	1.0	3.9	7.9	11.1
1.0	0.28	1.0	3.9	7.6	10.3
1.2	0.27	1.0	3.8	7.3	9.8
1.4	0.27	1.0	3.7	7.0	9.3
1.6	0.27	1.0	3.6	6.8	8.8
1.8	0.27	1.0	3.5	6.5	8.4
2.0	0.27	1.0	3.4	6.2	8.0
3.0	0.27	0.9	3.1	5.4	6.7
4.0	0.27	0.9	2.9	4.7	5.7
5.0	0.27	0.9	2.6	4.2	5.0
6.0	0.27	0.9	2.5	3.8	4.5

$\theta_0 = 80^\circ$

$v_0$ $c$	50	100	200	300	400
0	0.27	1.1	4.3	9.7	17.3
0.2	0.27	1.1	4.2	9.0	14.6
0.4	0.27	1.0	4.1	8.5	13.0
0.6	0.27	1.0	3.9	8.1	11.7
0.8	0.27	1.0	3.8	7.7	10.8
1.0	0.27	1.0	3.8	7.4	10.1
1.2	0.26	1.0	3.7	7.1	9.6
1.4	0.26	1.0	3.6	6.8	9.1
1.6	0.26	1.0	3.4	6.6	8.7
1.8	0.26	1.0	3.3	6.3	8.3
2.0	0.26	1.0	3.3	6.1	7.9
3.0	0.26	0.9	3.1	5.2	6.6
4.0	0.26	0.9	2.9	4.6	5.6
5.0	0.26	0.9	2.6	4.1	4.9
6.0	0.26	0.9	2.4	3.8	4.4





续附表 17

$\theta_0 = 85^\circ$

<div><div><math>v_0</math></div><div><math>c</math></div></div>	50	100	200	300	400
0	0.26	1.0	4.2	9.4	16.6
0.2	0.26	1.0	4.1	8.8	14.1
0.4	0.26	1.0	3.9	8.3	12.6
0.6	0.26	1.0	3.8	7.9	11.5
0.8	0.26	1.0	3.7	7.5	10.6
1.0	0.26	1.0	3.7	7.2	10.1
1.2	0.26	1.0	3.6	7.0	9.6
1.4	0.26	1.0	3.7	6.7	9.1
1.6	0.26	1.0	3.4	6.4	8.7
1.8	0.26	1.0	3.2	6.2	8.3
2.0	0.26	1.0	3.0	6.0	8.0
3.0	0.26	0.9	3.2	5.2	6.6
4.0	0.26	0.9	2.6	4.6	5.6
5.0	0.26	0.9	2.1	4.1	4.9
6.0	0.26	0.8	2.8	3.8	4.4

## 参考文献

- 1 徐明友. 火箭外弹道学. 北京:国防工业出版社,1980
- 2 徐明友. 弹箭飞行动力学. 北京:国防工业出版社,2003
- 3 宋丕极. 枪炮与火箭外弹道学. 北京:兵器工业出版社,1993
- 4 徐明友. 高等外弹道学. 北京:高等教育出版社,2003
- 5 徐明友,丁松滨. 飞行动力学. 北京:科学出版社,2003
- 6 杨绍卿等. 火箭弹散布和稳定性理论. 北京:国防工业出版社,1979
- 7 陆彦,吴象东,李续武. 航空外弹道学. 西安:西北工业大学出版社,1985
- 8 Davis L Jr, Follin J W Jr, Blitzer L. The Exterior Ballistics of Rockets. New York: D. Van Nostrand Company, 1958
- 9 Дмитриевский А А, Лысенко Л Н, Богдосомов С С. Внешняя Баллистика. Москва: Машиностроение, 1991
- 10 Murphy C H. Free Flight Motion of Symmetric Missiles. BRL, U.S., 1963
- 11 徐明友. 现代外弹道学. 北京:兵器工业出版社,1999
- 12 张有济等. 战术导弹飞行力学设计. 北京:宇航出版社,1998
- 13 郭锡福. 外弹道学简史. 北京:兵器工业出版社,1998
- 14 徐明友. 尾翼式火箭增程弹的散布分析. 华东工程学院,炮弹与火箭弹,1973(3)
- 15 郑民达. 尾翼式火箭增程弹合理点火时间分析. 箭弹技术研究,1977(1)
- 16 徐明友. 火箭增程弹的扰动运动理论及其应用. 华东工学院学报,1980(2)
- 17 徐明友. 火箭增程理论在应用中的几个问题. 兵工学报弹箭分册,1984(2)
- 18 王良明,王中原,周卫平. 尾翼式脱壳穿甲弹弹芯结构参数的优化设计. 弹道学报,1997(1)
- 19 宋丕极. 弹丸飞行中的追随稳定性问题. 兵工学报弹箭分册,1983(3)
- 20 薛晓中. 弹的稳定性研究. 兵工学报弹箭分册,1983(2)
- 21 李奉昌. 火箭主动段稳定性讨论. 兵工学报弹箭分册,1986(1)
- 22 董亮. 迫击炮弹近弹原因的探讨. 兵工学报弹箭分册,1984(4)
- 23 徐明友. 火箭和弹丸线性动稳定条件通论. 兵工学报弹箭分册,1987(1)
- 24 洪友诚. 一个非线性弹丸旋转稳定性问题的数学原理. 华东工学院学报,1979(3)
- 25 Murphy C H. Generalized Subharmonic Response of a Missile with Slight Configurational Asymmetries, BRL R 1591, AD 749787, June 1972
- 26 Murphy C H. Symmetric Missile Dynamic Instabilities—a Review, Technical Report ARBRL-TR-02228, AD A 085022, 1980
- 27 徐明友. 旋转弹丸在膛内的运动姿态. 华东工学院学报,1977(1)
- 28 廖心全. 尾翼张开过程对弹丸运动的影响. 兵工学报弹箭分册,1981(2)
- 29 芮筱亭等. 多管火箭发射动力学仿真与试验测试方法. 北京:国防工业出版社,2003
- 30 Friedman E M, Hudgins H S Jr. Throw-off of Projectile at Muzzle. ADA 030711, Sept. 1976
- 31 Predreauville E J. Analysis of the Lateral Motion of a Projectile in the Gun Tube. SC-RR-710071, March 19, 1971
- 32 徐明友. 等效起始扰动的一般概念及其通用公式. 兵工学报,1985(2)
- 33 宋丕极. 低速旋转火箭两种转速方式的对比. 兵工学报弹箭分册,1985(3)
- 34 徐明友. 火箭风偏计算的格林函数法. 华东工学院学报,1986(3)



- 35 刘怡昕. 静不稳定尾翼式火箭的随机风偏与零风偏原理. 兵工学报, 1985(1)
- 36 王玉琨. 关于阵风规律的进一步讨论. 兵工学报弹箭分册, 1983(4)
- 37 Geissler E D. 风对发射飞行器的影响. 成楚之译. 北京: 国防工业出版社, 1976
- 38 Luers J K. A Model of Wind Shear and Turbulence in the Surface Boundary Layer. NASA CR-2288, July 1973
- 39 Perlmutter M, Frost W. Three Velocity component, Nonhomogeneous Atmospheric Boundary Layer Turbulence Modeling. AIAA Paper No. 76 - 413, 1976
- 40 刘昌礼. 航炮校靶弹道散布的初步分析. 空军工程学院学报, 1981
- 41 Smith M S. Stability and Dispersion Analysis for Rockets and Projectiles. 1970
- 42 徐明友. 关于尾翼式火箭弹低速旋转范围的确定. 华东工学院学报, 1978(3)
- 43 Феодосьев В И, Синярев Г б. Введение в Ракетную Технику. Москва: Государственное Научно-техническое Издательство, 1961
- 44 Горбатенко С А и др. Механика Полета. Москва: Издательство «Машиностроение», 1969, 1971
- 45 王连敏. 低速低伸弹道解法. 兵工学报, 1981(1)
- 46 杨志远, 郭敬候. 空气弹道的增程弹直射程. 弹箭技术研究, 1975(5)
- 47 阮仲皋. 运用最大值原理寻求最佳推力的尝试. 兵工学报弹箭分册, 1984(4)
- 48 吴姚华. 用数学规划优选反坦克穿甲弹重量参数的一种方法, 兵工学报弹箭分册, 1986(1)
- 49 U.S. Army Materiel Command. Design Control of Projectile Flight Characteristics, 1966
- 50 马殿荣. 最佳符合弹道系数的计算方法. 兵工学报, 1985(1)
- 51 项可风, 吴传义, 陶波等. 有关弹药密集度试验分组问题的统计分析. 兵工学报弹箭分册, 1984(2)
- 52 National Oceanic and Atmospheric Administration. National Aeronautics and Space Administration, United States Air Force, U.S. Standard Atmosphere, 1976, Washington, D.C. October 1976
- 53 苗瑞生, 居贤铭. 火箭气体动力学. 北京: 国防工业出版社, 1985
- 54 丁则胜, 邱光纯, 张萍. 马格努斯效应的研究与发展. 华东工学院学报, 1981(4)
- 55 史永高. 火箭圆弧形尾翼诱导滚转力矩的探讨. 西安工业学报, 1985(1)
- 56 Стражева Н В, Мелкумов В С. Векторно-Матричные Методы в Механике Полета. «Машиностроение», 1973
- 57 潘承泮, 韩之俊, 章渭基. 武器弹药试验和检验的公算与统计. 北京: 国防工业出版社, 1980
- 58 李维铮等. 运筹学. 北京: 清华大学出版社, 1982
- 59 Kaplan M H. Modern Spacecraft Dynamics & Control. John Wiley, 1976
- 60 钱学森, 宋健. 工程控制论. 北京: 科学出版社, 1983
- 61 谢绪恺. 现代控制理论基础. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1984
- 62 杜荷聪, 陈维新. 法定计量单位宣贯手册. 北京: 国防工业出版社, 1984